Lösung 10: Graphen von Ableitungen – Skaten im Park

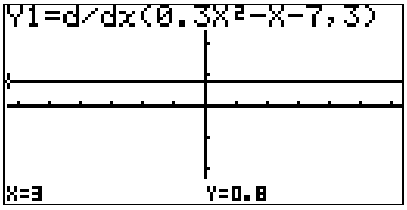
Lösungen der Aufgaben

<u>1. Aufgabe:</u>

Die Funktion der 1. Ableitung von $y = 0{,}3x^2 - x - 7$ lautet:

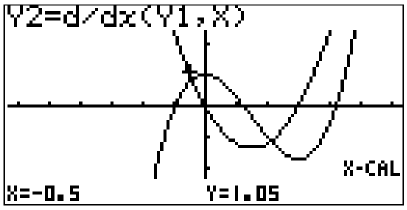
$y' = 0{,}6x - 1$

<u>2. Aufgabe:</u>



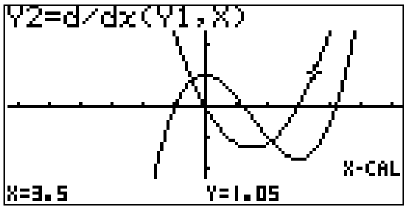
Der Graphikrechner berechnet zuerst die 1. Ableitung der Funktion an der Stelle $x = 3$. Diese beträgt $0{,}6 \cdot 3 - 1 = 0{,}8$. Anschießend stellt er die konstante Funktion $y_1 = 0{,}8$ graphisch dar.

<u>3. Aufgabe:</u>



Mit der Taste [G-Solv][S] rufst du die *Graph-Solve-Funktion* auf und danach mit den Tasten [F6] [F2] den Menüpunkt X-CAL.

Mit der Cursor-Taste [▼] wählst du den Graphen der Ableitungsfunktion aus, anschließend drückst du [EXE].
Nun gibst du den y-Wert mit [1][.][0][5] ein, zu dem die x-Werte bestimmt werden sollen, und speicherst ihn mit [EXE].

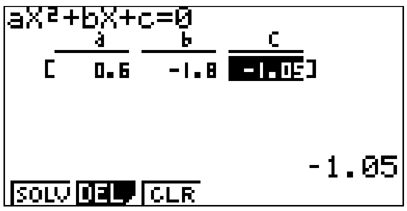


Es erscheint die Lösung mit dem kleinsten x-Wert, $x = -0{,}5$. Die zweite Lösung $x = 3{,}5$ erhältst du mit der Taste [►].

Die Funktion $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}9x^2 + 1$ besitzt bei $x = 0{,}5$ und $x = 3{,}5$ eine Steigung von 1,05.

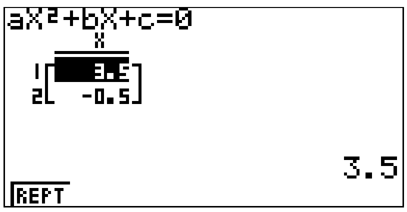
<u>4. Aufgabe*:</u>

Die Steigung der Funktion $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}9x^2 + 1$ wird durch deren Ableitung $f'(x) = 0{,}6x^2 - 1{,}8x$ beschrieben.



$$\begin{aligned} f'(x) &= 1{,}05 & \Leftrightarrow \\ 0{,}6x^2 - 1{,}8x &= 1{,}05 & \Leftrightarrow \\ 0{,}6x^2 - 1{,}8x - 1{,}05 &= 0 & \Leftrightarrow \\ x^2 - 3x - 1{,}75 &= 0 \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung lässt sich mit Hilfe der p-q-Formel lösen.



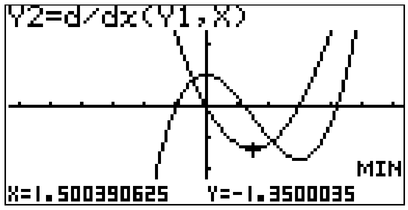
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad p = -3 \quad q = -1{,}75$$

$$x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right)} = 1{,}5 \pm 2 \qquad x_1 = 3{,}5 \quad x_2 = -0{,}5$$

Lösung 10: Graphen von Ableitungen – Skaten im Park

5. Aufgabe:

Mit der Taste [G-Solv]^{S} rufst du die *Graph-Solve-Funktion* auf und anschließend mit der Taste [F3] den Menüpunkt MIN.



Mit der Cursor-Taste [▼] wählst du den Graphen der Ableitungsfunktion aus, anschließend drückst du [EXE].

Die Steigung von f ist bei $x = 1{,}5$ minimal und beträgt dort 1,35.

6. Aufgabe:

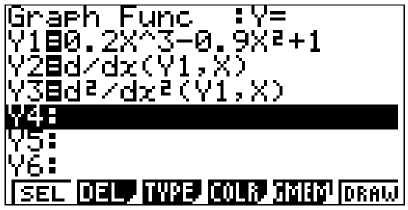
$f''(x) = 1{,}2x - 1{,}8$ $\qquad$ $f''(1{,}5) = 1{,}2\cdot 1{,}5 - 1{,}8 = 0$

$f'''(x) = 1{,}2$ $\qquad$ $f'''(1{,}5) = 1{,}2$

Ein Punkt, bei dem die 1. Ableitung einer Funktion ein Extremum besitzt, ist ein Wendepunkt.

7. Aufgabe:

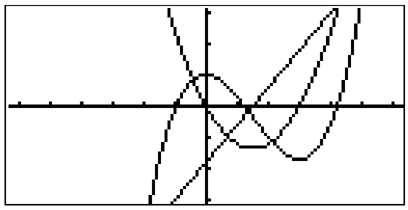
Du hebst mit der Cursor-Taste [▼] die 3. Zeile im *Graphik-Editor* hervor.



Bei der Eingabe der 2. Ableitung von f verwendest du das *Differentialrechnungs*- und das *VARS-Menü*.

[OPTN] [F2] [F2] [VARS] [F4] [F1] [1] [,] [X,θ,T] [ )] [EXE]

Die graphische Darstellung erscheint, wenn du den Menüpunkt DRAW mit der Taste [F6] aufrufst.

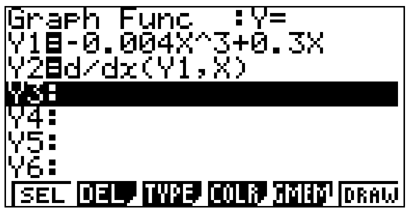


Für die graphische Darstellung von 2. Ableitungen benötigt der Rechner viel Zeit.

Skaten im Park

8. Aufgabe:

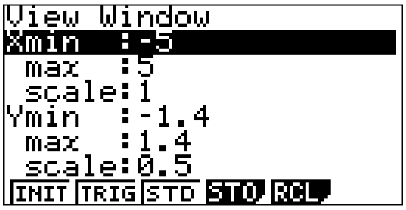
Du gibst die Funktion $f(x) = -0{,}004x^3 + 0{,}3x$ in der 1. Zeile des *Graphik-Editor* ein.



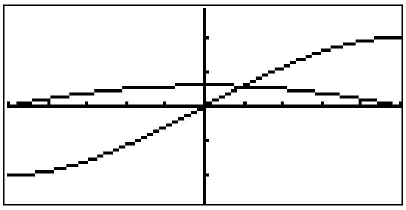
Bei der Eingabe der 1. Ableitung in der 2. Zeile verwendest du das *Differentialrechnungs*- und das *VARS-Menü*.

Lösung 10: Graphen von Ableitungen – Skaten im Park

Im *Betrachtungsfenter* ist die rechts dargestellte Einstellung sinnvoller als die *Normale Einstellung*.

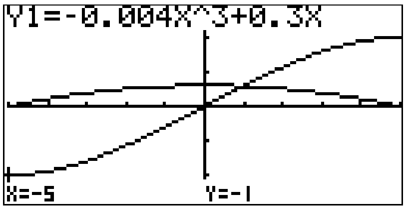


Die graphische Darstellung erscheint, wenn du im *Graphik-Editor* den Menüpunkt DRAW mit der Taste [F6] aufrufst.



9. Aufgabe:

Zur Lösung dieser Aufgabe kannst du die *Trace-Funktion* oder den Menüpunkt Y-CAL der *Graph-Solve-Funktion* verwenden.



Ebenso ist das Einsetzen in die Funktionsgleichungen möglich.

$f(-5) = -0{,}004\cdot(-5)^3 + 0{,}3\cdot(-5) = 0{,}004\cdot 125 - 1{,}5 = -1$

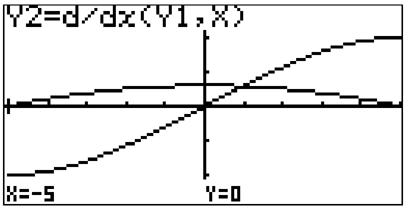
$f(5) = -0{,}004 \cdot 5^3 + 0{,}3 \cdot 5 = -0{,}004\cdot 125 + 1{,}5 = 1$

Die Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$f'(x) = -0{,}012x^2 + 0{,}3$

$f'(-5) = -0{,}012\cdot(-5)^2 + 0{,}3 = 0$

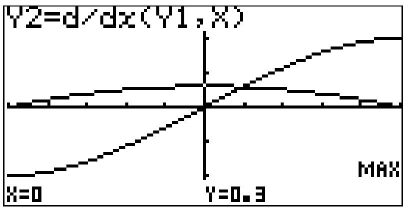
$f'(5) = -0{,}012 \cdot 5^2 + 0{,}3 = 0$



Die Steigung an den Randpunkten des Verbindungsstückes beträgt 0.

10. Aufgabe:

Während der *Graphikbildschirm* zu sehen ist, rufst du mit der Taste [G-Solv][S] die *Graph-Solve-Funktion* auf und anschließend mit der Taste [F2] den Menüpunkt MAX.

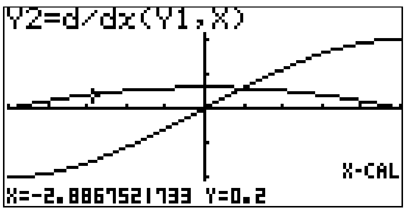


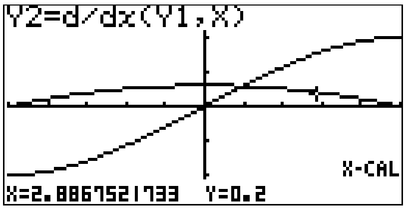
Mit der Cursor-Taste [▼] wählst du den Graphen der Ableitungsfunktion aus, anschließend drückst du [EXE].

Die Steigung von f ist in der Mitte des Verbindungsstückes maximal und beträgt dort 0,3 (30%).

11. Aufgabe:

Um herauszufinden, bei welchen x-Werten die Steigung von f den Wert 0,2 besitzt, verwendest du den Menüpunkt X-CAL der *Graph-Solve-Funktion*.



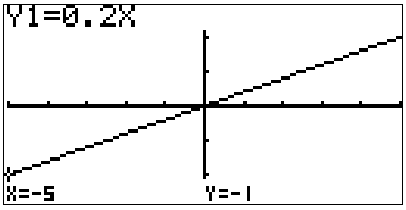


Die Steigung von f beträgt im Bereich $-2{,}887 \le x \le 2{,}887$ mindestens 0,2 (20%).

Dies entspricht einer Länge von 5,77m.

<u>12 Aufgabe:</u>

Die Gerade, welche die Randpunkte (–5/–1) und (5/1) verbindet, sei durch die Gleichung $y = m \cdot x + n$ gegeben.



Aus einem Steigungsdreieck, welches die beiden Punkte enthält, kannst du die Steigung bestimmen: $m = \frac{1-(-1)}{5-(-5)} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

Es folgt für den Achsenabschnitt: $n = y - m \cdot x = 1 - 0{,}2 \cdot 5 = 0$

Die gesuchte Gerade besitzt also die Funktionsgleichung $y = 0{,}2 \cdot x$. Ihre Steigung beträgt 0,2 (20%).

An den Randpunkten hat die Fahrbahn dann allerdings einen Knick.

<u>13. Aufgabe*:</u>

$g(x) = a \cdot x \cdot e^{bx^2}$ $\qquad g'(x) = a \cdot (1+2bx^2)\, e^{bx^2}$

$0 = g'(5) = a \cdot (1+2b \cdot 5^2)\, e^{b \cdot 5^2}$

Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. a ist nicht 0, da sonst die Funktion g identisch 0 wäre.

Also $(1+2b \cdot 5^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 50b = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = -0{,}02}$

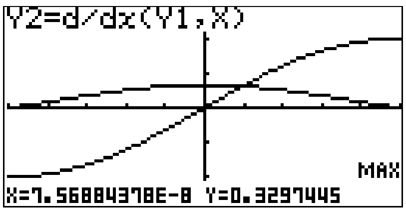
Einsetzen ergibt: $g(x) = a \cdot x \cdot e^{-0{,}02 \cdot x^2}$ $\qquad g(5) = a \cdot 5 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 5^2}$

$g(5) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 5 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 5^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot e^{-0{,}5} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 0{,}2 \cdot e^{0{,}5}}$

Einsetzen der Parameter a und b ergibt die folgende Funktion:

$$g(x) = 0{,}2 \cdot e^{0{,}5}\, x \cdot e^{-0{,}02 \cdot x^2} = 0{,}2x \cdot e^{0{,}5 - 0{,}02 \cdot x^2}$$

Sie erfüllt die geforderten Bedingungen.



Lässt du die Funktion g zusammen mit ihrer 1. Ableitung vom Rechner graphisch darstellen, kannst du mit dem Menüpunkt MAX der *Graph-Solve-Funktion* die maximale Steigung von g bestimmen.

Die Steigung von g ist in der Mitte des Verbindungsstückes maximal und beträgt dort ca. 0,33 (33%).