

Erläuterungen und Aufgaben

Zeichenerklärung: [] - Drücke die entsprechende Taste des Graphikrechners!
 []^S - Drücke erst die Taste [SHIFT] und dann die entsprechende Taste!
 []^A - Drücke erst die Taste [ALPHA] und dann die entsprechende Taste!
 Schwere Aufgaben sind mit einem * gekennzeichnet.

Gekoppelte Folgen

Mit dem Graphikrechner kannst du zwei rekursive Folgen untersuchen, die sich gegenseitig beeinflussen, indem das Folgenglied a_{n+1} von b_n abhängt und das Folgenglied b_{n+1} von a_n .

Im *Hauptmenü* gelangst du mit der Taste [8] in den *Rekursions-Modus*.

Um Folgen in rekursiver Form einzugeben, wählst du mit der Taste [F3] den Menüpunkt TYPE und anschließend [F2].

Es erscheint der *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen.

```
Recursion
an+1:
bn+1:

[SEL] [C] [DEL] [TYPE] [N] [M] [RANG] [TABL]
```

Beispiel: $a_{n+1} = a_n + b_n$ $a_0 = 1$
 $b_{n+1} = \frac{1}{a_n + b_n}$ $b_0 = 1$

```
Recursion
an+1: an+bn
bn+1: 1/(an+bn)

[SEL] [C] [DEL] [TYPE] [N] [M] [RANG] [TABL]
```

[F4][F2] [+] [F3] [EXE]
 [1] [÷] [(] [F4][F2] [+] [F3] [)] [EXE]

Um n , a_n oder b_n einzugeben, musst du mit [F4] den Menüpunkt n, a_n, b_n aufrufen und dann die entsprechende Funktionstaste drücken.

Mit der Taste [F5] rufst du den Menüpunkt RANG auf und gelangst zur *Tabellenbereichsanzeige*.

Dort drückst du die Taste [F1], um die Folgen mit a_0 bzw. b_0 beginnen zu lassen. Neben den Folgenanfängen gibst du in der *Tabellenbereichsanzeige* den Start- und Endwert ein, um festzulegen, welche Folgenglieder angezeigt werden sollen.

```
Table Range n+1
Start: 0
End : 50
a0 : 1
b0 : 1
anStr: 0
bnStr: 0
[a0] [a1]
```

[0] [EXE]
 [5] [0] [EXE]
 [1] [EXE]
 [1] [EXE]

Nachdem du mit [EXIT] zum *Folgen-Editor* zurückgekehrt bist, wählst du den Menüpunkt TABL mit [F6], um die Folgenglieder in einer Wertetabelle anzeigen zu lassen.

```

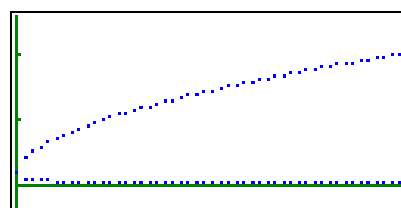
      n+1   an+1   bn+1
  +-----+-----+-----+
  | 1 | 1 | 1 |
  | 2 | 2 | 0.5 |
  | 3 | 2.5 | 0.4 |
  | 4 | 2.9 | 0.3448 |
  +-----+-----+-----+
  [FORM] [DEL] [WEB] [G-CON] [G-PLT]
```

Mit der Cursor-Taste [▼] kannst du die zunächst nicht sichtbaren Zeilen der Wertetabelle ansehen. Der Inhalt des mit den Cursor-Tasten hervorgehobenen Tabellenfeldes wird noch mal genauer rechts unten im Display dargestellt.

Mit der Taste [V-Window]^S gelangst du zum *Betrachtungsfenster*, um die Einstellungen für eine graphische Darstellung der Folgenglieder vorzunehmen.

[0]	[EXE]
[5][0]	[EXE]
[1][0]	[EXE]
[(-)][2]	[EXE]
[1][3]	[EXE]
[5]	[EXE]

```
View Window
Xmin : 0
max : 50
scale: 10
Ymin : -2
max : 13
scale: 5
INIT|TRIG|STD|STO|RCL
```



Mit [EXIT] [F6] musst du die Wertetabelle erneut anzeigen lassen, um für die graphische Darstellung den Menüpunkt G·PLT mit [F6] aufrufen zu können.

1. Aufgabe:

Verkleinere im *Betrachtungsfenster* den darzustellenden y-Bereich und lasse eine graphische Darstellung erstellen, bei der der Verlauf der Folgenglieder b_n besser zu erkennen ist !

2. Aufgabe:

Zeige, dass für alle Folgenglieder $b_n = \frac{1}{a_n}$ gilt !

3. Aufgabe*:

Begründe, warum alle Folgenglieder a_n und b_n positiv sind, und zeige die strenge Monotonie beider Folgen !

4. Aufgabe*:

Nimm an, dass die Folge a_n gegen eine reelle Zahl a konvergiert und führe dies mit Hilfe der Grenzwertsätze auf einen Widerspruch ! Konvergiert die Folge b_n ?

Übertragung einer Wertetabelle in Listen

Im *Statistik-Modus* ist es möglich, die Folgenglieder b_n in Abhängigkeit der Folgenglieder a_n darstellen zu lassen. Dazu musst du die beiden Spalten der Wertetabelle mit den Folgengliedern in Listen des *Statistik-Editors* übertragen.

Mit [EXIT] kannst du vom *Graphikbildschirm* zur der Wertetabelle zurückkehren, in der du mit den Cursor-Tasten die 2. Spalte mit den Folgengliedern a_n hervorhebst.

Nun rufst du mit den Tasten [OPTN] [F1] das *Listendaten-Manipulations-Menü* auf und anschließend mit [F2] den Menüpunkt LMEM. Mit [F1] speicherst du die Folgenglieder a_n in Liste 1.

Analog speicherst du mit [▶] [F2] [F2] die Folgenglieder b_n in Liste 2.

Wechselst du nun mit den Tasten [MENU] [2] in den *Statistik-Modus*, erscheinen die Folgenglieder a_n in Liste 1, die Folgenglieder b_n in Liste 2.

Du wählst mit [F1] den Menüpunkt GRPH und mit [F6] den Menüpunkt SET, um einzustellen, was die graphische Darstellung beinhalten soll.

Verwendet werden soll die rechts abgebildete Standardeinstellung. Es wird dann ein Streudiagramm gezeichnet, in dem die Folgenglieder b_n der Liste 2 auf der y-Achse über den Folgengliedern a_n der Liste 1 auf der x-Achse aufgetragen werden.

Entspricht die Einstellung nicht der Standardeinstellung, wählst du diese mit den Cursor- und Funktionstasten.

Nach Drücken der Taste [EXIT] lässt du das Streudiagramm zeichnen, indem du den Menüpunkt GPH1 mit [F1] aufrufst

$$a_{n+1} = a_n + b_n$$

$n+1$	a_{n+1}	b_{n+1}
0	0	1
1	2	0.5
2	2.5	0.4
3	2.9	0.3448

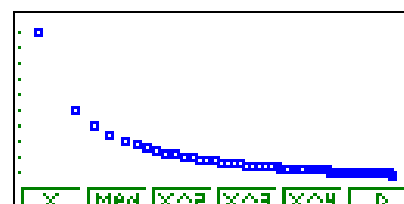
List LMEM Dim Fill Seq 1

List 1	List 2	List 3	List 4
1	1		
2	0.5		
3	0.4		
4	0.3448		
5	0.3081		

GRAPH CALC TEST INTX DIST 1

```

StatGraph1
Graph Type : Scatter
XList      : List1
YList      : List2
Frequency  : 1
Mark Type  : 
Graph Color : Blue
GPH1 GPH2 GPH3
    
```



5. Aufgabe:

Wie nennt man die Kurve, auf der die Datenpunkte liegen ?

Fische

In einem See leben zwei Arten von Fischen, Beutefische und Raubfische. Die Beutefische ernähren sich nur von Algen, von denen genügend vorhanden sind, die Raubfische ernähren sich ausschließlich von den Beutefischen.

Wenn das System keinen äußeren Einflüssen unterliegt, lässt es sich näherungsweise durch folgendes mathematisches Modell beschreiben.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + A \cdot a_n - C \cdot a_n \cdot b_n \\ b_{n+1} &= b_n - B \cdot b_n + D \cdot a_n \cdot b_n\end{aligned}$$

a_n : Anzahl der Beutefische nach n Monaten

b_n : Anzahl der Raubfische nach n Monaten

A , B , C und D sind positive Konstanten, die durch die speziellen Eigenschaften des Systems vorgegeben sind.

Der Term $A \cdot a_n$ gibt den Anstieg der Beutefischpopulation an, der durch Vermehrung entsteht.

Der Term $C \cdot a_n \cdot b_n$ steht für die Anzahl der Beutefische, die von den Raubfischen gefressen werden. Sie ist proportional zur Anzahl der Raubfische.

Der Term $B \cdot b_n$ gibt die Reduzierung der Raubfischpopulation bei Nahrungsknappheit an.

Der Reduzierung entgegen wirkt bei Vorhandensein von Nahrung der Term $D \cdot a_n \cdot b_n$, welcher proportional zur Anzahl der Beutefische ist.

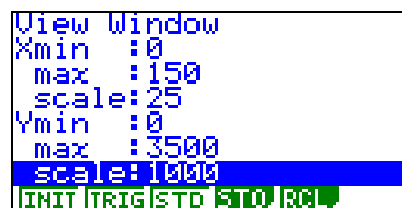
6. Aufgabe:

Wähle für die Konstanten die Werte $A=B=0,1$ sowie $C=D=0,0001$ und gib die Rekursionsgleichungen im *Folgen-Editor* für einfache Rekursionen ein !

7. Aufgabe:

Untersuche die Populationsentwicklung in den ersten 150 Monaten, wenn zu Beginn im See $a_0=500$ Beutefische und $b_0=500$ Raubfische vorhanden sind !

Lasse die Folgen graphisch darstellen, indem du im *Betrachtungsfenster* die rechts abgebildete Einstellung wählst !



8. Aufgabe*:

Welche quantitative Bedingung muss für die Anzahl der Raubfische gelten, damit die Anzahl der Beutefische steigt bzw. sinkt ?

Welche quantitative Bedingung muss für die Anzahl der Beutefische gelten, damit die Anzahl der Raubfische steigt bzw. sinkt ?

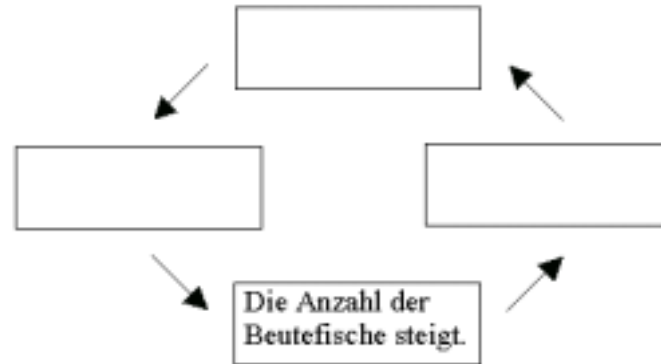
9. Aufgabe:

Bearbeite die 7. Aufgabe für die Startwerte $a_0=800$ und $b_0=800$!

10. Aufgabe:

Übertrage die Anzahlen der Beutefische aus der Wertetabelle in Liste 1, die der Raubfische in Liste 2 und lasse ein Streuungsdiagramm erstellen, bei dem zu sehen ist, wie die Anzahlen der Raubfische von denen der Beutefische abhängen !

11. Aufgabe:



Trage die folgenden drei Ereignisse in sinnvoller Weise in die freien Textfelder ein und begründe die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse !

- Die Anzahl der Beutefische sinkt.
- Die Anzahl der Raubfische sinkt.
- Die Anzahl der Raubfische steigt.

12. Aufgabe:

Wie entwickeln sich die Populationen, wenn zu Beginn 1000 Beutefische und 1000 Raubfische im See vorhanden sind ?