

## Affine Abbildungen in der Ebene

Mit dem ClassPad lassen sich in der geometrischen Ebene sehr anschaulich beliebige affine Abbildungen wie z.B. Spiegelungen, Translationen, Drehungen und zentrische Streckungen ausführen. Es lassen sich die Koordinaten der geometrischen Objekte vor und nach der Abbildung sowie die Abbildungsgleichung angeben. Dies ermöglicht vielfältige analytische Untersuchungen. Beispielsweise kann man die Determinante, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildungsmatrix bestimmen, um Erkenntnisse zu erhalten über Umkehrbarkeit, Orientierung, Winkeltreue, Längentreue, Flächeninhaltsveränderungen, Fixgeraden und Fixpunktgeraden der Abbildungen.

### Beispiel

Das Dreieck mit den Eckpunkten (1; 0), (3; -1) und (2; -2) wird in der zweidimensionalen Ebene um den Ursprung (0; 0) gegen den Uhrzeigersinn mit dem Winkel  $60^\circ$  gedreht. Welche Koordinaten haben die Eckpunkte des Dreiecks nach der Drehung? Wie lautet die Abbildungsmatrix?

### Rechnerische Lösung

In der Ikon-Leiste tippen Sie auf <Main>, um zum Hauptanwendungs-Menü zu gelangen.

Eine Drehung in der zweidimensionalen Ebene um den Ursprung (0; 0) mit dem Winkel  $\varphi$  lässt sich beschreiben durch folgende Abbildungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

#### Eingabe der Abbildungsmatrix für den Winkel $\varphi = 60^\circ$

Zur Eingabe der Matrix verwenden Sie den zweiten Teil der 2D-Tastatur.

[Keyboard] 2D

Mit den Tasten gelangen Sie zum Trigonometrie-Tastensatz der Mathematik-Tastatur. Bei der Eingabe der Winkel in Grad fügen Sie im Bogenmaßmodus den Gradzahlen das Symbol  $^\circ$  mit der Taste hinzu.

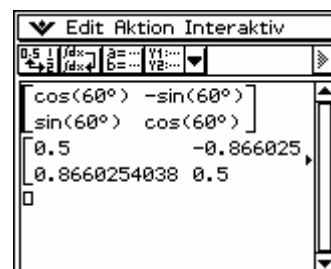
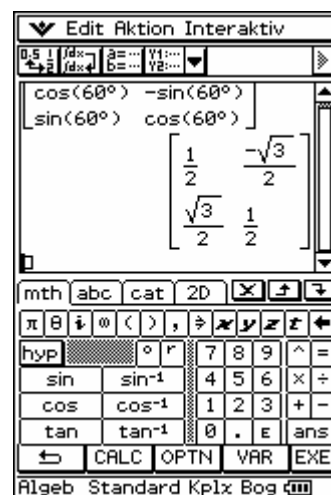
[ 6 ] [ 0 ] [ ) ] [ > ] [ (-) ] [ 6 ] [ 0 ] [ ) ] [ < ] [ < ]

[ 6 ] [ 0 ] [ ) ] [ > ] [ 6 ] [ 0 ] [ ) ] [ > ] [ EXE ]

Zur Anzeige der Matrix in Dezimaldarstellung tippen Sie in die Ergebniszeile und anschließend in der Symbolleiste auf .

Die Abbildungsmatrix lautet:

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{pmatrix}$$



Dreiecke in der zweidimensionalen Ebene lassen sich durch  $2 \times 3$ -Matrizen beschreiben, bei denen die Spalten die Ortsvektoren der Eckpunkte darstellen.

Multiplikation der Abbildungsmatrix mit der Matrix des Dreiecks ergibt die Matrix, welche das Dreieck nach Drehung um den Ursprung (0; 0) mit dem Winkel  $60^\circ$  beschreibt.

Multiplikation der Abbildungsmatrix mit der Matrix des Dreiecks

Sie tippen in der ersten Eingabezeile hinter die Abbildungsmatrix.

[ × ] [ 2D ]  
[ ] [ 1 ] [ ▼ ] [ 0 ] [ ] [ 3 ] [ ▼ ] [ (-) ] [ 1 ] [ ] [ 2 ] [ ▼ ] [ (-) ] [ 2 ] [ EXE ]

Um die zunächst nicht sichtbaren Teile des Ergebnisses anzusehen, tippen Sie auf den Pfeil am Rand der Ergebniszeile.

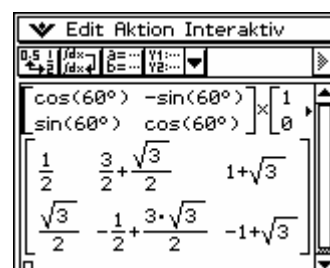
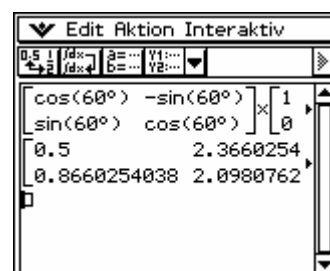
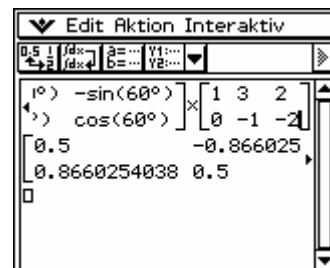
Zur Anzeige der Ergebnismatrix in exakter Darstellung, tippen Sie in die Ergebniszeile und anschließend in der Symbolleiste auf  $\frac{0.5}{1}$ .

Die Eckpunkte des Dreiecks haben nach der Drehung folgende Koordinaten:

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx (0,5; 0,866)$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \approx (2,366; 2,098)$$

$$(1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}) \approx (2,732; 0,732)$$



**Geometrische Lösung**

Um ein Geometriefenster zu öffnen, tippen Sie in der Symbolleiste auf den Pfeil  $\square$  der Anwendungs-Schaltflächen und anschließend auf  $\square$ .

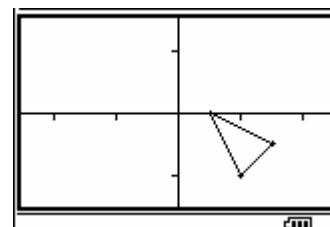
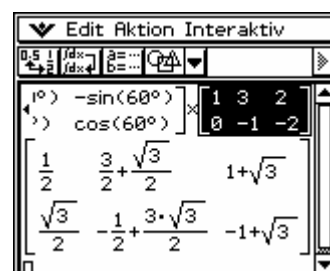
Zeichnen des Dreiecks

Sie markieren die Matrix des Dreiecks in der Eingabezeile des Hauptanwendungsfensters und ziehen sie in das Geometriefenster.



Aufwendiger ist es, wenn Sie alternativ im Geometriefenster zunächst ein Dreieck zeichnen lassen und anschließend die genauen Positionen der Eckpunkte mit Hilfe des Messfeldes in der Symbolleiste eingeben.


Einblenden der Koordinatenachsen

Um die Koordinatenachsen einzublenden, tippen Sie in der Symbolleiste des Geometriefensters auf  $\square$ .



Drehen des Dreiecks um den Ursprung mit dem Winkel 60°


Sie tippen auf die drei Seiten des Dreiecks, um das Dreieck zu markieren, und in der Symbolleiste des Geometriefensters auf den Pfeil  der Konstruktions-Schaltflächen und anschließend auf .

Nun tippen Sie mit dem Stift zur Kennzeichnung des Drehzentrums auf den Koordinatenursprung. Wenn sich das Dialogfeld öffnet, geben Sie mit den Tasten [ 6 ] [ 0 ] den Winkel in Grad ein. Nachdem Sie auf  getippt haben, erscheint das um den Ursprung mit dem Winkel 60° gedrehte Dreieck.

Es kann leicht passieren, dass sich das Drehzentrum nicht exakt beim Ursprung (0; 0) befindet.

Überprüfen der Lage des Drehzentrums

Um die Markierung aufzuheben, tippen Sie auf eine freie Stelle im Geometriefenster. Nun tippen Sie auf das Drehzentrum, sodass deren Koordinaten links unten in der Statusleiste angezeigt werden.

Weichen die Koordinaten des Drehzentrums von (0; 0) ab, tippen Sie in der Symbolleiste des Geometriefensters auf , um zum Messfeld zu gelangen. Sie tippen dann auf das Messfeld und ersetzen die angezeigten Koordinaten mit den Tasten [ ( ] [ 0 ] [ , ] [ 0 ] [ ) ] [EXE] durch die Koordinaten (0; 0).

Verändert man die Position des Drehzentrums, ändert sich automatisch auch die Lage des gedrehten Dreiecks.

Anzeigen der Koordinaten des gedrehten Dreiecks im Hauptanwendungsfenster

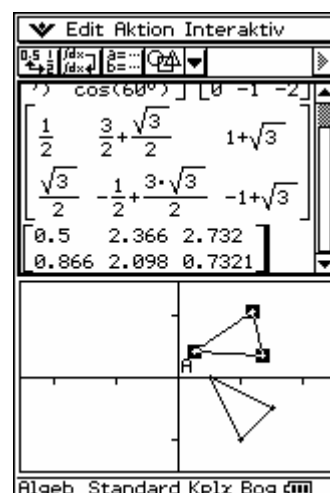
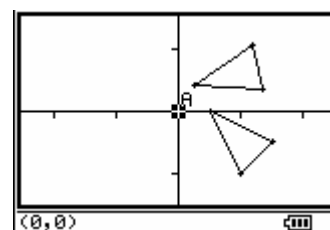
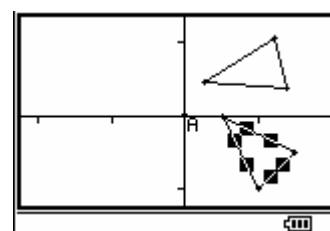
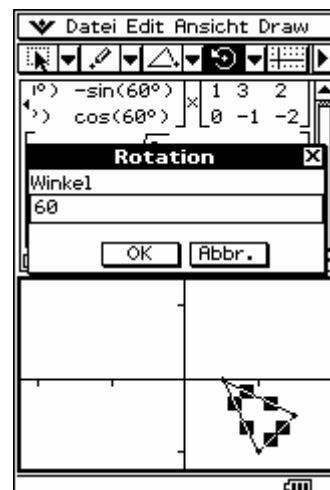
Um die Markierung aufzuheben, tippen Sie auf eine freie Stelle im Geometriefenster.

Nun tippen Sie auf die drei Eckpunkte des gedrehten Dreiecks und ziehen es in das Hauptanwendungsfenster an die Position der neuen Eingabezeile. Wenn der Cursor blinkt, heben Sie den Stift vom Display ab.

Es erscheint die Matrix, welche als Spalten die Ortsvektoren der Eckpunkte des gedrehten Dreiecks enthält, in Übereinstimmung mit der rechnerischen Lösung.

Neben Drehungen lassen sich im Geometriefenster unter Verwendung anderer Konstruktionsschaltflächen in der Symbolleiste bzw. des Menüpunktes Draw-Konstru. in der Menüleiste auch Geradenspiegelungen, Translationen, zentrische Streckungen und andere affine Abbildungen in der Ebene ausführen.

Markiert man im Geometriefenster einen Punkt und einen zugehörigen Bildpunkt einer affinen Abbildung und zieht man diese in das Hauptanwendungsfenster, kann man den Term der Abbildung mit der Abbildungsmatrix anzeigen lassen.

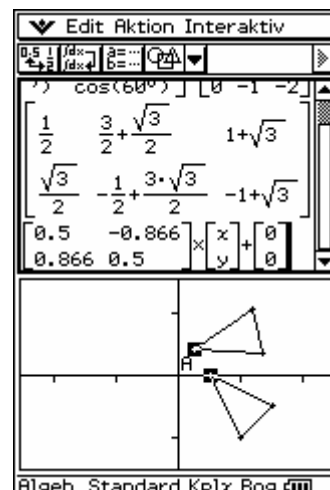


Anzeigen der Abbildungsmatrix

Sie entfernen die Matrix mit der Taste [Clear] und tippen im Geometriefenster auf eine freie Stelle, um die Markierung aufzuheben.

Nun tippen Sie zur Markierung beispielsweise auf den Punkt (1; 0) und den Bildpunkt bei (0,5; 0,866) und ziehen sie in das Hauptanwendungsfenster an die Position der neuen Eingabezeile. Wenn der Cursor blinkt, heben Sie den Stift vom Display ab.

Es erscheint der Term der Abbildungsgleichung mit der Abbildungsmatrix und dem Translationsvektor. Da es sich um eine Drehung um den Ursprung handelt, gibt es keinen Translationsanteil (der Translationsvektor ist der Nullvektor) und die Abbildung lässt sich allein durch die Abbildungsmatrix beschreiben. Diese stimmt überein mit der Abbildungsmatrix, die bei der rechnerischen Lösung verwendet wurde.



**Übung**

Das Dreieck mit den Eckpunkten (4; 2), (3; 0,5) und (2; 1) wird in der zweidimensionalen Ebene um den Punkt (1; -0,5) gegen den Uhrzeigersinn mit dem Winkel 90° gedreht. Welche Koordinaten haben die Eckpunkte des Dreiecks nach der Drehung? Wie lautet die Abbildungsgleichung und die Abbildungsmatrix?

