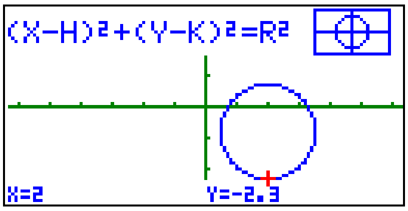
Lösung 21: Implizite Funktionen – Satelliten

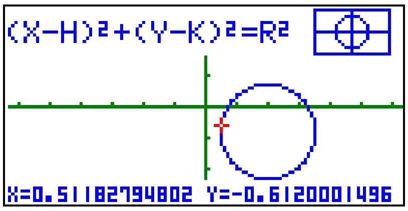
Lösungen der Aufgaben

<u>1. Aufgabe:</u>

Mit Hilfe der *Trace-Funktion* kannst du den Graphen des Kreises mit der Cursor-Taste [▶] gegen den Uhrzeigersinn und mit der Cursor-Taste [◀] mit dem Uhrzeigersinn nachführen.

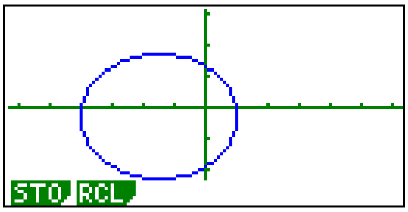


Du erhältst für $x = 2$ die Punkte (2/–2,3) und (2/0,7) sowie für $y \approx -0{,}621$ die Punkte (3,488/–0,621) und (0,512/–0,612).



<u>2. Aufgabe:</u>

Während die Graphik sichtbar ist, drückst du die Tasten [OPTN] [F1] und wählst mit [F1] den Menüpunkt STO zum Speichern. Um die Graphik als Bild 2 zu speichern, wählst du mit [F2] den Menüpunkt Pic2.



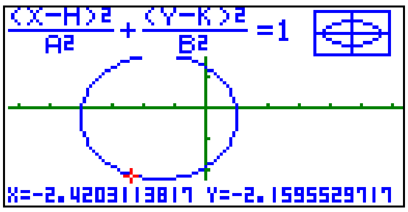
<u>3. Aufgabe*:</u>

Für den Abstand eines Punktes (x/y) vom Brennpunkt (0/–0,3) gilt: $d_1 = \sqrt{(0-x)^2 + (-0{,}3-y)^2}$

Für den Abstand eines Punktes (x/y) vom Brennpunkt (–3/–0,3) gilt: $d_2 = \sqrt{(-3-x)^2 + (-0{,}3-y)^2}$

Für den Punkt (x/y) = (–4/–0,3) ergibt sich $d_1 = 4$ und $d_2 = 1$ sowie $d_1 + d_2 = 5$.

Mit der *Trace-Funktion* ermittelst du als weiteren Ellipsenpunkt beispielsweise (–2,42/–2,16).

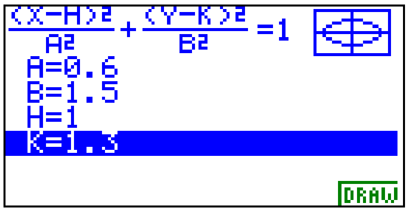


Für den Punkt (x/y) = (–2,42/–2,16) ergibt sich $d_1 \approx 3{,}05$ und $d_2 \approx 1{,}95$ sowie $d_1 + d_2 = 5$.

Die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes zu den Brennpunkten ist bei einer Ellipse stets so groß wie die zweifache Länge der großen Halbachse.

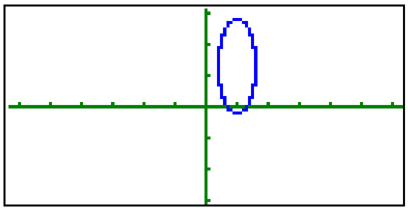
4. Aufgabe:

Mit [EXIT] kehrst du zum *Conics-Editor* für Ellipsen zurück. Dort hebst du durch dreimaliges Drücken der Cursor-Taste [▲] die erste Zeile hervor und gibst die horizontale Halbachse A = 0,6, die vertikale Halbachse B = 1,5 und die Koordinaten des Mittelpunktes (H/K) = (1/1,3) der Ellipse ein.



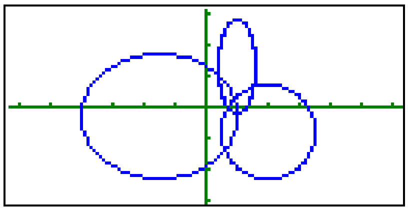
[0][.][6]	[EXE]
[1][.][5]	[EXE]
[1]	[EXE]
[1][.][3]	[EXE]

Mit [F6] lässt du die Ellipse zeichnen.



5. Aufgabe:

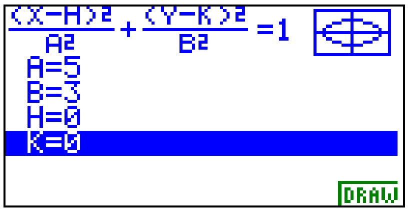
Mit den Tasten [OPTN] [F1] [F2] [F1] fügst du die als Bild 1 gespeicherte Graphik des Kreises hinzu und mit [OPTN] [F1] [F2] [F2] die als Bild 2 gespeicherte Graphik der Ellipse.



Satelliten

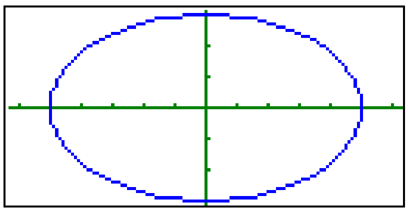
6. Aufgabe:

Im *Conics-Editor* für Ellipsen gibst du die horizontale Halbachse A = 5, die vertikale Halbachse B = 3 und die Koordinaten des Mittelpunktes (H/K) = (0/0) der Ellipse ein.



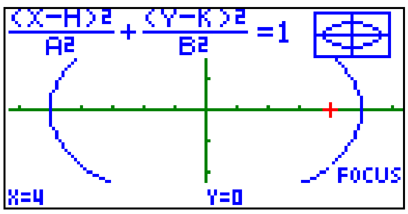
[5]	[EXE]
[3]	[EXE]
[0]	[EXE]
[0]	[EXE]

Mit [F6] lässt du die Ellipse zeichnen. Anschließend speicherst du sie mit den Tasten [OPTN] [F1] [F1] [F3] z.B. als Bild 3.



7. Aufgabe:

Mit [G-Solv]^{S} [F1] rufst du den Menüpunkt FOCS der *Graph-Solve-Funktion* auf.
Der rechte Brennpunkt, in dem sich der Erdmittelpunkt befindet, besitzt die Koordinaten (4/0).



Der Satellit besitzt am Punkt (5/0) die minimale Entfernung zum Erdmittelpunkt, sie beträgt 10000 km (im Koordinatensystem 1).

Der Satellit besitzt am Punkt (–5/0) die maximale Entfernung zum Erdmittelpunkt, sie beträgt 90000 km (im Koordinatensystem 9).

<u>8. Aufgabe:</u>

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{m_E\,\gamma}{4\pi^2} \quad\Rightarrow\quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{m_E\,\gamma} \quad\Rightarrow\quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{m_E\,\gamma}}$$

$a = 50000\text{ km} = 5\cdot 10^7\text{ m}$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (5\cdot 10^7\text{ m})^3}{5{,}977\cdot 10^{24}\text{ kg}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}}} \approx 111258\text{ s} \approx 30{,}9\text{ h}$$

Die Umlaufzeit des Satelliten beträgt ca. 30,9 Stunden.

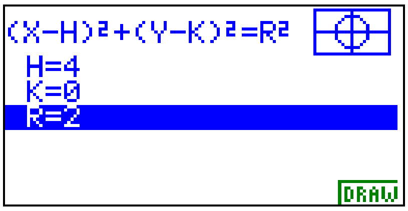
<u>9. Aufgabe*:</u>

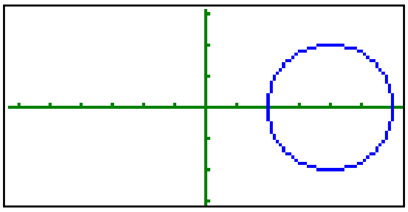
Der Radius der kreisförmigen Umlaufbahn des Satelliten besitzt im Koordinatensystem die Länge 2.

Im *Conics-Editor* für Kreise gibst du die Koordinaten des Mittelpunktes (H/K) = (4/0) und den Radius des Kreises ein.

[4]	[EXE]
[0]	[EXE]
[2]	[EXE]

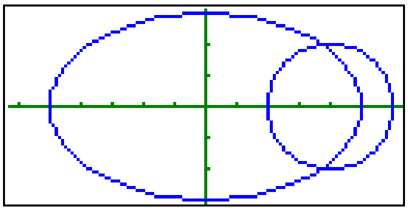
Mit [F6] lässt du den Kreis zeichnen.

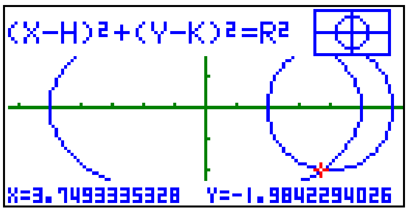




<u>10. Aufgabe*:</u>

Mit den Tasten [OPTN] [F1] [F2] [F3] fügst du die als Bild 3 gespeicherte Graphik der ellipsenförmigen Umlaufbahn des ersten Satelliten ein.
Rufst du mit der Taste [Trace]^S die *Trace- Funktion* auf, kannst du mit den Cursor-Tasten [►] bzw. [◄] den Graphen des Kreises nachführen.
Die Schnittpunkte der beiden Umlaufbahnen liegen bei (3,749/–1,984) und (3,749/1,984).





Zur analytischen Überprüfung suchst du gemeinsame Lösungen der beiden Funktionsgleichungen.

Ellipse: $\frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$ bzw. $9\,X^2 + 25\,Y^2 = 225$

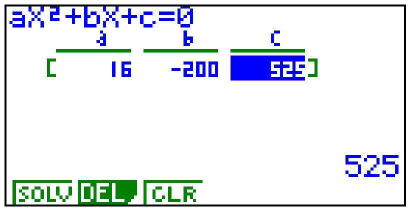
Kreis : $(X-4)^2 + Y^2 = 2^2$ bzw. $25\,(X-4)^2 + 25\,Y^2 = 100$

Die Differenz liefert die Gleichung $9X^2 - 25(X-4)^2 = 125$.

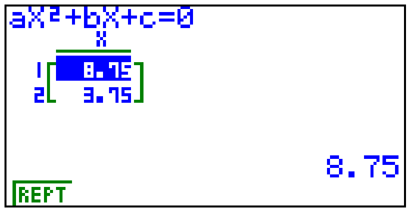
Es folgt $9X^2 - 25X^2 + 200X - 400 = 125$

und $16X^2 - 200X + 525 = 0$.

Diese Gleichung kannst du mit dem Graphikrechner lösen, indem du mit [MENU] [A]^A [F2] [F1] den *Gleichungs-Editor* für quadratische Gleichungen aufrufst.



[1][6] [EXE]
[(–)][2][0][0] [EXE]
[5][2][5] [EXE]
[F1]



$X = 8{,}75$ liefert eingesetzt in $9X^2 + 25Y^2 = 225$ keine Lösung für Y, weil $Y^2 \geq 0$ gelten muss.

Für $X = 3{,}75$ ergibt sich:

$$126{,}5625 + 25Y^2 = 225 \quad \Rightarrow$$
$$25Y^2 = 98{,}4375 \quad \Rightarrow$$
$$Y^2 = 3{,}9375 \quad \Rightarrow$$
$$Y = \pm\sqrt{3{,}9375} \approx \pm 1{,}984$$

11. Aufgabe:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{m_E\,\gamma}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad a^3 = \frac{m_E\,\gamma\,T^2}{4\pi^2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{\frac{m_E\,\gamma\,T^2}{4\pi^2}}$$

$T = 24\ \text{h} = 86400\ \text{s}$

$$a = \sqrt[3]{\frac{5{,}977\cdot 10^{24}\,\text{kg}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\,\text{s}^2}\,(86400\,\text{s})^2}{4\pi^2}} \approx 4{,}2243\cdot 10^7\ \text{m}$$

Die Umlaufdauer eines Satelliten beträgt einen Tag, wenn die große Halbachse der ellipsenförmigen Umlaufbahn ca. 42243 km lang ist.
Beim Spezialfall einer kreisförmigen Umlaufbahn stimmen die beiden Halbachsen mit dem Kreisradius überein. Der Abstand eines geostationären Satelliten vom Erdmittelpunkt beträgt also ca. 42243 km.

