Lösung 15: Rotationskörper – Bau einer Kuppel

Lösungen der Aufgaben

1. Aufgabe:

$$V = \int_0^5 \pi(0{,}6x)^2\,dx = \int_0^5 \pi \cdot 0{,}36x^2\,dx = \left[\pi \cdot 0{,}36 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot x^3\right]_0^5 =$$

$$\pi \cdot 0{,}36 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 5^3 - 0 = 15\pi = 47{,}12$$

2. Aufgabe*:

Bei dem Rotationskörper handelt es sich um einen Kegel.
Seine Höhe beträgt $h = 5$, der Radius seiner Grundfläche beträgt $r = f(5) = 0{,}6 \cdot 5 = 3$.

Ein Kegel mit Höhe h und Grundfläche G besitzt das Volumen $V = \tfrac{1}{3} G \cdot h$.

Für den Kegel des Beispiels gilt:

$$V = \tfrac{1}{3} G \cdot h = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \tfrac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15 \cdot \pi = 47{,}12$$

3. Aufgabe:

Um das Volumen $V = \int_0^5 \pi \cdot 1{,}5^2\,dx$ im *Graphik-Modus* zu bestimmen, gibst du die Funktion $\pi \cdot (f(x))^2 = \pi \cdot 1{,}5^2$ im *Graphik-Editor* ein.

[π]^S [×] [1][.][5] [x^2]   [EXE]

Mit [F6] lässt du die graphische Darstellung erstellen, die Einstellung im *Betrachtungsfenster* kannst du beibehalten.

Nun rufst du mit der Taste [G-Solv]^S die *Graph-Solve-Funktion* auf und wählst mit den Tasten [F6] [F3] den Menüpunkt ∫dx.

Zur Registrierung der Integrationsuntergrenze bei x = 0 drückst du die Taste [EXE]. Anschließend verschiebst du den orange-farbenen Zeiger mit der Cursor-Taste [▶] zur Integrations-obergrenze $x = 5$ und drückst zur Registrierung [EXE].

Für das Volumen des Zylinders, der bei der Rotation entsteht gilt:

$$V = \int_0^5 \pi \cdot 1{,}5^2\,dx = 35{,}34.$$

4. Aufgabe:

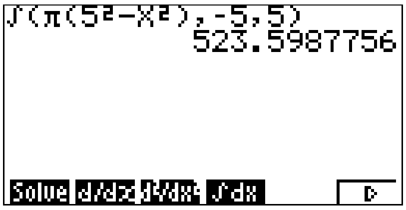
Der Zylinder besitzt die Höhe $h = 5$ und den Radius $r = 1{,}5$.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 11{,}25 \cdot \pi = 35{,}34$

5. Aufgabe:

$$V = \int_{-5}^{5} \pi \left(f(x)\right)^2 dx = \int_{-5}^{5} \pi \sqrt{5^2 - x^2}^{\,2} dx = \int_{-5}^{5} \pi (5^2 - x^2)\, dx$$

Du gelangst mit den Tasten [MENU] [1] in den *Run-Modus* und rufst mit den Tasten [OPTN] [F4] das *Funktionsanalysemenü* auf.



[F4] [π]^S [( ] [5] [x^2] [–] [X,θ,T] [x^2] [ )]
[,] [(–)][5] [,] [5] [ )] [EXE]

Das Volumen einer Kugel mit Radius 5 beträgt 523,6.

6. Aufgabe*:

$$\int_{-5}^{5} \pi (5^2 - x^2)\, dx = \pi \left[5^2 x - \tfrac{1}{3} x^3\right]_{-5}^{5} = \pi \left(5^3 - \tfrac{1}{3} 5^3 - (-5^3 + \tfrac{1}{3} 5^3)\right)$$
$$= \pi\,(2 \cdot 5^3 - 2 \cdot \tfrac{1}{3} 5^3) = \pi\, \tfrac{4}{3} \cdot 5^3 = 166{,}67\,\pi = 523{,}6$$

Ersetzt du in der Rechnung die Zahl 5 durch die Konstante r erhältst du für das Volumen einer Kugel mit Radius r:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi (r^2 - x^2)\, dx = \tfrac{4}{3} \pi r^3$$

Bau einer Kuppel

7. Aufgabe:

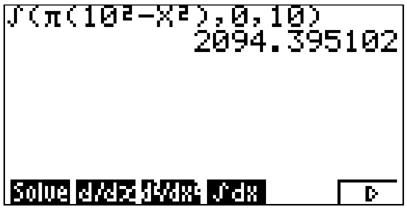
Beträgt der Maßstab auf der x- und y-Achse 1 m, entsteht eine halbkugelförmige Kuppel bei Rotation des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{10^2 - x^2}$ um die x-Achse im Intervall [0,10].

8. Aufgabe:

Für das Kuppelvolumen in m^3 gilt:

$$V = \int_{0}^{10} \pi \sqrt{10^2 - x^2}^{\,2} dx = \int_{0}^{10} \pi (10^2 - x^2)\, dx$$

Im *Run-Modus* rufst mit den Tasten [OPTN] [F4] das *Funktionsanalysemenü* auf.



[F4] [π][S] [( ] [1][0] [x^2] [−] [X,θ,T] [x^2] [ )]
[,] [(−)][0] [,] [1][0] [ )] [EXE]

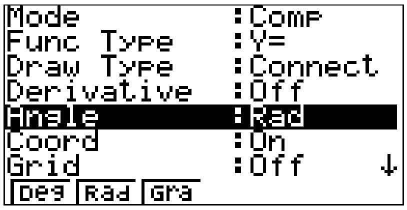
Das Volumen der Kuppel beträgt 2094,4 m^3.

Eine Kugel mit Radius r besitzt das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Für das Volumen einer Halbkugel mit Radius 10 m folgt:

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = = \frac{2}{3}\pi(10\,\mathrm{m})^3 \quad \frac{2}{3}\pi\cdot 1000\,\mathrm{m}^3 = 2094{,}4\ \mathrm{m}^3$$

9. Aufgabe*:



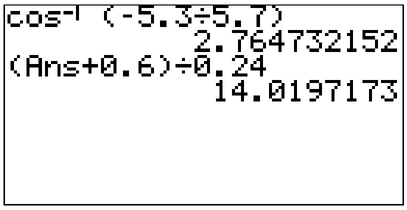
Du rufst zunächst mit der Taste [SET UP][S] das *Set up* auf und hebst mit der Cursor-Taste [▼] die Rubrik `Angle` hervor. Besteht dort nicht die Einstellung `Rad` für Bogenmaß, wählst du sie mit [F2]. Mit [EXIT] verlässt du das *Set up.*

Um herauszufinden, an welcher Stelle sich die Kuppelspitze befindet, musst du die kleinste positive Nullstelle der Funktion g bestimmen.

$$g(x) = 5{,}7\cos(0{,}24x-0{,}6) + 5{,}3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$5{,}7\cos(0{,}24x-0{,}6) = -5{,}3 \quad \Rightarrow$$

$$\cos(0{,}24x-0{,}6) = -\frac{5{,}3}{5{,}7}$$

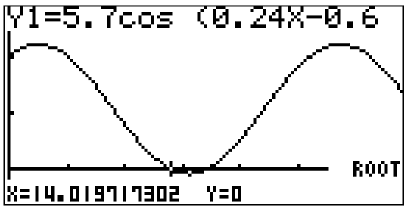


Für die kleinste positive Nullstelle x gilt:

$$0{,}24x-0{,}6 = \cos^{-1}\left(-\frac{5{,}3}{5{,}7}\right) = 2{,}7647 \quad \Rightarrow$$

$$0{,}24x = 2{,}7647 + 0{,}6 = 3{,}3647 \quad \Rightarrow$$

$$x = 3{,}3647/0{,}24 = 14{,}02$$

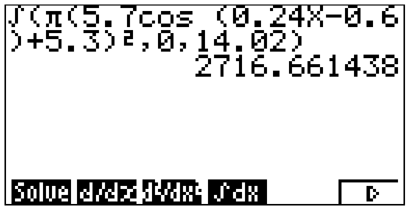


Die Kuppel besitzt eine Höhe von 14,02 m.

Natürlich kannst du diese Aufgabe auch im *Graphik-Modus* lösen.

10. Aufgabe:

Das Kuppelvolumen lässt sich im *Run-Modus* mit dem *Funktionsanalysemenü* bestimmen.



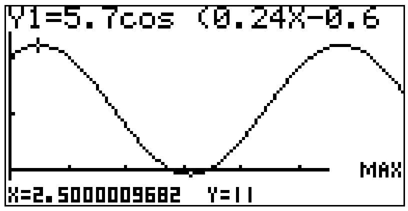
$$V = \int_0^{14,02} \pi (g(x))^2 \, dx = \int_0^{14,02} \pi \left(5,7 \cos(0,24x - 0,6) + 5,3\right)^2 dx =$$

2716,7

Das Volumen der Kuppel beträgt 2716,7 m^3.

11. Aufgabe*:

Der Durchmesser der Kuppel ist maximal, wenn g(x) maximal ist. Dies ist der Fall wenn der Kosinus den Wert 1 annimmt, also für $0{,}24x - 0{,}6 = 0$ bzw. $x = 0{,}6/0{,}24 = 2{,}5$.



$g(2{,}5) = 5{,}7 \cdot 1 + 5{,}3 = 11$

Der Durchmesser der Kuppel ist 2,5 m über ihrer Grundfläche maximal und besitzt dort den Wert d =22 m.
Der Umfang beträgt an dieser Stelle $U = \pi \cdot d = \pi \cdot 22$ m = 69,1 m.