

Erläuterungen und Aufgaben

<u>Zeichenerklärung:</u>	[]	-	Drücke die entsprechende Taste des Graphikrechners!
	[] ^S	-	Drücke erst die Taste [SHIFT] und dann die entsprechende Taste!
	[] ^A	-	Drücke erst die Taste [ALPHA] und dann die entsprechende Taste!
Schwere Aufgaben sind mit einem * gekennzeichnet.			

Binomialverteilung

Der Graphikrechner kennt einige spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen, unter anderem die Binomialverteilung und die Normalverteilung.

Wird ein Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ N-mal unabhängig wiederholt, ist die Anzahl der Treffer binomialverteilt.

Die Wahrscheinlichkeit für x Treffer beträgt:

$$b_{N,p}(x) = \binom{N}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{N-x}$$

Beispiel: Bei 30 Würfeln mit einem Würfel gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass genau x-mal die Zahl 6 gewürfelt wird:

$$b_{30, \frac{1}{6}}(x) = \binom{30}{x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{30-x}$$

1. Aufgabe:

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim 30-maligen Würfeln 5-mal die Zahl 6 gewürfelt wird !

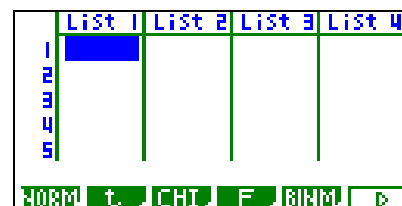
Du kannst im 17. Arbeitsblatt nachschauen, wie man Binomialkoeffizienten bestimmt.

Binomialverteilung im Statistik-Modus

Im *Hauptmenü* gelangst du mit der Taste [2] in den *Statistik-Modus*.

Dort rufst du mit [F5] den Menüpunkt DIST auf und unten im Display erscheint das *Verteilungs-Menü*.

Anschließend wählst du mit der Taste [F5] den Menüpunkt BINM für die Binomialverteilung.



Die Zufallsvariable X gebe die Trefferanzahl an.

Um die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ zu bestimmen, dass die Trefferanzahl den Wert x annimmt, wählst du mit der Taste [F1] den Menüpunkt Bpd und danach mit [F2] den Menüpunkt Var.

	List 1	List 2	List 3	List 4
1				
2				
3				
4				
5				

Bpd Bcd

Jetzt kannst du den Wert x , die Anzahl N der Wiederholungen des Experiments und die Trefferwahrscheinlichkeit p eingeben.

[▼]
 [5] [EXE]
 [3] [0] [EXE]
 [1] [÷] [6] [EXE]

```
Binomial P.D
Data      :Variable
x         :5
Numtrial  :30
P         :0.16666666
Execute
[CALC]
```

Wählst du mit [F1] den Menüpunkt CALC, berechnet der Rechner die Wahrscheinlichkeit, dass beim 30-maligen Würfeln 5-mal die Zahl 6 gewürfelt wird.

$$P(X = 5) \approx 0,192 = 19,2\%.$$

```
Binomial P.D
P(x)=0.1921
```

2. Aufgabe:

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass 14-mal die Zahl 4 auftritt, wenn 60 ganzzahlige Zufallszahlen von 1 bis 4 erzeugt werden !

Du kehrst mit [EXIT] [EXIT] zum *Statistik-Editor* zurück und gelangst mit [F5] [F5] wieder zum *Binomialverteilung-Menü*.

Um die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zu bestimmen, dass die Trefferanzahl kleiner als ein Wert x ist oder gleich diesem, wählst du mit der Taste [F2] den Menüpunkt Bcd und danach mit [F2] den Menüpunkt Var.

[▼]
 [5] [EXE]
 [3] [0] [EXE]
 [1] [÷] [6] [EXE]

	List 1	List 2	List 3	List 4
1				
2				
3				
4				
5				

Bpd Bcd

```
Binomial C.D
Data      :Variable
x         :5
Numtrial  :30
P         :0.16666666
Execute
[CALC]
```

Wählst du mit [F1] den Menüpunkt CALC, berechnet der Rechner die Wahrscheinlichkeit, dass beim 30-maligen Würfeln höchstens 5-mal die Zahl 6 gewürfelt wird.

$$P(X \leq 5) \approx 0,616 = 61,6\%.$$

```
Binomial C.D
P(x)=0.61644
```

3. Aufgabe*:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim 30-maligen Würfeln mindestens 5-mal die Zahl 6 gewürfelt wird ?

Graphische Darstellung der Binomialverteilung

Da die Trefferanzahl nur ganzzahlige nichtnegative Werte annehmen kann, eignet sich der *Rekursions-Modus* (vergleiche 6. Arbeitsblatt) zur graphischen Darstellung.

Mit den Tasten [MENU] [8] gelangst du in der *Rekursions-Modus* und mit den Tasten [F3] [F1] zum *Folgen-Editor* für explizite Darstellung.

[3] [0] [OPTN] [F4] [F3] [EXIT] [EXIT] [F4]
 [×] [(] [1] [÷] [6] [)] [^] [F4]
 [×] [(] [5] [÷] [6] [)] [^] [(] [3] [0] [-] [F4] [)]
 [EXE]

```
Recursion
anB30CnX(1÷6)^nX(5÷6
bn:
[SEL] [DEL] [TYPE] [n] [RANG] [TABL]
```

Im *Folgen-Editor* verwendest du als Variable n statt x.

Du rufst mit der Taste [F5] den Menüpunkt RANG auf und gibst in der *Tabellenbereichsanzeige* als Startwert 0 und als Endwert 30 ein.

Mit [EXIT] [V-Window]^S gelangst du zum *Betrachtungsfenster*, in dem du die rechts angegebene Einstellung wählst.

```
View Window
Xmin : 0
max : 30
scale: 5
Ymin : -0.05
max : 0.25
scale: 0.1
[INIT] [TRIG] [STD] [STO] [RCL]
```

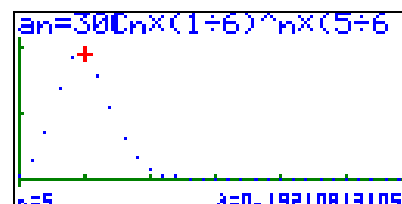
Nun lässt du mit [EXIT] [F6] eine Wertetabelle anzeigen, in der du direkt die Wahrscheinlichkeiten $P(X = n)$ ablesen kannst.

n	3n
0	4.2E-3
1	0.0252
2	0.0733
3	0.1368

[FORM] [DEL] [G-CON] [G-PLT]

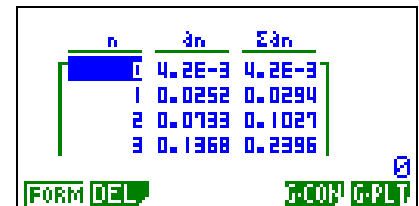
Um die graphische Darstellung erstellen zu lassen, wählst du mit [F6] den Menüpunkt G-PLT.

Drückst du die Taste [Trace]^S und verwendest die Cursor-Tasten [►] bzw. [◄], kannst du ebenfalls die Werte der Binomialverteilung anzeigen lassen.



Mit der Taste [SET UP]^S rufst du nun das *Set up* auf und wählst mit [F1] in der 1. Zeile die Einstellung Σ Display: On für die Anzeige der Reihenglieder.

Lässt du mit [EXIT] [F6] die Wertetabelle erneut erstellen, wird in der rechten Spalte zusätzlich die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq n)$ angezeigt.



n	Pn	ΣPn
0	4.2E-3	4.2E-3
1	0.0252	0.0294
2	0.0733	0.1027
3	0.1368	0.2396

4. Aufgabe:

Bestimme mit Hilfe der Wertetabelle, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass beim 30-maligen Würfeln höchstens 5-mal die Zahl 6 gewürfelt wird !

5. Aufgabe*:

Lasse eine Binomialverteilung graphisch darstellen, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim 15-maligen Werfen einer Münze n-mal Wappen auftritt ! ($0 \leq n \leq 15$)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird 7-mal, mit welcher 8-mal Wappen geworfen ?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird höchstens 7-mal Wappen geworfen ?

Mit Glück und Verstand

Georg muss einen Multiple-Choice-Test bestehen, damit er den Job bekommt, den er ausüben möchte.

Der Test besteht aus 20 Fragen, von denen er mindestens 12 richtig beantworten muss. Bei jeder Frage sind vier Antwortmöglichkeiten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist.

Georg hat so viel gelernt, dass er bei jeder Frage mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,7 = 70\%$ die richtige Antwortmöglichkeit ankreuzt.

6. Aufgabe:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Georg genau 14 Fragen richtig beantwortet ?

7. Aufgabe:

Wie viele richtige Antworten kann Georg im Mittel erwarten ?

Der Mittelwert der Binomialverteilung $b_{N,p}$ liegt bei $\mu = Np$.

8. Aufgabe:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht Georg den Test nicht ?

9. Aufgabe:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der richtigen Antworten zwischen 12 und 16 liegt ?

10. Aufgabe:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde Georg den Test nicht bestehen, wenn dieser 40 Fragen beinhalten würde, von denen Georg mindestens 24 (also ebenfalls 60%) richtig beantworten müsste ?

11. Aufgabe:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht Georg den Test, wenn er bei jeder der 20 Fragen eine Antwortmöglichkeit zufällig ankreuzt ?

12. Aufgabe*:

Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde Georg den Test bestehen, wenn bei jeder Frage genau zwei der vier Antwortmöglichkeiten richtig wären und Georg zufällig zwei der Antwortmöglichkeiten ankreuzen würde ?