Erläuterungen und Aufgaben

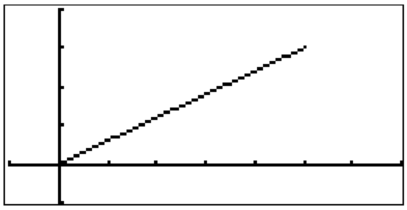
Zeichenerklärung:	[ ] -	Drücke die entsprechende Taste des Graphikrechners!
	[ ]^S -	Drücke erst die Taste [SHIFT] und dann die entsprechende Taste!
	[ ]^A -	Drücke erst die Taste [ALPHA] und dann die entsprechende Taste!
	Schwere Aufgaben sind mit einem * gekennzeichnet.	

Volumenbestimmung von Rotationskörpern

Rotiert der Graph einer nichtnegativen Funktion f im Intervall [a,b] um die x-Achse, entsteht ein Rotationskörper mit dem Volumen

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx \, .$$

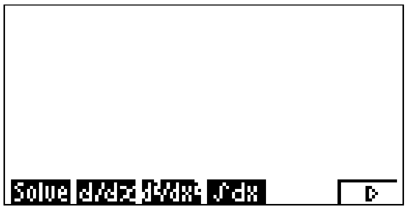
Beispiel $\quad f(x) = 0{,}6x \quad x \in [0{,}5] \quad V = \int_0^5 \pi (0{,}6x)^2 \, dx$



Du kannst das Volumen eines Rotationskörpers genau wie den Wert eines Integrals sowohl im *Run-Modus* als auch im *Graphik-Modus* bestimmen lassen. (vergleiche 3. Arbeitsblatt)

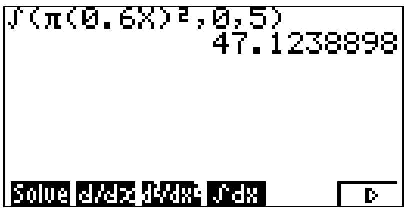
Volumenbestimmung im *Run-Modus*

Im *Hauptmenü* gelangst du mit der Taste [1] in den *Run-Modus*.



Dort drückst du die Tasten [OPTN] [F4] und unten im Display erscheint das *Funktionsanalysemenü*, welches die Möglichkeit bietet, das Integralzeichen durch Drücken der Taste [F4] einzugeben.

[F4] [π]^S [( ] [0][.][6] [X,θ,T] [ )] [x^2]
[,] [0] [,] [5] [ )] [EXE]



Wenn du die zu integrierende Funktion in Abhängigkeit von der Variable x eingegeben hast, folgen die Integrationsuntergrenze und –obergrenze jeweils nach einem Komma.

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt $V = 47{,}12$.

1. Aufgabe:
Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, indem du das Integral mit Hilfe der Stammfunktion berechnest !

<u>2. Aufgabe*:</u>
Wie nennt man den entstehenden Rotationskörper ?
Finde aus der Literatur eine Volumenformel für solche Körper und bestimme damit das Volumen !

<u>Volumenbestimmung im *Graphik-Modus*</u>

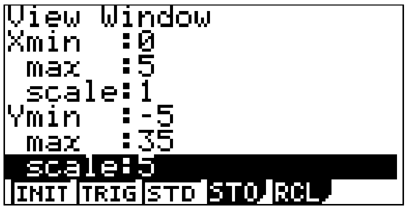
Mit den Tasten [MENU] [5] gelangst du in den *Graphik-Modus*.

Dort lässt du die Funktion $\pi\cdot(f(x))^2 = \pi\cdot(0{,}6x)^2$ graphisch darstellen.

Im *Graphik-Editor* muss rechts oben Y= angezeigt sein, um eine Funktionsgleichung in rechtwinkligen Koordinaten einzugeben. Ist das nicht der Fall, kannst du diesen Gleichungstyp mit den Tasten [F3] [F1] wählen.

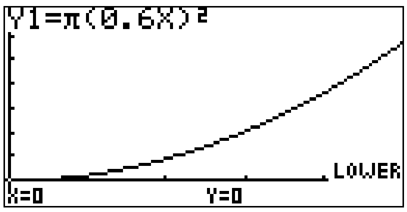
[π]^S [( ] [0][.][6] [X,θ,T] [ )] [x^2] [EXE]

Du drückst die Taste [V-Window]^S , um zum *Betrachtungsfenster* zu gelangen, und wählst dort einen x-Bereich, der das Intervall [0,5] enthält.



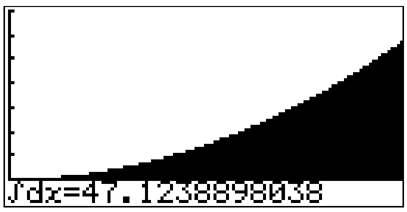
[0]	[EXE]
[5]	[EXE]
[1]	[EXE]
[(–)][5]	[EXE]
[3][5]	[EXE]
[5]	[EXE]

Nachdem du mit [EXIT] zum *Graphik-Editor* zurückgekehrt bist, lässt du die graphische Darstellung erstellen, indem du mit der Taste [F6] den Menüpunkt DRAW aufrufst.



Nun rufst du mit der Taste [G-Solv]^S die *Graph-Solve-Funktion* auf und wählst mit den Tasten [F6] [F3] den Menüpunkt $\int$dx.

Zur Registrierung der Integrationsuntergrenze bei x = 0 drückst du die Taste [EXE]. Anschließend verschiebst du den orange-farbenen Zeiger mit der Cursor-Taste [▶] zur Integrations-obergrenze x = 5 und drückst zur Registrierung [EXE].



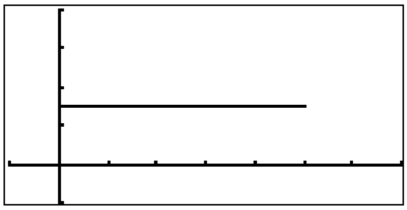
Für das Volumen des Rotationskörpers gilt:

$$V = \int_0^5 \pi(0{,}6x)^2\,dx = 47{,}12.$$

Du kehrst mit [EXIT] zum *Graphik-Editor* zurück und löscht dort die eingegebene Funktion mit [▲] [F2] [F1].

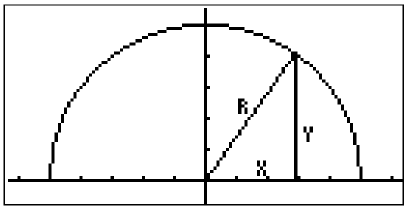
<u>3. Aufgabe:</u>
Bestimme im *Graphik-Modus* das Volumen von dem Rotationskörper, der entsteht, wenn der Graph der Funktion f(x) = 1,5 im Intervall [0,5] um die x-Achse rotiert !

<u>4. Aufgabe:</u>
Überprüfe das Ergebnis mit der Volumenformel eines Zylinders $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$!



<u>Volumenbestimmung einer Kugel</u>

Um das Volumen einer Kugel mit Radius R = 5 zu bestimmen, kannst du den halbkreisförmigen Graphen einer Funktion um die x-Achse rotieren lassen.



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$R^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{bzw.} \qquad y^2 = R^2 - x^2$$

Für die Funktion f eines Halbkreises mit R = 5 ergibt sich:

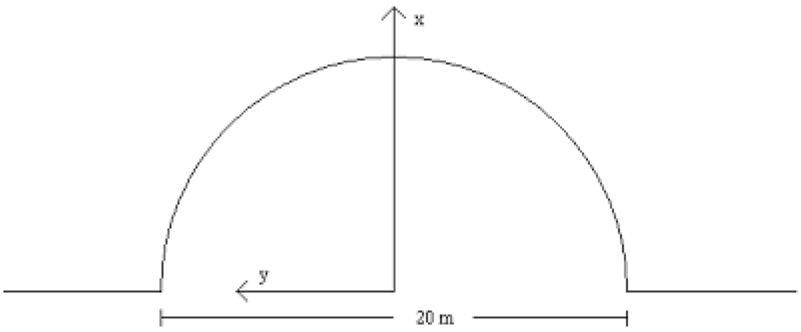
$$f(x) = \sqrt{5^2 - x^2} \qquad x \in [-5,5]$$

<u>5. Aufgabe:</u>
Berechne im *Run-Modus* mit Hilfe des *Funktionsanalysemenüs* das Volumen einer Kugel mit Radius 5 !

<u>6. Aufgabe*:</u>
Überprüfe das Ergebnis, indem du das zu berechnende Integral mit Hilfe der Stammfunktion bestimmst !
Führe die Rechnung mit einem allgemeinen Radius r durch und gewinne daraus eine Formel für das Kugelvolumen !

Bau einer Kuppel

Für ein Museum ist der Bau einer rotationssymmetrischen Kuppel geplant. An der Grundfläche der Kuppel, dort wo die Kuppel auf dem Gebäude aufsetzt, beträgt ihr Durchmesser 20 m. Für die Einstellung der Klimaanlage, welche eine ausreichende Zufuhr von Frischluft gewährleisten muss, ist es notwendig, das Volumen der Kuppel zu bestimmen.



<u>7. Aufgabe:</u>
Stelle eine Funktion f für den Rand der Kuppel auf, so dass bei deren Rotation um die x-Achse eine halbkugelförmige Kuppel entsteht !

Die Dicke der Kuppelwand soll vernachlässigt werden.

<u>8. Aufgabe:</u>
Berechne im *Run-Modus* mit Hilfe des *Funktionsanalysemenüs* das Volumen der Kuppel und überprüfe das Ergebnis mit der Formel für das Kugelvolumen !

Ein alternativer Entwurf sieht eine Kuppel mit Spitze vor, deren Rand durch die folgende Funktion gegeben ist.

$g(x) = 5{,}7 \cos(0{,}24x-0{,}6) + 5{,}3$

<u>9. Aufgabe*:</u>
Bestimme die Höhe dieser Kuppel !

Rufe mit der Taste [SET UP]^{S} das *Set up* auf und wähle in der Rubrik `Angle` die Einstellung `Rad` für Bogenmaß.

<u>10. Aufgabe:</u>
Bestimme das Volumen dieser Kuppel !

<u>11. Aufgabe*:</u>
An welcher Stelle ist der Durchmesser dieser Kuppel maximal ? Wie groß ist dort der Kuppelumfang ?