

## Erläuterungen und Aufgaben

Zeichenerklärung: [ ] - Drücke die entsprechende Taste des Graphikrechners!  
 [ ]<sup>S</sup> - Drücke erst die Taste [SHIFT] und dann die entsprechende Taste!  
 [ ]<sup>A</sup> - Drücke erst die Taste [ALPHA] und dann die entsprechende Taste!  
 Schwere Aufgaben sind mit einem \* gekennzeichnet.

### Grenzwerte von rekursiven Folgen

Im *Hauptmenü* gelangst du mit der Taste [ 8 ] in den *Rekursions-Modus*.

Um Folgen in rekursiver Form einzugeben, wählst du mit der Taste [F3] den Menüpunkt TYPE und anschließend [F2].

Es erscheint der *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen.

Beispiel:  $a_{n+1} = 0,5a_n - 4$        $a_0 = 100$

[ 0 ] [ . ] [ 5 ] [F4][F2] [ - ] [ 4 ]      [EXE]

Um  $n$ ,  $a_n$  oder  $b_n$  einzugeben, musst du mit [F4] den Menüpunkt  $n, a_n, b_n$  aufrufen und dann die entsprechende Funktionstaste drücken.

Mit der Taste [F5] rufst du den Menüpunkt RANG auf und gelangst zur *Tabellenbereichsanzeige*.

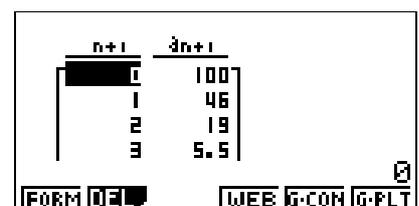
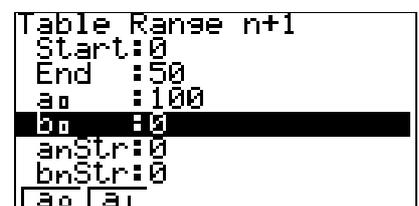
Dort drückst du die Taste [F1], um die Folge mit  $a_0$  beginnen zu lassen. (Mit [F2] würdest du  $a_1$  als Folgenanfang wählen.)

Neben dem Folgenanfang gibst du in der *Tabellenbereichsanzeige* den Start- und Endwert ein, um festzulegen, welche Folgenglieder angezeigt werden sollen.

[ 0 ]                      [EXE]  
 [ 5 ] [ 0 ]                [EXE]  
 [ 1 ] [ 0 ] [ 0 ]         [EXE]

Nachdem du mit [EXIT] zum *Folgen-Editor* zurückgekehrt bist, wählst du den Menüpunkt TABL mit [F6], um die Folgenglieder in einer Wertetabelle anzeigen zu lassen.

Mit der Cursor-Taste [▼] kannst du die zunächst nicht sichtbaren Zeilen der Wertetabelle ansehen. Der Inhalt des mit den Cursor-Tasten hervorgehobenen Tabellenfeldes wird noch mal genauer rechts unten im Display dargestellt.



Siehst du dir die Folgenglieder mit größerem Folgenindex  $n$  an, bekommst du einen Eindruck, gegen welchen Grenzwert eine Folge konvergiert.

**1. Aufgabe:**

Gegen welchen Grenzwert konvergiert die Folge  $a_n$  ?

Du kannst dein Ergebnis rechnerisch überprüfen.

$a$  sei der Grenzwert der Folge  $a_n$ , d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Bei konvergenten Folgen kannst du die Grenzwertsätze anwenden. Auf die Rekursionsformel angewandt ergibt dies:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (0,5a_n - 4) && \Rightarrow \\ a &= 0,5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 4 && \Rightarrow \\ a &= 0,5 \cdot a - 4\end{aligned}$$

**2. Aufgabe:**

Bestimme den Grenzwert der Folge  $a_n$ , indem du die Gleichung löst !

Nachdem du mit [EXIT] zum *Folgen-Editor* zurückgekehrt bist, löschst du mit [▲] [F2] [F1] die eingegebene Folge.

**3. Aufgabe:**

Gib die Folge  $a_{n+1} = 0,5 \cdot (a_n + 2/a_n)$  mit  $a_0 = 10$  im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein !

Bestimme mit dem Graphikrechner den Grenzwert  $a$  von  $a_n$  und überprüfe dein Ergebnis rechnerisch !

**4. Aufgabe\*:**

Gib eine rekursive Folge  $a_n$  mit  $a_0 = 1$  an, die gegen  $\sqrt{5}$  konvergiert, und überprüfe deinen Vorschlag mit dem Graphikrechner !

**5. Aufgabe:**

Welchen Grenzwert kannst du für die Folge  $a_{n+1} = 3/a_n$  mit  $a_0 = 1$  finden ?

## Anzeige von Reihengliedern bei rekursiven Folgen

Du gibst die Folge  $a_{n+1} = a_n/(n+1)$  mit  $a_0=1$  im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein.

```

Recursion
an+1|an/(n+1)
|n+1|
-----
|SEL| DEL | TYPE | NAME | RANG | TABL
    
```

In der *Tabellenbereichsanzeige* wählst du den Folgenanfang  $a_0 = 1$ .

Um die Summe von Folgengliedern anzeigen zu lassen, rufst du mit der Taste [SET UP]<sup>S</sup> das *Set up* auf und wählst mit der Taste [F1] die Einstellung  $\Sigma$  Display:On.

```

Σ Display :On
Draw Type :Connect
Graph Func :On
Dual Screen :Off
Simul Graph :Off
Background :None
Plot/Line :Blue ↓
On | Off
    
```

Mit [EXIT] kehrst du zurück zum *Folgen-Editor* und lässt die Wertetabelle mit [F6] anzeigen.

Innerhalb einer Zeile steht links der Folgenindex n (Es ist einfacher, ihn mit n zu bezeichnen als mit n+1), in der Mitte das dazugehörige Folgenglied  $a_n$  und rechts das Reihenglied

n+1	an+1	Σan+1
0	1	1
1	1	2
2	0.5	2.5
3	0.1666	2.6666

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k .$$

Der erste Summand ist immer das Folgenglied, welches du als Folgenanfang gewählt hast, also  $a_0$  bzw.  $a_1$ .

**6. Aufgabe:**  
**Wie lauten deiner Meinung nach der Grenzwert der Folge**  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  **sowie der Grenzwert der Reihe**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  ?

**Effektives Lernen**

Erik lernt für eine Englisch-Klausur Vokabeln. Von den 560 Vokabeln, die er kennen sollte, kennt er nur  $a_0 = 320$ . Deshalb lernt er jeden Tag 60 Vokabeln hinzu. Leider ist er sehr vergesslich und jede Nacht vergisst er 10% von den Vokabeln, die er kennt, da er lieber von Erika träumt.

Nach einem Tag kennt er  $a_1 = (a_0 + 60) \cdot 0,9 = 342$  Vokabeln. Wenn er über Nacht 10% vergisst, behält er 90%, deshalb die Multiplikation mit dem Faktor 0,9.

Nach zwei Tagen kennt er  $a_2 = (a_1 + 60) \cdot 0,9$  Vokabeln usw..

**7. Aufgabe:**

Stelle die Folge  $a_n$ , welche die Anzahl der Vokabeln angibt, die Erik nach  $n$  Tagen kennt, in rekursiver Form dar und gib sie im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein !

**8. Aufgabe:**

Nach wie vielen Tagen kennt Erik 75%, 85% bzw. 95% von den Vokabeln, die er kennen sollte ?

**9. Aufgabe:**

Die Folge  $a_n$  konvergiert. Bestimme ihren Grenzwert  $a$  mit Hilfe der Grenzwertsätze !

Am 1. Tag vergisst Erik  $(a_0 + 60) \cdot 0,1$  Vokabeln, am 2.Tag  $(a_1 + 60) \cdot 0,1$  usw., am 18. Tag also  $(a_{17} + 60) \cdot 0,1$ .

Innerhalb der ersten 18 Tage vergisst er insgesamt  $\sum_{k=0}^{17} (a_k + 60) \cdot 0,1$  Vokabeln.

$$\sum_{k=0}^{17} (a_k + 60) \cdot 0,1 = 0,1 \cdot \left( \sum_{k=0}^{17} a_k + \sum_{k=0}^{17} 60 \right) = 0,1 \cdot \left( \sum_{k=0}^{17} a_k + 18 \cdot 60 \right)$$

**10. Aufgabe:**

Bestimme mit dem Graphikrechner, wie viele Vokabeln Erik in den ersten 18 Tagen insgesamt vergisst !

**11. Aufgabe\*:**

Versuche herauszufinden, wie viele Vokabeln Erik in den ersten 18 Tagen insgesamt vergisst, ohne die Summe der Folgenglieder zu berechnen !

Du kannst zuerst berechnen, wie viele Vokabeln Erik in den ersten 18 Tagen insgesamt lernt !

**12. Aufgabe:**

Nach wie vielen Tagen kennt Erik 75% von den Vokabeln, die er kennen sollte, wenn er am ersten Tag keine Lust zum Lernen hat und darauf verzichtet ?