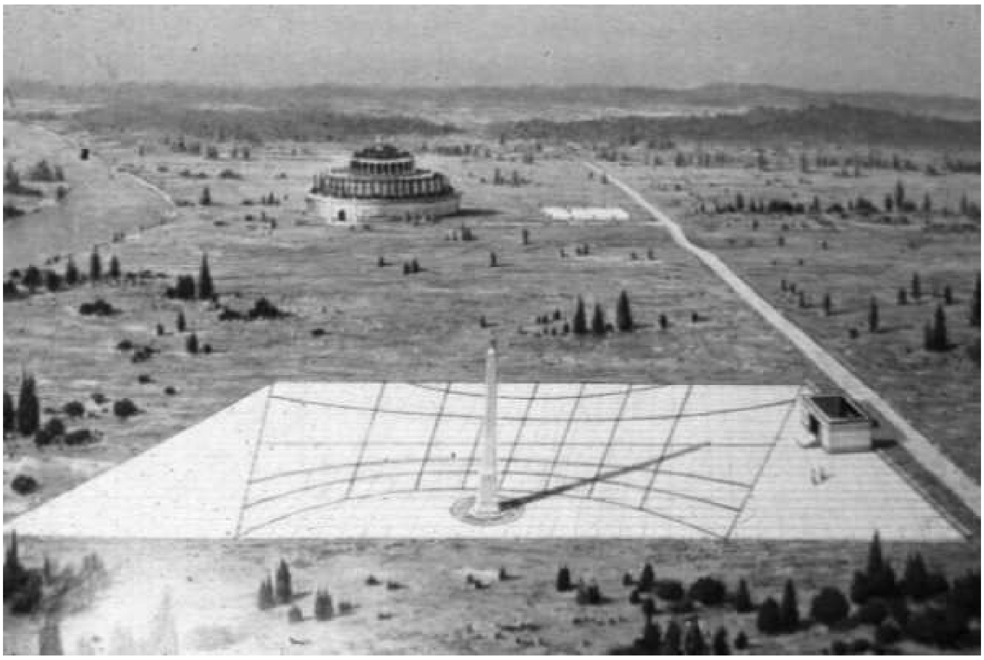
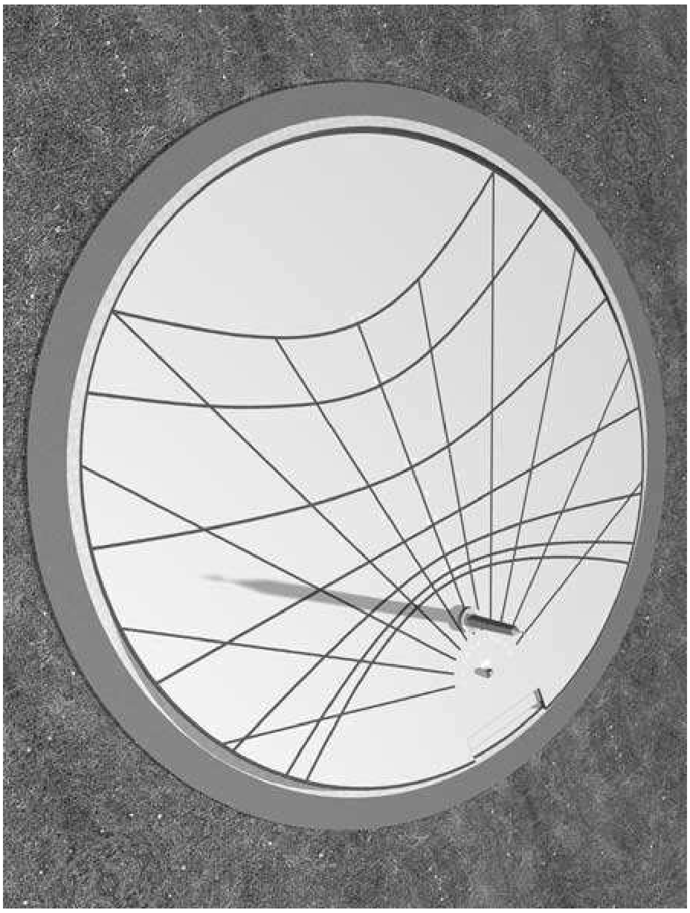
Sonnenuhr des Augustus



Die Sonnenuhr des Augustus im antiken Rom war die wohl größte Sonnenuhr der Welt. Ihr Zeiger bzw. Schattengeber, das so genannte Gnomon, war ein knapp 29 Meter hoher Obelisk. Errichtet wurde die Anlage ca. 12 v. Chr. von Kaiser Augustus.

An dem Fall des Schattens ließ sich die Uhrzeit ablesen und an der Länge des Schattens konnte man die Länge der Tage und somit das Datum erkennen.



An einer Rekonstruktion einer solchen Sonnenuhr lässt sich gut der Aufbau des „Ziffernblatts" erkennen, welches im Original ein großer Platz innerhalb des Marsfelds[1] war, bei dem die Markierungen aus Bronze in Marmor gearbeitet waren. Später wurde die Anlage um den „Tempel des Friedens" (Ara Pacis) ergänzt. Dieser wurde an einer mehrdeutigen Position errichtet. Zum einen bildet dieser mit dem Gnomon und dem Mausoleum des Augustus einen rechten Winkel. Zum anderen fällt in den Abendstunden des Geburtstags des Augustus der Schatten des Gnomons auf den Eingang des Tempels.

Legt man ein dreidimensionales Koordinatensystem so über die Anlage, dass der Fußpunkt des Obelisken im Koordinatenursprung liegt, lassen sich folgende Daten angeben:

Die quadratische Grundfläche hat die Eckpunkte $\left(-2\middle|-2\middle|\,0\right),\left(2\middle|-2\middle|\,0\right),\left(2\middle|2\middle|\,0\right),\left(-2\middle|2\middle|\,0\right)$.
Weitere Eckpunkte sind $\left(-1\middle|-1\middle|25\right),\left(1\middle|-1\middle|25\right),\left(1\middle|1\middle|25\right),\left(-1\middle|1\middle|25\right)$ und die Spitze ist im Punkt $\left(0\middle|0\middle|29\right)$. Der Eingang zum Tempel des Friedens hat die Koordinaten $\left(76\middle|0\middle|0\right)$ und das Zentrum des Mausoleums des Augustus befindet sich im Punkt $\left(0\middle|400\middle|9\right)$.

[1] Marsfeld: Zentraler Platz im antiken Rom

Aufgaben:

a) Weisen Sie mit Mitteln der analytischen Geometrie nach, dass Mausoleum, Obelisk (Fußpunkt) und Tempel tatsächlich einen rechten Winkel bilden.

b) Verwenden Sie die Projektionsmatrix $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}25 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ um eine Projektion des Obelisken zu berechnen und zeichnen Sie diese Projektion in ein geeignetes Koordinatensystem.

c) Zur Mittagszeit des 23. Septembers, am Geburtstag des Kaisers Augustus, verlaufen die Sonnenstrahlen in Richtung $\begin{pmatrix} 9 \\ 24{,}5 \\ -29 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass der Schatten von der Spitze des Obelisken auf den Punkt $W\left(9\middle|24{,}5\middle|0\right)$ fällt.

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes W vom Fußpunkt des Obelisken.

e) Berechnen Sie die Projektion des Punktes W und skizzieren Sie den Schatten in Ihre Zeichnung aus Aufgabenteil b).

f) Gegen Abend des 23. Septembers fällt die Schattenspitze genau auf den Eingang des Tempels. Berechnen Sie, in welchem Winkel die Sonne zu dieser Zeit über der Anlage steht.

g) Der 23. September ist ebenfalls der Tag, an dem der Schatten entlang der einzigen Geraden im Ziffernblatt verläuft. (Tag und Nacht sind gleich lang.)
Geben Sie die Gleichung dieser Geraden in Parameterform an.
Bestimmen Sie, an welcher Stelle ein weiterer Tempel zu errichten wäre, der genau gegenüber auf der anderen Seite des Ziffernblatts steht.

Quellen:
Filippo Coarelli, Rom – Ein archäologischer Führer, Freiburg 1975
Horizontastronomie im Ruhrgebiet: http://www.horizontastronomie.de/
Horologium des Augustus, http://www.roma-antiqua.de/antikes_rom/

Unterrichtliche Voraussetzungen

Die unterrichtlichen Voraussetzungen für die vorliegende Aufgabe wurden im 5. und 6. Semester gelegt.

Ungewöhnlich für den Grundkurs ist die Einbeziehung der Abbildungsmatrizen.

Eine besondere Schwierigkeit besteht im Aufgabenteil e) in der Ermittlung der weiteren Ecken des Schattens. Hier wird Abstraktionsvermögen oder zusätzlicher Rechenaufwand verlangt. Aufgabenteil g) erfordert ein Transfer der Kenntnisse zum Thema Punktproben.

Mögliche Ergebnisse

a)

Nachweis über das Skalarprodukt der Vektoren vom Fußpunkt des Obelisken zum Mausoleum und zum Tempeleingang.

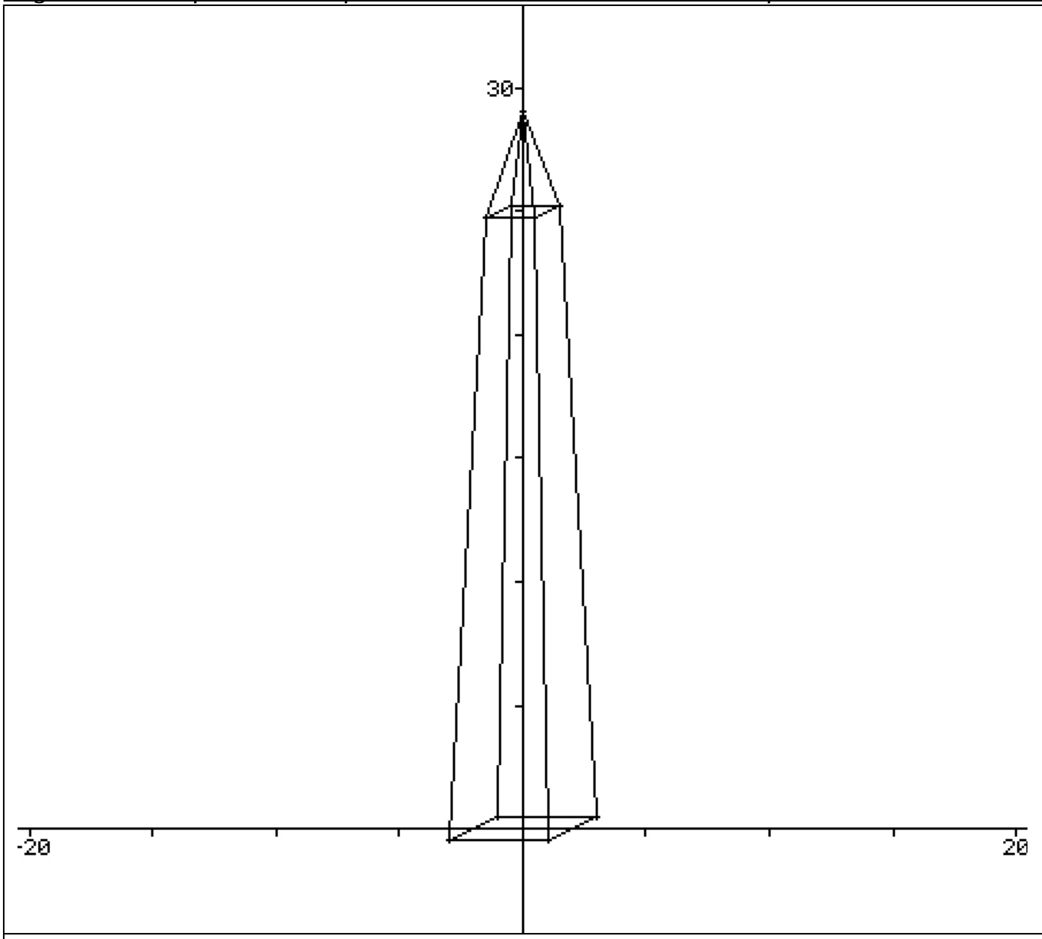
$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \bullet \left(\begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

b)

Schreibt man die Eckpunkte des Obelisken spaltenweise in eine Matrix, lassen sich per Matrixmultiplikation die projizierten Punkte berechnen.

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 25 & 25 & 25 & 29 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 3 & -0,5 & -1,5 & 0,5 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 & 25,25 & 24,75 & 24,75 & 25,25 & 29 \end{pmatrix}$$



c)

Aufstellen einer Gerade durch die Spitze des Obelisken in Richtung der Sonnenstrahlen.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\29\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\24,5\\-29\end{pmatrix}$$

Ebene des Ziffernblatts:

$$E:\vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Gleichsetzen führt offensichtlich zu $t=1; r=9; s=24,5$ und das Einsetzen der Parameter gibt den angegeben Schnittpunkt.

d)

Gefragt ist also die Länge des Ortsvektors $\vec{w}$.

$$\left\|\begin{pmatrix}9\\24,5\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{681,25}\approx 26,1$$

Der Punkt W ist also 26,1 Meter vom Fußpunkt des Obelisken entfernt.

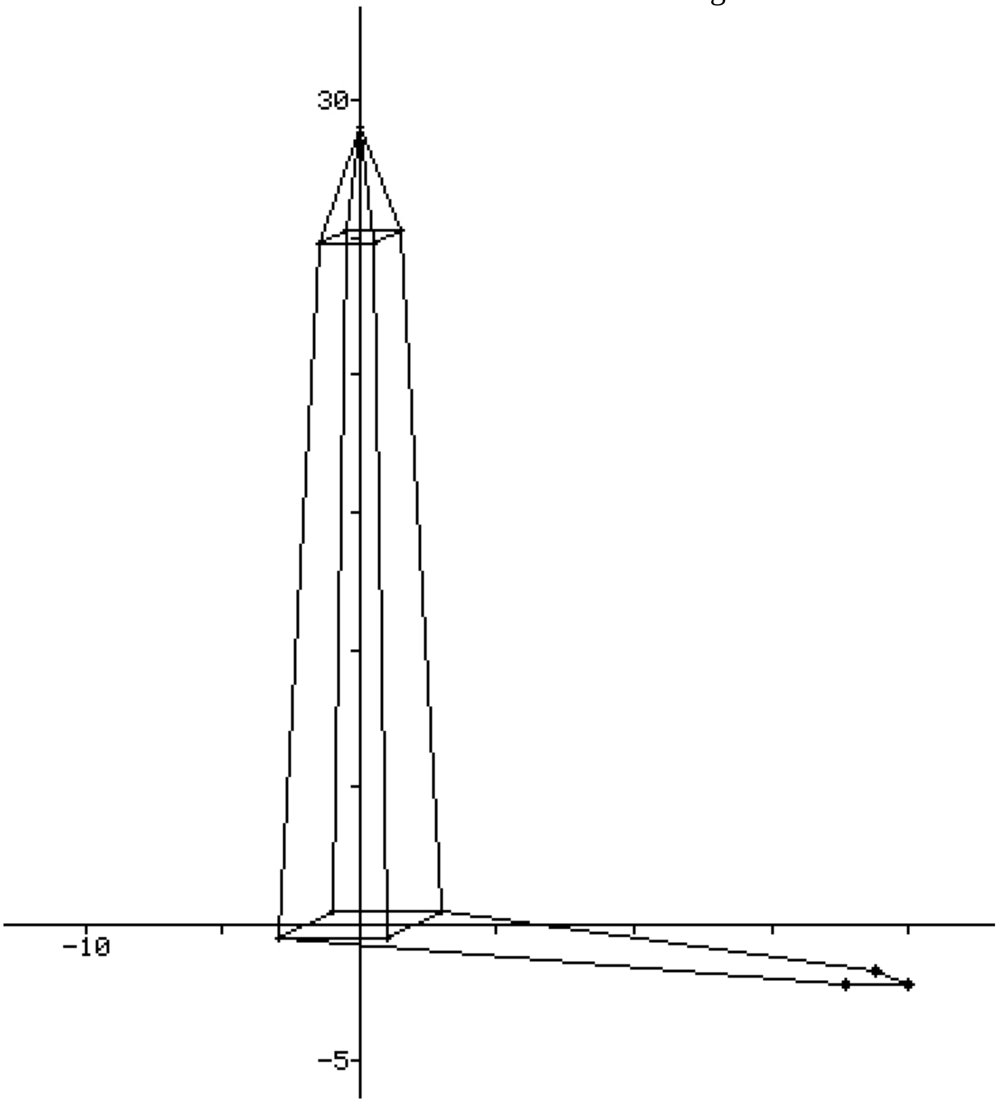
e)

Berechnung des projizierten Punktes:

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 24,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -2,25 \end{pmatrix}$$

5 Pkte (I-II)

Die weiteren Punkte können berechnet oder abgeschätzt werden.
Für den Schatten werden zwei weitere Punkte benötigt.



13 Pkte (II-III)

CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

f) Berechnet wird hier der Winkel der Vektoren vom Eingang des Tempels zur Spitze des Obelisken und zum Fußpunkt des Obelisken. $\sphericalangle\left(\begin{pmatrix}-76\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-76\\0\\29\end{pmatrix}\right)\approx 20{,}9°$	12 Pkte (II)
g) Gesucht ist hier die Gerade, die durch den Tempeleingang und den Punkt W verläuft. (Gerade aus zwei Punkten) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}76\\0\\0\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}9-76\\24{,}5\\0\end{pmatrix}$ Der einfachste Lösungsweg erfordert die genaue Kenntnis über die Funktionsweise der Parameterform. Für $u=2$ ergibt sich der Ortsvektor zum gesuchten Punkt $\left(-58\middle|49\middle|0\right)$	8 Pkte (II) 8 Pkte (III)
Summe:	100 Punkte

Für die Note „ausreichend“ werden mindestens 45 (45%) Punkte benötigt.

Für die Note „gut“ werden mindestens 75 (75%) Punkte benötigt.