Lösungen der Aufgaben

1. Aufgabe:

$$a_1 = 1$$

n=1: $a_2 = -a_1 \cdot \frac{1}{2} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

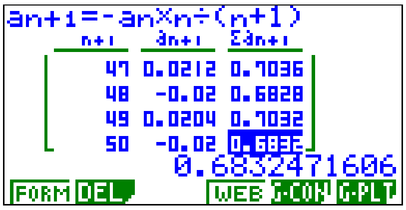
n=2: $a_3 = -a_2 \cdot \frac{2}{3} = -(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

n=3: $a_4 = -a_3 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

n=4: $a_5 = -a_4 \cdot \frac{4}{5} = -(-\frac{1}{4}) \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

2. Aufgabe:

Mit Hilfe der Cursor-Taste [▼] gelangst du zu der untersten Zeile der Wertetabelle. Mit den Cursor-Tasten [▶] bzw. [◀] kannst du die Spalten wählen, in der ein Tabellenfeld hervorgehoben wird.



$a_{50} = -0{,}02 = -\frac{1}{50}$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{50} a_k \approx 0{,}6832$

3. Aufgabe*:

Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergiert gegen den Grenzwert $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2$$

4. Aufgabe*:

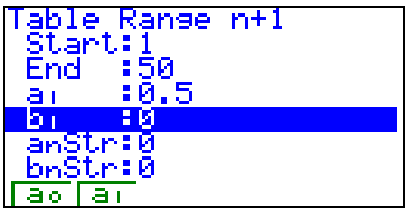
Für die Folge $a_n = (\frac{1}{2})^n$ gilt in rekursiver Darstellung:

$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \qquad a_1 = \frac{1}{2}$

Du gibst sie im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein.

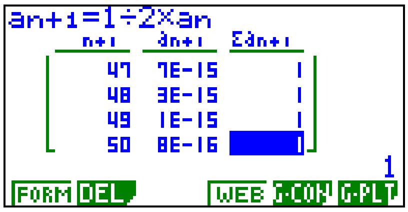
[1] [÷] [2] [×] [F4][F2] [EXE]

Um zur *Tabellenbereichsanzeige* zu gelangen, rufst du mit der Taste [F5] den Menüpunkt RANG auf.



[1]	[EXE]
[5][0]	[EXE]
[1][÷][2]	[EXE]

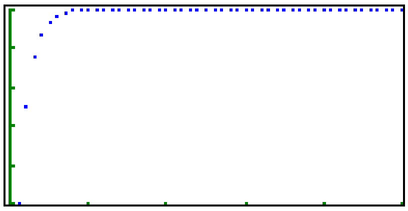
Mit [EXIT] [F6] lässt du die Folgen- und Reihenglieder anzeigen.



Mit Hilfe der Cursor-Tasten kannst du dir die Folgen- und Reihenglieder mit größerem Index anzeigen lassen.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^k$ konvergiert gegen den Grenzwert 1.

Die Werte der Reihenglieder sind aber stets kleiner als 1, auch wenn der Rechner sie näherungsweise auf 1 aufrundet.



Behältst du die Einstellungen im *Betrachtungsfenster* bei, erhältst du nach Drücken der Tasten [F6] [F6] die rechts abgebildete graphische Darstellung der Reihenglieder.

5. Aufgabe*:

$$\sum_{k=1}^{n}(\tfrac{1}{2})^k = \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\tfrac{1}{2})^{k-1} = \tfrac{1}{2}\,\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-(\tfrac{1}{2})^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\tfrac{1}{2})^k = \lim_{n\to\infty} 1-(\tfrac{1}{2})^n = 1-\lim_{n\to\infty}(\tfrac{1}{2})^n = 1-0 = 1$$

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+\ldots = 1$$

6. Aufgabe*:

Die Person isst jeweils die Hälfte von der noch vorhandenen Kuchenmenge, die andere Hälfte lässt sie übrig. Somit hat die Person niemals den ganzen Kuchen aufgegessen, da stets ein Rest übrig bleibt, auch wenn der Rest beliebig klein wird.
Wie du in der 4. und 5. Aufgabe gesehen hast, nähert sich die gegessene Menge an Kuchen von unten der Zahl 1, erreicht sie aber niemals, auch wenn immer wieder Kuchen gegessen wird.

Alkoholentzug

7. Aufgabe:

Für die Folgen a_n und b_n , welche die Anzahl der Flaschen Bier angeben, die Anton und Berta jeweils am n-ten Tag trinken, gilt:

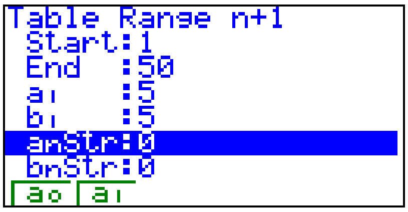
Anton:	$a_{n+1} = 0{,}9\cdot a_n$	$a_1 = 5$
Berta:	$b_{n+1} = \sqrt{b_n}$	$b_1 = 5$

Du gibst sie im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein.

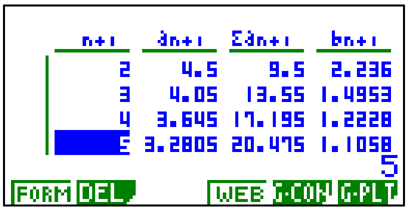
[0][.][9] [F4][F2] [EXE]
[$\sqrt{\ }$]^S [F4][F3] [EXE]

8. Aufgabe:

In der *Tabellenbereichsanzeige* wählst du als Startwert 1 und als Endwert beispielsweise 50 ein. Ferner gibst du die Folgenanfänge $a_1 = 5$ sowie $b_1 = 5$ ein.



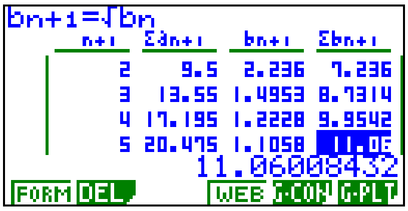
Bei der Wertetabelle kannst du mit der Cursor-Taste [▶] die zunächst nicht sichtbare Spalte mit den Reihengliedern $\sum_{k=1}^{n} b_k$ ansehen.



Anton trinkt am 5. Tag $a_5 \approx 3{,}28$ Flaschen, Berta $b_5 \approx 1{,}106$.

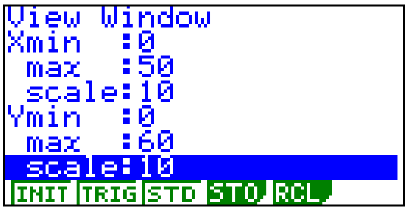
Anton trinkt am 50. Tag $a_{50} \approx 0{,}0286$ Flaschen, Berta $b_{50} \approx 1$.

Anton trinkt in den ersten 5 Tagen $\sum_{k=1}^{5} a_k \approx 20{,}5$ Flaschen, Berta $\sum_{k=1}^{5} b_k \approx 11{,}1$. Anton trinkt in den ersten 50 Tagen $\sum_{k=1}^{50} a_k \approx 49{,}74$ Flaschen, Berta $\sum_{k=1}^{50} b_k \approx 56{,}16$.

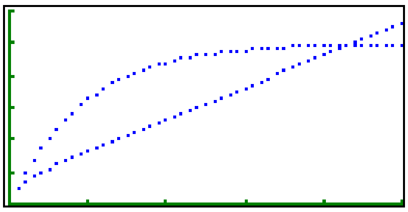


9. Aufgabe:

Im *Betrachtungsfenster* wählst du beispielsweise die rechts angegebenen Einstellungen.



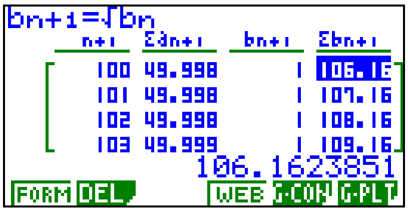
Mit den Tasten [EXIT] [F6] lässt du die Folgen- und Reihenglieder in einer Wertetabelle anzeigen, bevor du mit [F6] [F6] die Reihenglieder graphisch darstellen lassen kannst.



10. Aufgabe*:

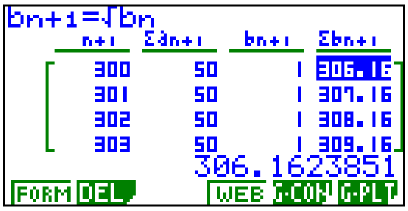
Als Start- und Endwert wählst du in der *Tabellenbereichsanzeige* beispielsweise 100 und 103 bzw. 300 und 303.

Die Speicherkapazität des Rechners wird überschritten, falls du den Startwert bei 1 belässt.



Anton trinkt in den ersten 100 Tagen $\sum_{k=1}^{100} a_k \approx 50$ Flaschen, in den ersten 300 Tagen $\sum_{k=1}^{300} a_k \approx 50$.

Berta trinkt in den ersten 100 Tagen $\sum_{k=1}^{100} b_k \approx 106{,}16$ Flaschen, in den ersten 300 Tagen $\sum_{k=1}^{300} b_k \approx 306{,}16$



a_n konvergiert gegen 0, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ gegen 50.

Die Mengen, die Anton jeden Tag trinkt werden so klein, dass er insgesamt die Anzahl von 50 Flaschen nie ganz erreicht.

b_n konvergiert gegen 1, die Folgenglieder sind aber stets größer als 1.
$\sum_{k=1}^{n} b_k$ konvergiert nicht, da die Anzahl der Flaschen, die Berta insgesamt trinkt, jeden Tag um mindestens 1 steigt.

11. Aufgabe*:

$a_1 = 5$
$a_2 = 0{,}9 \cdot a_1 = 0{,}9 \cdot 5$
$a_3 = 0{,}9 \cdot a_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 5 = 0{,}9^2 \cdot 5$
$a_4 = 0{,}9 \cdot a_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}9^2 \cdot 5 = 0{,}9^3 \cdot 5$
$a_n = 0{,}9^{\,n-1} \cdot 5$ $\qquad$ $a_5 = 0{,}9^{\,4} \cdot 5 \approx 3{,}28$

$b_1 = 5$
$b_2 = \sqrt{b_1} = b_1^{\,0{,}5} = 5^{\,0{,}5}$
$b_3 = \sqrt{b_2} = b_2^{\,0{,}5} = (5^{0{,}5})^{0{,}5} = 5^{(0{,}5^2)}$
$b_4 = \sqrt{b_3} = b_3^{\,0{,}5} = (5^{(0{,}5)^2})^{0{,}5} = 5^{(0{,}5^3)}$
$b_n = 5^{(0{,}5^{n-1})}$ $\qquad$ $b_5 = 5^{(0{,}5^4)} \approx 1{,}106$

12. Aufgabe*:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (0{,}9^{k-1} \cdot 5) = 5 \sum_{k=1}^{n} 0{,}9^{k-1} = 5 \cdot \frac{1-0{,}9^n}{1-0{,}9} = 50 \cdot (1-0{,}9^n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} 50 \cdot (1-0{,}9^n) = 50 \cdot (1 - \lim_{n\to\infty} 0{,}9^n) = 50 \cdot (1-0) = 50$$