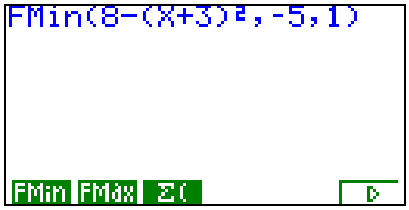
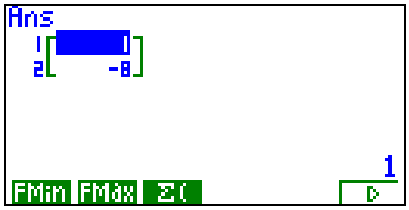
Lösungen der Aufgaben

1. Aufgabe:



Du kannst die Anzeige mit der Taste [AC/ON] löschen, bevor du das Symbol für die Bestimmung des Minimums, die Funktion und jeweils nach einem Komma die linke und rechte Intervallgrenze eingibst

[F1] [8] [–] [( ] [X,θ,T] [+] [3] [ )] [x^2]
[,] [(–)][5] [,] [1] [ )] [EXE]



Das absolute Minimum von f im Intervall [–5;1] besitzt den Wert –8 und wird an der rechten Intervallgrenze bei x = 1 angenommen.

2. Aufgabe:

$$f(x) = 8 - (x+3)^2$$
$$f'(x) = -2\,(x+3)$$
$$f''(x) = -2$$

Bei $x = -3$ befindet sich am Scheitelpunkt der Parabel wegen $f'(-3) = 0$ und $f''(-3) < 0$ ein relatives Maximum.

Bei $x = 1$ befindet sich wegen $f'(1) \neq 0$ kein relatives Minimum. Für $x > 1$ gilt $f(x) < -8$.

3. Aufgabe*:

$$f(x) = \cos x + \tfrac{x}{2}$$
$$f'(x) = -\sin x + \tfrac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\cos x$$

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x ein relatives Maximum (Minimum), wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$).

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin x + \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \tfrac{1}{2}$$

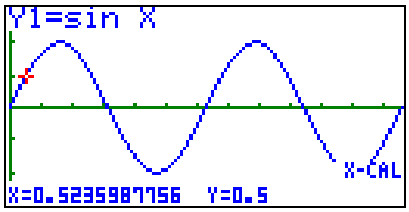
Im Intervall $[0;4\pi]$ hat die Gleichung folgende Lösungen:

$x_1 = \frac{1}{6}\pi \approx 0{,}524$ $\qquad f''(x_1) = -\cos(\frac{1}{6}\pi) \approx -0{,}866 < 0$

$x_2 = \frac{5}{6}\pi \approx 2{,}618$ $\qquad f''(x_2) = -\cos(\frac{5}{6}\pi) \approx 0{,}866 > 0$

$x_3 = \frac{13}{6}\pi \approx 6{,}807$ $\qquad f''(x_3) = -\cos(\frac{13}{6}\pi) \approx -0{,}866 < 0$

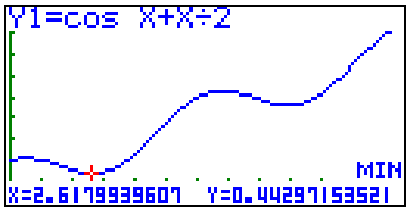
$x_4 = \frac{17}{6}\pi \approx 8{,}901$ $\qquad f''(x_4) = -\cos(\frac{17}{6}\pi) \approx 0{,}866 > 0$



Die Funktion f besitzt im Intervall [0,4π]:

relative Maxima bei (0,52/1,13) und (6,81/4,27)
relative Minima bei (2,62/0,44) und (8,90/3,58)

4. Aufgabe:



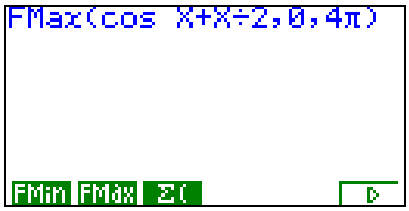
Du rufst mit den Tasten [G-Solv]^{S} [F3] den Menüpunkt MIN der *Graph-Solve-Funktion* auf.

Du erhältst ein relatives Minimum bei (2,62/0,44) und nach Drücken der Cursor-Taste [▶] ein zweites bei (8,90/3,58).

5. Aufgabe:

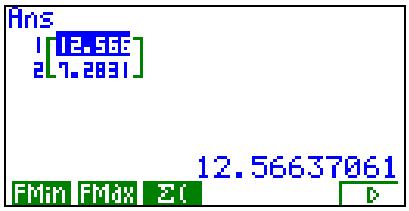
Das absolute Maximum von f im Intervall [0;4π] befindet sich an der rechten Intervallgrenze bei x = 4π ≈ 12,57 und beträgt f(4π) = 1 + 2π ≈ 7,28.
Es befindet sich dort kein relatives Maximum von f.

Das absolute Minimum von f im Intervall [0;4π] befindet sich an der Stelle des kleineren relativen Minimums bei x = $\frac{5}{6}\pi$ ≈ 2,62 und beträgt f($\frac{5}{6}\pi$) ≈ 0,44.



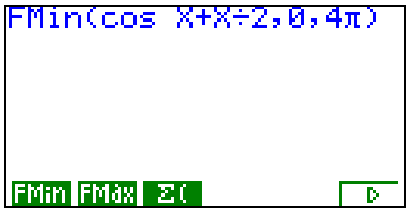
Zur Überprüfung wechselst du mit [MENU] [1] in den *Run-Modus* und rufst mit den Tasten [OPTN] [F4] [F6] den zweiten Teil des *Funktionsanalysemenüs* auf.

[F2] [cos] [X,θ,T] [+] [X,θ,T] [÷] [2]
[,] [0] [,] [4][π]^{S} [ )] [EXE]

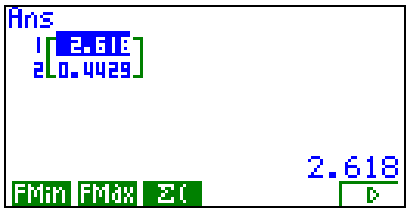


Das absolute Maximum von f im Intervall [0;4π] besitzt den Wert 7,28 und wird bei x ≈ 12,57 angenommen.

Nach Drücken der Taste [AC/ON] kannst du mit der Cursor-Taste [▲] die Eingabe der letzten Rechnung anzeigen lassen.



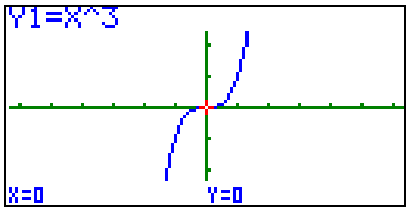
Du erzeugst durch Drücken der Cursor-Taste [▶] einen blinkenden Cursor und ersetzt mit [F1] das Symbol für Maximumbestimmung durch das für die Minimumbestimmung, anschließend drückst du [EXE]



Das absolute Minimum von f im Intervall [0;4π] besitzt den Wert 0,44 und wird bei x ≈ 2,62 angenommen.

6. Aufgabe*:

Die Funktion $f(x) = x^3$ besitzt an der Stelle (0/0) kein relatives Extremum, weil in jeder Umgebung des Nullpunktes sowohl negative als auch positive Funktionswerte existieren.



Wegen $f'(x) = 3x^2$ gilt $f'(0) = 0$.

Beachte, dass wegen $f''(x) = 6x$ ebenfalls $f''(0) = 0$ gilt.

Baywatch

7. Aufgabe*:

Bei einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v gilt:

$v = \frac{s}{t}$ bzw. $t = \frac{s}{v}$ s: zurückgelegter Weg, t: benötigte Zeit

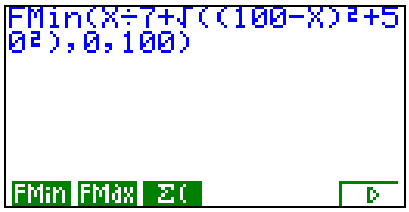
Bettina legt am Strand x Meter zurück und anschließend im Wasser nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{(100-x)^2 + 50^2}$.
Nach Division durch die zugehörigen Geschwindigkeiten ergibt sich für die Zeit, die Bettina benötigt, um den Schwimmer zu erreichen:

$$t = \frac{x\ \text{m}}{7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} + \frac{\sqrt{(100-x)^2 + 50^2}\ \text{m}}{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{x}{7}\,\text{s} + \sqrt{(100-x)^2 + 50^2}\ \text{s}$$

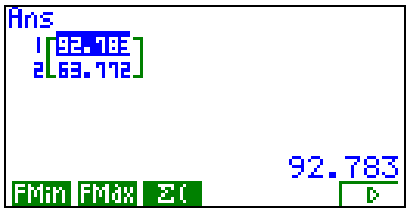
8. Aufgabe:

Im *Run-Modus* rufst mit den Tasten [OPTN] [F4] [F6] den zweiten Teil des *Funktionsanalysemenüs* auf.

Es ist sinnvoll, [0;100] als Intervall möglicher Lösungen für x zu verwenden.



[F1] [X,θ,T] [÷] [7] [+] [$\sqrt{\ }$]^S [( ] [( ] [1][0][0]
[−] [X,θ,T] [ )] [x^2] [+] [5][0] [x^2] [ )]
[,] [0][,] [1][0][0] [ )] [EXE]



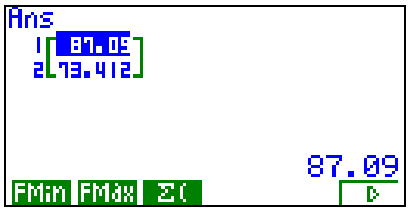
Die minimale Zeit, nach der Bettina den Schwimmer erreichen kann, beträgt ca. 63,77s. Sie muss dabei zunächst ca. 92,78m am Strand laufen, bevor sie ins Wasser springt.

9. Aufgabe

Nimmt Bettina den direkten Weg durch das Wasser, d.h. x = 0, benötigt sie eine Zeit von $\sqrt{100^2 + 50^2}$ s $\approx$ 111,8s.

10. Aufgabe:

Du löst die Aufgabe analog zur 8. Aufgabe, indem du bei der Formel für t(x) die Zahl 7 durch die Zahl 4 ersetzt.



Beträgt die Geschwindigkeit von Bettina am Strand 4 m/s, muss sie dort ca. 87,09m laufen, bevor sie ins Wasser springt, um den Schwimmer in kürzester Zeit (ca. 73,41s) zu erreichen.

11. Aufgabe*:

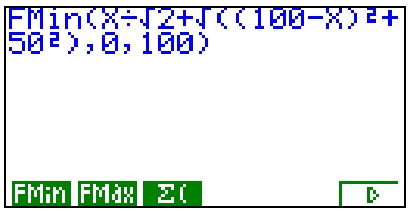
Für die Zeit in Sekunden, die Bettina benötigt, um den Schwimmer zu erreichen, gilt in Abhängigkeit von V:

$$t(x) = \frac{x}{V} + \sqrt{(100-x)^2 + 50^2}$$

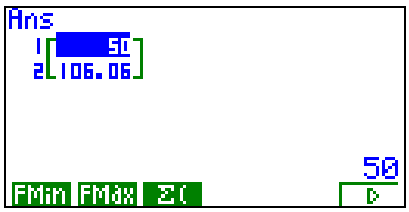
$$t'(x) = \frac{1}{V} - \frac{(100-x)}{\sqrt{(100-x)^2 + 50^2}}$$

$$t'(50) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{V} - \frac{50}{\sqrt{50^2 + 50^2}} = \frac{1}{V} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2}$$

Bei einem Wert von $V = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ muss Bettina zunächst 50m am Strand zurücklegen, bevor sie ins Wasser springt, um den Schwimmer in minimaler Zeit zu erreichen.



Zur Überprüfung mit dem Graphikrechner ersetzt du in der Formel für t(x) die Zahl 7 durch $\sqrt{2}$ und gehst wie bei der Lösung der 8. Aufgabe vor.



Beträgt die Geschwindigkeit von Bettina am Strand $\sqrt{2}$ m/s, muss sie dort 50m laufen, bevor sie ins Wasser springt, um den Schwimmer in kürzester Zeit (ca. 106,06s) zu erreichen