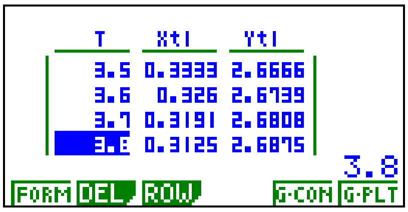
Lösung 28: Wertetabellen parametrischer Funktionen – Cast away

Lösungen der Aufgaben

1. Aufgabe:



Wenn die Wertetabelle angezeigt ist, kannst du mit der Cursor-Taste [▼] die zunächst nicht sichtbaren Zeilen ansehen.

$x_1(3{,}8) = 0{,}3125 \qquad y_1(3{,}8) = 2{,}6875$

2. Aufgabe:

$x_1(T) = \frac{3}{2T+2} \quad \Rightarrow \quad 2T+2 = \frac{3}{x_1} \quad \Rightarrow \quad T+1 = \frac{1{,}5}{x_1}$

$\Rightarrow \quad T = \frac{1{,}5}{x_1} - 1$

Durch Einsetzung folgt :

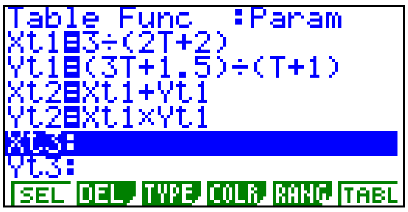
$$y_1 = \frac{3T+1{,}5}{T+1} = \frac{3\left(\frac{1{,}5}{x_1}-1\right)+1{,}5}{\frac{1{,}5}{x_1}} = \frac{x_1\left(\frac{4{,}5}{x_1}-3+1{,}5\right)}{1{,}5} = \frac{4{,}5-1{,}5x_1}{1{,}5} = 3 - x_1$$

3. Aufgabe*:

$$\lim_{T\to\infty} y_1(T) = \lim_{T\to\infty} \frac{3T+1{,}5}{T+1} = \lim_{T\to\infty} \frac{3+\frac{1{,}5}{T}}{1+\frac{1}{T}} = \frac{\lim\limits_{T\to\infty} 3 + \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1{,}5}{T}}{\lim\limits_{T\to\infty} 1 + \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}} = \frac{3-0}{1-0} = 3$$

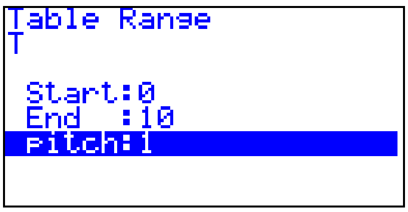
$$\lim_{T\to\infty} x_1(T) = \lim_{T\to\infty} (3 - y_1(T)) = \lim_{T\to\infty} 3 - \lim_{T\to\infty} y_1(T) = 3 - 3 = 0$$

4. Aufgabe*:



Im *Tabellen-Editor* hebst du mit den Cursor-Tasten die 4.Zeile hervor gibst die y-Koordinate der zweiten parametrischen Funktion ein.

[VARS] [F4] [F3] [1] [×] [VARS] [F4] [F4] [1] [EXE]



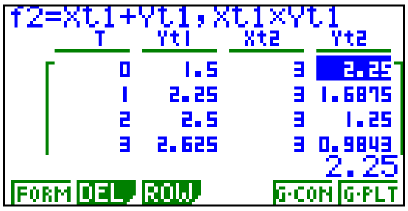
Anschießend rufst du mit der Taste [F5] den Menüpunkt RANG auf und gelangst zur *Tabellenbereichsanzeige*.

[0]	[EXE]
[1][0]	[EXE]
[1]	[EXE]

Nachdem du mit [EXIT] zum *Tabellen-Editor* zurückgekehrt bist, wählst du den Menüpunkt TABL mit [F6], um die Wertetabelle erstellen zu lassen. Mit der Cursor-Taste [►] kannst du die zunächst nicht sichtbare Spalte ansehen.

Lösung 28: Wertetabellen parametrischer Funktionen – Cast away

Das Produkt der x- und y-Koordinate der ersten parametrischen Funktion ist für ganzzahlige T-Werte zwischen 0 und 10 bei T = 0 maximal.

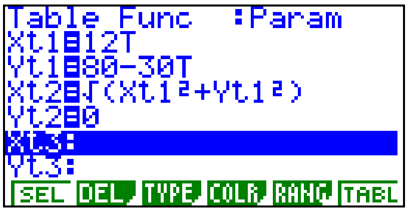


$$x_1(0)\cdot y_1(0) = 2{,}25$$

Cast away

5. Aufgabe:

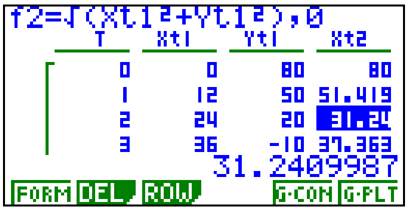
Im *Tabellen-Editor* hebst du mit den Cursor-Tasten die 1.Zeile hervor und gibst die parametrischen Funktionen ein.



[1][2] [X,θ,T] [EXE]
[8][0] [–] [3][0] [X,θ,T] [EXE]
[$\sqrt{\ }$]^S [( ] [VARS] [F4] [F3] [1] [x^2] [+] [F4] [1] [x^2] [ )] [EXE]
[0] [EXE]

6. Aufgabe:

Mit der Taste [F5] gelangst du zur *Tabellenbereichsanzeige* und gibst als Startwert 0 und als Endwert beispielsweise 5 ein sowie die Schrittweite 1.
Nachdem du mit [EXIT] zum *Tabellen-Editor* zurückgekehrt bist, lässt du mit [F6] eine Wertetabelle erstellen.

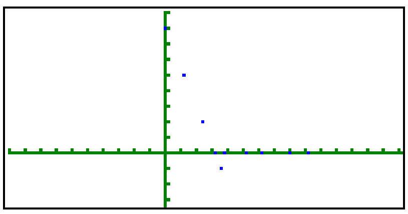


Der kleinste Abstand des Schiffes von Carsten zu den Zeiten, bei denen er eine Notsignalrakete abschießt, beträgt ca. 31,24 km bei T = 2. Da seine Notsignale nur in einem Umkreis von 30 km zu sehen sind, wird er von diesem Schiff nicht gerettet.

7. Aufgabe:

Mit [V-Window]^S gelangst du zum *Betrachtungsfenster* und gibst dort die angegebene Einstellung ein.

[(–)][1][0][0] [EXE]
[1][5][2] [EXE]
[1][0] [EXE]
[(–)][3][4] [EXE]
[9][0] [EXE]
[1][0] [EXE]



Mit [EXIT] [F6] musst du die Wertetabelle erneut anzeigen lassen, um für die graphische Darstellung den Menüpunkt G·PLT mit [F6] aufrufen zu können.

8. Aufgabe:

Die vektorielle Parametergleichung für die Gerade g, auf der sich das Schiff bewegt, ergibt sich direkt aus den Funktionsgleichungen der parametrischen Funktion.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x(T) \\ y(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12T \\ 80-30T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 12 \\ -30 \end{pmatrix}$$

9. Aufgabe*:

$$h: \quad \vec{x} = \vec{a} + r\cdot\vec{m} \qquad r\in\mathbb{R}$$

Da die Gerade h den Ursprung (0/0) enthält, lässt sich als Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verwenden.

Wegen der Orthogonalität von h zu g gilt für den Richtungsvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ -30 \end{pmatrix} = 12\cdot m_x - 30\cdot m_y = 0$$

Als Lösung erhältst du beispielsweise $m_x = 5$ und $m_y = 2$ und damit den zu $\begin{pmatrix} 12 \\ -30 \end{pmatrix}$ orthogonalen Richtungsvektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

10. Aufgabe*:

Der Schnittpunkt der Geraden g und h ergibt sich durch Gleichsetzen der vektoriellen Parametergleichungen.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 80 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 12 \\ -30 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 12\cdot T = 5\cdot r \\ \text{II:} & 80 - 30\cdot T = 2\cdot r \end{array}$$

$$2{,}5\cdot \text{II} - \text{I:} \quad 200 - 87\cdot T = 0 \quad \text{bzw.} \quad 200 = 87\cdot T$$

Es folgt $T = \frac{200}{87} \approx 2{,}30$ und $r = \frac{12}{5}\cdot T = \frac{160}{29} \approx 5{,}52$.

Der Schnittpunkt der Geraden liegt bei $(5\cdot r/2\cdot r) = (\frac{800}{29}/\frac{320}{29}) \approx$ (27,59/11,03).

Natürlich kannst du das Gleichungssystem auch im *Gleichungs-Modus* des Graphikrechners lösen. (siehe 2. Arbeitsblatt)

Der Abstand des Schiffes von Carsten ist minimal, wenn es sich im Schnittpunkt der Geraden g und h befindet, da die Gerade h das Lot vom Ursprung (0/0) auf die Gerade g, auf der sich das Schiff bewegt, beinhaltet.

Der minimale Abstand beträgt $\sqrt{(\frac{800}{29})^2 + (\frac{320}{29})^2}$ km ≈ 29,71 km.

Das Schiff erreicht diesen bei T = $\frac{200}{87}$ ≈ 2,30.

<u>11. Aufgabe:</u>

Da sich das Schiff in einer Stunde 12 km östlich und 30 km südlich bewegt, legt es in dieser Zeit $\sqrt{12^2 + 30^2}$ km ≈ 32,31 km zurück. Es besitzt also eine Geschwindigkeit von ca. 32,31 km/h.