Lösungen der Aufgaben

1. Aufgabe:

$f(-x) = 0{,}5(-x)^3 - 0{,}75(-x)^2 - 9(-x) = -0{,}5x^3 - 0{,}75x^2 + 9x$

$f(-x) \neq f(x)$, also ist f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

$f(-x) \neq -f(x)$, also ist f nicht punktsymmetrisch zum Ursprung.

2. Aufgabe*:

Zur Bestimmung der Nullstellen von f setzt du die Funktionsgleichung gleich 0.

$$f(x) = 0{,}5x^3 - 0{,}75x^2 - 9x = x\cdot(0{,}5x^2 - 0{,}75x - 9) = 0$$

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Als erste Nullstelle erhältst du x = 0.

$$0{,}5x^2 - 0{,}75x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \tfrac{3}{2}x - 18 = 0$$

Die quadratische Gleichung lässt sich mit der p-q-Formel lösen.

$$x_{1/2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad p = -\tfrac{3}{2} \qquad q = -18$$

$$x_{1/2} = \tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - (-18)} = \tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16} + \tfrac{288}{16}} = \tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\tfrac{297}{16}}$$

$$x_1 = \tfrac{3}{4} + \sqrt{\tfrac{297}{16}} \approx 0{,}75 + 4{,}31 = 5{,}06$$

$$x_2 = \tfrac{3}{4} - \sqrt{\tfrac{297}{16}} \approx 0{,}75 - 4{,}31 = -3{,}56$$

Die weiteren Nullstellen liegen bei $x \approx 5{,}06$ und $x \approx -3{,}56$.

3. Aufgabe:

Notwendige Bedingung:

Besitzt die Funktion f an der Stelle x ein relatives Maximum bzw. Minimum, so gilt $f'(x) = 0$.

Hinreichende Bedingung:

Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, so besitzt die Funktion f an der Stelle x ein relatives Maximum.
Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so besitzt die Funktion f an der Stelle x ein relatives Minimum.

4. Aufgabe*:

$$f'(x) = 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 9$$
$$f''(x) = 3x - 1{,}5$$

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 1{,}5x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$

Die quadratische Gleichung lässt sich mit der p-q-Formel lösen.

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad p = -1 \quad q = -6$

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \qquad f(3) = -20{,}25$

$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2 \qquad f(-2) = 11$

Wegen $f''(3) = 7{,}5 > 0$ befindet sich bei (3/–20,25) ein relatives Minimum.
Wegen $f''(-2) = -7{,}5 < 0$ befindet sich bei (–2/11) ein relatives Maximum.

5. Aufgabe:

Notwendige Bedingung:

Besitzt die Funktion f an der Stelle x einen Wendepunkt, so gilt $f''(x) = 0$.

Hinreichende Bedingung:

Gilt $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so besitzt die Funktion f an der Stelle x einen Wendepunkt.

6. Aufgabe:

$$f''(x) = 3x - 1{,}5$$
$$f'''(x) = 3$$

$f''(x) = 3x - 1{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = 1{,}5$

$x = 0{,}5 \qquad f(0{,}5) = -4{,}625$

Wegen $f'''(x) = 3 \neq 0$ befindet sich bei (0,5/–4,625) ein Wendepunkt.

Klausur

7. Aufgabe:

$$f(x) = -x^3 + 9x$$
$$f'(x) = -3x^2 + 9$$
$$f''(x) = -6x$$
$$f'''(x) = -6$$

Symmetrie

$f(-x) = -(-x)^3 + 9(-x) = x^3 - 9x = -f(x)$

f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, aber nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen

$$f(x) = -x^3 + 9x = x \cdot (-x^2 + 9) = 0$$

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist. Als erste Nullstelle erhältst du x = 0.

$$-x^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$$

Die weiteren Nullstellen liegen bei $x = 3$ und $x = -3$.

Extrema

$$f'(x) = -3x^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

$x_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ $\qquad f(\sqrt{3}) \approx 10{,}39$

$x_2 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$ $\qquad f(-\sqrt{3}) \approx -10{,}39$

Wegen $f''(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0$ befindet sich bei (1,73/10,39) ein relatives Maximum.
Wegen $f''(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0$ befindet sich bei (–1,73/–10,39) ein relatives Minimum.

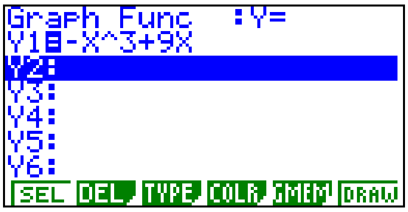
Wendepunkte

$$f''(x) = -6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Wegen $f'''(x) = -6 \neq 0$ befindet sich bei (0/0) ein Wendepunkt.

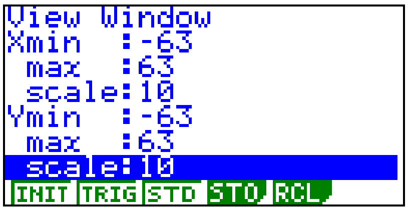
8. Aufgabe:

Im *Graphik-Editor* gibst du die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x$ ein.



[(–)] [X,θ,T] [∧] [3] [+] [9] [X,θ,T]   [EXE]

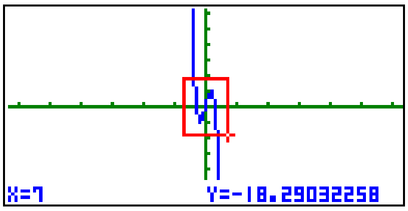
Du drückst die Taste [V-Window]S, um zum *Betrachtungsfenster* zu gelangen. Dort wählst du zunächst einen großen Bildbereich, um einen Überblick über den Graphen der Funktion zu erhalten.



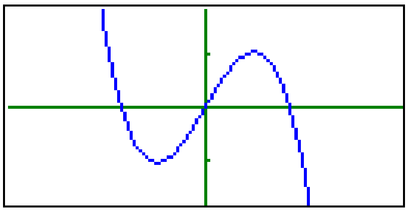
[(–)][6][3]	[EXE]
[6][3]	[EXE]
[1][0]	[EXE]
[(–)][6][3]	[EXE]
[6][3]	[EXE]
[1][0]	[EXE]

Mit [EXIT] [F6] lässt du den Graphen zeichnen.

Du rufst mit den Tasten [Zoom]S [F1] die *Box-Zoom-Funktion* auf, um den Bildbereich zu verändern.



Mit den Cursor-Tasten bewegst du den orangefarbenen Zeiger an eine Ecke des rechteckigen Bildausschnitts, der vergrößert werden soll. Zum Registrieren drückst du [EXE].
Danach bewegst den Zeiger mit den Cursor-Tasten zu der diagonal gegenüber liegenden Ecke des Rechtecks.



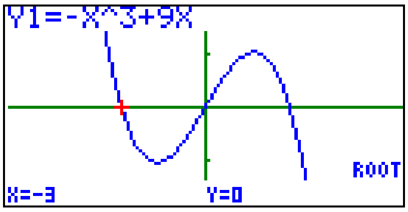
Nach Drücken der Taste [EXE] wird der ausgewählte Bildausschnitt vergrößert dargestellt.

Symmetrie

Die graphische Darstellung legt die Vermutung nahe, dass der Graph von f achsensymmetrisch zum Ursprung ist.

Nullstellen

Du rufst mit [G-Solv]S [F1] den Menüpunkt ROOT der *Graph-Solve-Funktion* auf.

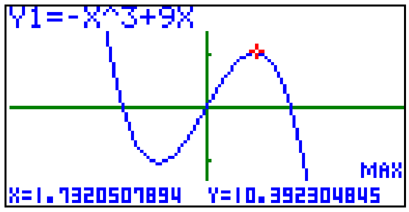


Eine Nullstelle liegt bei $x = -3$.

Mit Hilfe der Cursor-Taste [▶] erhältst du die weiteren Nullstellen, sie liegen bei $x = 0$ und $x = 3$.

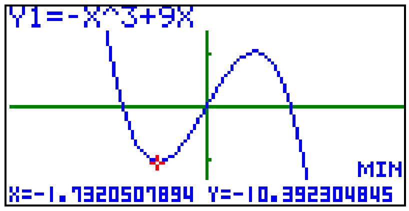
Lösung 29: Kurvendiskussion – Klausur

Extrema



Du rufst mit [G-Solv]^S [F2] den Menüpunkt MAX der *Graph-Solve-Funktion* auf.

Das Maximum liegt bei (1,73/10,39).



Du rufst mit [G-Solv]^S [F3] den Menüpunkt MIN der *Graph-Solve-Funktion* auf.

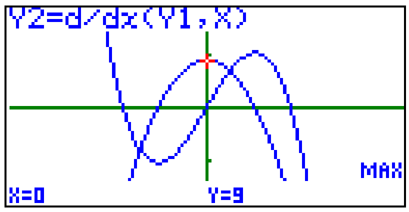
Das Minimum liegt bei (–1,73/–10,39).

Wendepunkte

Du kehrst mit [EXIT] zum *Graphik-Editor* zurück und gibst in der 2. Zeile die Ableitung von f ein.

[OPTN][F2][F1] [VARS][F4][F1] [1] [,] [X,θ,T] [ )] [EXE]

Mit [F6] lässt du die graphische Darstellung erstellen. Die Ableitungsfunktion besitzt ein relatives Maximum.



Um das Maximum der Ableitungsfunktion zu bestimmen, rufst du mit [G-Solv]^S [F3] den Menüpunkt MAX der *Graph-Solve-Funktion* auf.

Mit der Cursor-Taste [▼] wählst du den Graphen der Ableitungsfunktion aus, anschließend drückst du [EXE].

Der Wendepunkt von f liegt bei (0/0).