

Lösung 5: Quadratische Gleichungen – Der goldene Schnitt

Lösungen der Aufgaben

1. Aufgabe:

Einsetzen von $x_1 = 4$ und $x_2 = -3$ in die quadratische Gleichung zeigt, dass sie tatsächlich Lösungen darstellen.

$$4^2 - 4 - 12 = 0$$
$$(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$$

2. Aufgabe:

Du gibst zunächst im *Gleichungs-Editor* die Koeffizienten der quadratischen Gleichung ein und lässt sie mit [EXE] registrieren.

[(-)][3] [EXE] [3] [5] [EXE] [(-)][2] [3] [.] [3] [EXE]



Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung erscheinen nach Wahl des Menüpunktes SOLV mit der Taste [F1].

$$x_1 = 0,709 \qquad x_2 = 10,96$$



3. Aufgabe:

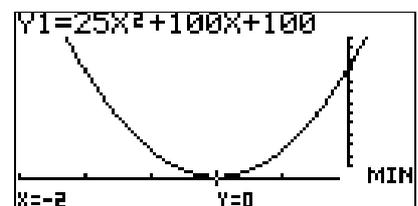
Nach der 1. Binomischen Formel gilt:

$$25x^2 + 100x + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(5x + 10)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$5x + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = -2$$

4. Aufgabe:

Eine quadratische Gleichung besitzt genau dann eine Lösung, wenn der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel auf der x-Achse liegt. Die Parabel hat in diesem Fall genau eine Nullstelle.

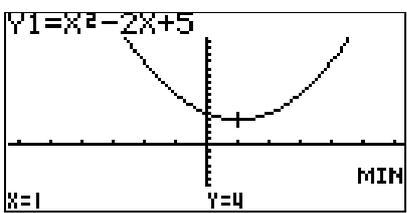
Als Beispiel ist rechts die Funktion $y = 25x^2 + 100x + 100$ graphisch dargestellt.



Lösung 5: Quadratische Gleichungen – Der goldene Schnitt

5. Aufgabe*:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 5 &= 0 && \Leftrightarrow \\
 x^2 - 2x + 1 + 4 &= 0 && \Leftrightarrow \\
 (x - 1)^2 + 4 &= 0 && \Leftrightarrow \\
 (x - 1)^2 &= -4
 \end{aligned}$$



Die letzte Gleichung ist mit reellen Zahlen nicht lösbar, da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ ist.

6. Aufgabe*:

Einsetzen von $x_1 = 1 + 2i$ und $x_2 = 1 - 2i$ in die quadratische Gleichung zeigt, dass sie Lösungen darstellen.

$$\begin{aligned}
 (1 + 2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5 &= 1 + 4i + 4i^2 - 2 - 4i + 5 = \\
 4i^2 + 4 &= 4 \cdot (-1) + 4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - 2i)^2 - 2(1 - 2i) + 5 &= 1 - 4i + 4i^2 - 2 + 4i + 5 = \\
 4i^2 + 4 &= 4 \cdot (-1) + 4 = 0
 \end{aligned}$$

Der goldene Schnitt

7. Aufgabe:

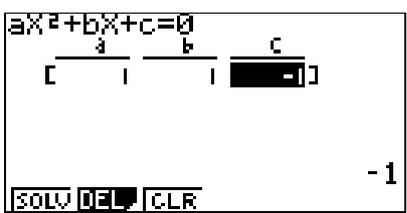
$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1-x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0$$

Du gibst im *Gleichungs-Editor* die Koeffizienten der quadratischen Gleichung ein und lässt sie mit [EXE] registrieren.

[1] [EXE] [1] [EXE] [(-)][1] [EXE]

Als Lösungen der quadratischen Gleichung erscheinen nach Wahl des Menüpunktes SOLV mit der Taste [F1]:

$$x_1 = 0,618 \qquad x_2 = -1,618$$



8. Aufgabe:

Die quadratische Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ lässt sich mit Hilfe der p-q-Formel lösen.

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad p = 1 \quad q = -1$$

Lösung 5: Quadratische Gleichungen – Der goldene Schnitt

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618 \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,618$$

9. Aufgabe:

Für das längere Teilstück kommt nur die Lösung $x = 0,618$ in Frage, da die Streckenlänge nicht negativ sein darf.

Die Länge des längeren Teilstückes beträgt 0,618 m, die des kürzeren somit $1 \text{ m} - 0,618 \text{ m} = 0,382 \text{ m}$.

10. Aufgabe*:

Die goldene Zahl ergibt sich als Längenverhältnis des längeren Teilstückes zum kürzeren.

$$\frac{x}{1-x} = \frac{0,618}{0,382} = 1,618$$

Die goldene Zahl ergibt sich ebenfalls aus dem Längenverhältnis der Gesamtstrecke zum längeren Teilstück.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(-1-\sqrt{5})} =$$

$$\frac{2(-1-\sqrt{5})}{(-1)^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2(-1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

11. Aufgabe*:

Bei einem DIN A4-Blatt bezeichne a die Länge der längeren Seite, b die der kürzeren.

Halbiert man es an der längeren Seite, so dass zwei DIN A5-Blätter entstehen, ist bei den DIN A5-Blättern b die Länge der längeren Seite und $a/2$ die der kürzeren.

Lösung 5: Quadratische Gleichungen – Der goldene Schnitt

Da das Längenverhältnis gleich ist (nur dann lässt sich ein DIN A4-Format auf einem Fotokopierer auf ein DIN A5-Format verkleinern.), gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)}$$

Es folgt $a^2 = 2 \cdot b^2$ und $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Bei einem DIN A4-Blatt beträgt das Längenverhältnis der längeren Seite zur kürzeren $\sqrt{2}$.

Dies muss so sein, wenn nach Halbierung des Blattes das Längenverhältnis gleich bleiben soll, die goldene Zahl lässt sich dann aber nicht verwenden.