

Erläuterungen und Aufgaben

Zeichenerklärung: [] - Drücke die entsprechende Taste des Graphikrechners!
 []^S - Drücke erst die Taste [SHIFT] und dann die entsprechende Taste!
 []^A - Drücke erst die Taste [ALPHA] und dann die entsprechende Taste!
 Schwere Aufgaben sind mit einem * gekennzeichnet.

Reihen zu rekursiven Folgen

Im *Hauptmenü* gelangst du mit der Taste [8] in den *Rekursions-Modus*.

Um eine Reihe $\sum_{k=1}^n a_k$ zu untersuchen, gibst du zunächst die zugehörige Folge a_n ein.

Bei rekursiven Folgen wählst du mit der Taste [F3] den Menüpunkt TYPE und anschließend [F2]. Es erscheint der *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen.

Beispiel: $a_{n+1} = -a_n \frac{n}{n+1} \quad a_1=1$

[(-)] [F4][F2] [×] [F1] [÷] [(] [F1] [+] [1] [)] [EXE]

Um n , a_n oder b_n einzugeben, musst du mit [F4] den Menüpunkt n, a_n, b_n aufrufen und dann die entsprechende Funktionstaste drücken.

```
Recursion
an+1:
bn+1:
SEL* DEL TYPE M.A.M. RANG TREL
```

```
Recursion
an+1=-an*n/(n+1)
bn+1:
n | an | bn
```

1. Aufgabe:
Berechne die ersten 5 Folgenglieder ohne Rechner und stelle sie als Brüche dar ?

Mit der Taste [F5] rufst du den Menüpunkt RANG auf und gelangst zur *Tabellenbereichsanzeige*.

Dort drückst du die Taste [F2], um die Folge mit a_1 beginnen zu lassen. (Mit [F1] würdest du a_0 als Folgenanfang wählen.)

Neben dem Folgenanfang gibst du in der *Tabellenbereichsanzeige* den Start- und Endwert ein, um festzulegen, welche Folgen- und Reihenglieder angezeigt werden sollen.

[1] [EXE]
 [5] [0] [EXE]
 [1] [EXE]

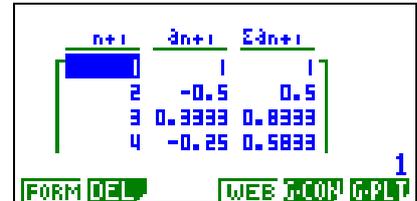
```
Table Range n+1
Start:1
End :50
a1 :1
bn :0
anStr:0
bnStr:0
a0 | a1
```

Damit neben den Folgengliedern auch die Reihenglieder berechnet werden, rufst du mit den Tasten [EXIT] [SET UP]^S das *Set up* auf und wählst mit der Taste [F1] die Einstellung Σ Display:On.



Nachdem du mit [EXIT] zum *Folgen-Editor* zurückgekehrt bist, wählst du den Menüpunkt TABL mit [F6], um die Folgen- und Reihenglieder anzeigen zu lassen.

Innerhalb einer Zeile steht links der Folgenindex n (Es ist einfacher, ihn mit n zu bezeichnen als mit n+1), in der Mitte das dazugehörige Folgenglied a_n und rechts das Reihenglied



$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k .$$

Mit der Cursor-Taste [▼] kannst du die zunächst nicht sichtbaren Zeilen der Wertetabelle ansehen. Der Inhalt des mit den Cursor-Tasten hervorgehobenen Tabellenfeldes wird noch mal genauer rechts unten im Display dargestellt.

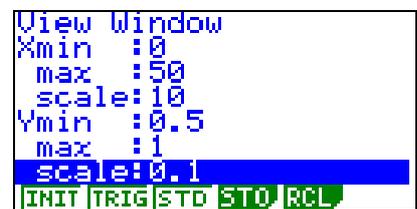
2. Aufgabe:

Bestimme die Werte von a_{50} und $\sum_{k=1}^{50} a_k$!

Graphische Darstellung von Reihen

Du rufst mit [V-Window]^S das *Betrachtungsfenster* auf, um den Bereich einzugeben, der graphisch dargestellt werden soll.

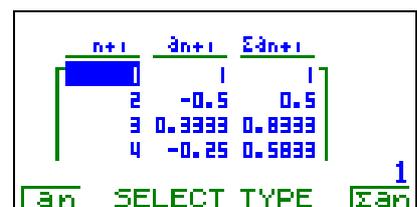
Der Index n wird auf der x-Achse aufgetragen, der Wert $\sum_{k=1}^n a_k$ der Reihenglieder auf der y-Achse.



[0]	[EXE]
[5][0]	[EXE]
[1][0]	[EXE]
[0][.][5]	[EXE]
[1]	[EXE]
[0][.][1]	[EXE]

Mit [EXIT] kehrst du zurück zum *Folgen-Editor* und mit [F6] lässt du die Folgen- und Reihenglieder erneut anzeigen.

Nun wählst du den Menüpunkt G-PLT mit [F6] und danach den Menüpunkt Σa_n ebenfalls mit [F6].



Nicht nur die Folge a_n konvergiert, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, sondern auch die

Reihe $\sum_{k=1}^n a_k$.

Um den Grenzwert genauer zu bestimmen, lässt du Reihenglieder mit größerem Index n berechnen.

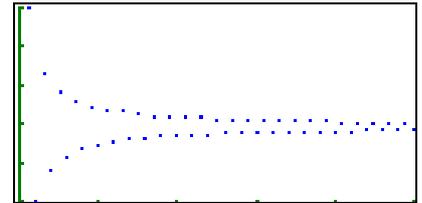
Du wechselst mit [EXIT] [EXIT] [F5] zur *Tabellenbereichsanzeige*.

```
[ 1 ][ 0 ][ 0 ][ 0 ] [EXE]
[ 1 ][ 0 ][ 0 ][ 3 ] [EXE]
```

Damit die Speicherkapazität des Rechners nicht überschritten wird, musst du auch den Startwert erhöhen.

Mit [EXIT] [F6] lässt du die Folgen- und Reihenglieder anzeigen.

Im Gegensatz zum Folgen-Editor für explizite Darstellung (vergleiche 6. Arbeitsblatt) bleibt im Folgen-Editor für einfache Rekursionen der Folgenanfang a_1 der erste Summand bei den angezeigten Reihen, auch wenn der Startwert nicht mehr 1 beträgt.



```
Table Range n+1
Start:1000
End :1003
a1 :1
b1 :0
anStr:0
bnStr:0
a0 | a1
```

n+1	an+1	Sn+1
1000	-9E-4	0.6926
1001	9.9E-4	0.6936
1002	-9E-4	0.6926
1003	9.9E-4	0.6936

1000

FORM DEL WEB G:CON G:PLT

3. Aufgabe*:

Hast du eine Vermutung, gegen welchen Grenzwert die Reihe $\sum_{k=1}^n a_k$ konvergiert ?

Verwende den natürlichen Logarithmus.

Nachdem du mit [EXIT] zum *Folgen-Editor* zurückgekehrt bist, löschst du mit [▲] [F2] [F1] die eingegebene Folge.

4. Aufgabe*:

Stelle die Folge $a_n = (\frac{1}{2})^n$ ($n = 1,2,3,\dots$) in rekursiver Form dar und gib sie im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein ! Bestimme den Grenzwert der zugehörigen Reihe und lasse diese graphisch darstellen !

5. Aufgabe*:

Berechne den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2})^k$ mit Hilfe der geometrischen Summenformel $\sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$!

Klammere $\frac{1}{2}$ aus der Summe aus.

6. Aufgabe*:

Eine Person isst von einem Kuchen zunächst die Hälfte, dann ein Viertel, ein Achtel usw., also jedes Mal die Hälfte der Menge, die sie zuvor gegessen hat. Wann hat sie den ganzen Kuchen aufgegessen, vorausgesetzt der Kuchen lässt sich in beliebig kleine Teile teilen ?

Alkoholentzug

Da Anton und Berta jeden Tag 5 Flaschen Bier trinken, hat ihr Arzt sie aufgefordert, ihren Alkoholkonsum so schnell wie möglich einzustellen. Leider sind die beiden nicht in der Lage, ganz auf Alkohol zu verzichten. Deshalb beschließen sie, die tägliche Menge Alkohol schrittweise zu reduzieren.

Anton trinkt am 1. Tag $a_1 = 5$ Flaschen Bier, jeden weiteren Tag nur noch 90% der Menge des Vortages, am 2. Tag also $a_2 = 0,9 \cdot a_1 = 4,5$ Flaschen, am 3. Tag $a_3 = 0,9 \cdot a_2$ usw.. Bleibt ein Rest in einer Flasche übrig, stellt er sie in den Kühlschrank und verwendet sie am nächsten Tag wieder.

Berta möchte ihren Alkoholkonsum noch schneller reduzieren. Die Anzahl der Flaschen, die sie am Tag trinkt, beträgt immer die Wurzel aus der Anzahl der Flaschen des Vortages. Am 1. Tag trinkt sie $b_1 = 5$ Flaschen Bier, am 2. Tag nur noch $b_2 = \sqrt{b_1} = \sqrt{5}$ Flaschen, am 3. Tag $b_3 = \sqrt{b_2}$ usw..

7. Aufgabe:

Stelle die Folgen a_n und b_n , welche die Anzahl der Flaschen Bier angeben, die Anton und Berta jeweils am n-ten Tag trinken, in rekursiver Form dar und gib sie im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein !

8. Aufgabe:

Wie viele Flaschen Bier trinken Anton und Berta am 5. Tag, wie viele am 50. Tag ? Wie viele Flaschen Bier trinken Anton und Berta in den ersten 5 Tagen, wie viele in den ersten 50 Tagen ?

9. Aufgabe:

Lasse die Reihen $\sum_{k=1}^n a_k$ und $\sum_{k=1}^n b_k$, welche angeben, wie viele Flaschen Bier Anton und Berta in den ersten n Tagen trinken, graphisch darstellen !

10. Aufgabe*:

Wie viele Flaschen Bier trinken Anton und Berta in den ersten 100 Tagen, wie viele in den ersten 300 Tagen ?

Was kannst du über die Grenzwerte der Folgen a_n und b_n und der Reihen

$\sum_{k=1}^n a_k$ und $\sum_{k=1}^n b_k$ aussagen ?

11. Aufgabe*:

Gib explizite Darstellungen für die Folgen a_n und b_n an und berechne damit a_5 und b_5 !

12. Aufgabe*:

Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ mit Hilfe der geometrischen Summenformel !