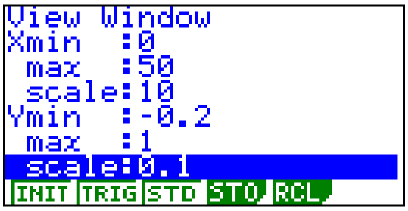
Lösungen der Aufgaben

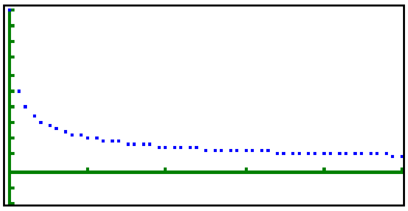
1. Aufgabe:

Du rufst mit der Taste [V-Window][S] das *Betrachtungsfenster* auf und wählst beispielsweise die rechts abgebildete Einstellung.



[▼]
[▼]
[▼]
[(–)][0][.][2] [EXE]
[1] [EXE]
[0][.][1] [EXE]

Mit [EXIT] [F6] musst du erst die Wertetabelle anzeigen lassen, bevor du den Menüpunkt G·PLT mit [F6] aufrufst.



2. Aufgabe:

Nach den Rekursionsgleichungen gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_n + b_n} = \frac{1}{a_{n+1}}$$

Folglich gilt $b_n = \frac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $b_0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{a_0}$ gilt die Beziehung $b_n = \frac{1}{a_n}$ für alle Folgenglieder.

3. Aufgabe*:

Sind die Folgenglieder a_n und b_n positiv, so sind auch die nachfolgenden Folgenglieder a_{n+1} und b_{n+1} positiv, wie aus den Rekursionsgleichungen zu sehen ist.
Da a_0 und b_0 positiv sind, folgt nun schrittweise, dass alle Folgenglieder positiv sind. (Prinzip der vollständigen Induktion)

Monotonie:

$$a_{n+1} - a_n = b_n > 0$$

Die Folge a_n ist streng monoton steigend.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} < 0 \quad \text{wegen} \quad a_{n+1} > a_n$$

Die Folge b_n ist streng monoton fallend.

4. Aufgabe*:

Annahme: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Weil die Folge a_n streng monoton steigend ist und alle Folgenglieder positiv sind, gilt $a \neq 0$.

Nach den Grenzwertsätzen folgt dann:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \quad \Rightarrow \quad a = a + \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{a}$$

Da die Annahme zu einer falschen Aussage führt, ist das Gegenteil der Annahme richtig.
Die Folge a_n konvergiert also nicht, sie wächst unbeschränkt.

Da die Folge b_n streng monoton fallend ist und alle Folgenglieder positiv sind, ist sie beschränkt und konvergiert. Ihr Grenzwert beträgt 0.

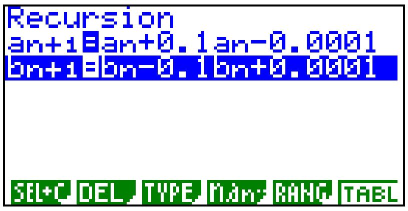
5. Aufgabe:

Wegen $b_n = \frac{1}{a_n}$ liegen die Datenpunkte auf einer Hyperbel.

Fische

6. Aufgabe:

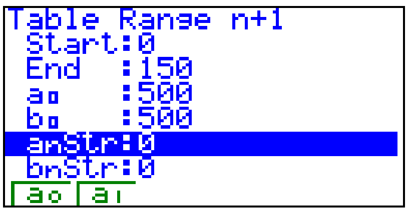
Mit den Tasten [MENU] [8] gelangst du in den *Graphik-Modus* zum *Graphik-Editor* für einfache Rekursionen.



[F4][F2] [+] [0][.][1] [F2] [–] [0][.][0][0][0][1]
[F2] [F3] [EXE]
[F4][F3] [–] [0][.][1] [F3] [+] [0][.][0][0][0][1]
[F2][F3] [EXE]

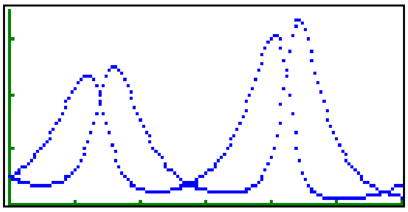
7. Aufgabe:

Mit der Taste [F5] rufst du den Menüpunkt RANG auf und gelangst zur *Tabellenbereichsanzeige*.



[0] [EXE]
[1][5][0] [EXE]
[5][0][0] [EXE]
[5][0][0] [EXE]

Mit [EXIT] [V-Window]^{S} gelangst du zum *Betrachtungsfenster* und wählst dort die angegebene Einstellung.



Nachdem du mit [EXIT] zum *Folgen-Editor* zurückgekehrt bist, lässt du mit [F6] die Wertetabelle erstellen.

Um die graphische Darstellung zu erhalten, rufst du mit der Taste [F6] den Menüpunkt G·PLT auf.

8. Aufgabe*:

$a_{n+1} = a_n + A \cdot a_n - C \cdot a_n \cdot b_n > a_n \quad \Leftrightarrow$

$A \cdot a_n > C \cdot a_n \cdot b_n \quad \Leftrightarrow \quad b_n < \frac{A}{C} = \frac{0{,}1}{0{,}0001} = 1000$

Die Anzahl der Beutefische steigt genau dann, wenn die Anzahl der Raubfische kleiner ist als 1000. Sind mehr als 1000 Raubfische im See vorhanden, sinkt die Anzahl der Beutefische.

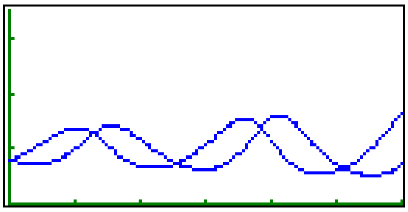
$b_{n+1} = b_n - B \cdot b_n + D \cdot a_n \cdot b_n > b_n \quad \Leftrightarrow$

$D \cdot a_n \cdot b_n > B \cdot b_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n > \frac{B}{D} = \frac{0{,}1}{0{,}0001} = 1000$

Die Anzahl der Raubfische steigt genau dann, wenn die Anzahl der Beutefische größer ist als 1000. Sind weniger als 1000 Beutefische im See vorhanden, sinkt die Anzahl der Raubfische.

9. Aufgabe:

In der *Tabellenbereichsanzeige* wählst du die Folgenanfänge $a_0 = b_0 = 800$.

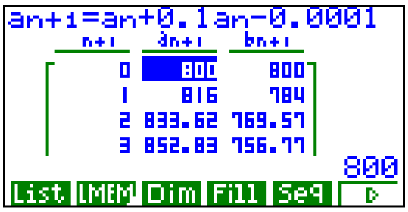


Analog zur 7. Aufgabe kannst du eine graphische Darstellung erstellen lassen.

Je näher die Anfangszahlen bei 1000 liegen, desto geringer sind die Schwankungen bei den Populationen.

10. Aufgabe:

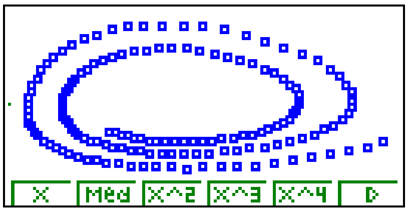
In der Wertetabelle hebst du mit den Cursor-Tasten die 2. Spalte mit den Beutefischanzahlen hervor und rufst mit [OPTN] [F1] das *Listendaten-Manipulations-Menü* auf.



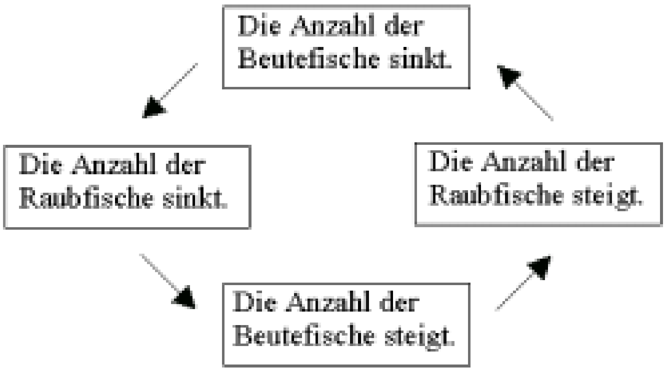
Mit [F2] [F1] speicherst du die Beutefischanzahlen a_n in Liste 1. Anschließend speicherst du mit [▶] [F2] [F2] die Raubfischanzahlen b_n in Liste 2.

Lösung 25: Gekoppelte Folgen – Fische

Nachdem du mit den Tasten [MENU] [2] in den *Statistik-Modus* gewechselt bist, rufst du mit [F1] den Menüpunkt GRPH und ebenfalls mit [F1] Menüpunkt GPH1 auf.



<u>11. Aufgabe:</u>



Wenn die Anzahl der Beutefische steigt, finden die Raubfische mehr Nahrung, so dass auch deren Anzahl steigt. Dadurch werden aber mehr Beutefische gefressen. Sinkt nun die Anzahl der Beutefische, finden die Raubfische weniger Nahrung und ihre Anzahl verringert sich ebenfalls. Dadurch können sich die Beutefische wieder ungestört vermehren und der Kreislauf beginnt von vorne.

<u>12. Aufgabe:</u>

Wenn sich zu Beginn 1000 Beutefische und 1000 Raubfische im See befinden, bleiben die Populationen konstant.