CASIO forum
Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 1/2015

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

im CASIO forum finden Sie Anregungen und Beispiele für den gewinnbringenden Unterrichtseinsatz der Schulrechner von CASIO. In dieser Ausgabe gibt es Neuigkeiten zu entdecken: eine neue technisch-wissenschaftliche Taschenrechner-Serie, den Start einer Aufgabenserie und verschiedene Buch-Neuerscheinungen.

Die neue **ClassWiz-Serie** beeindruckt mit deutlich verbesserter Bildschirmauflösung und starkem Kontrast. Aber auch die Funktionen – die so noch nie in einem technisch-wissenschaftlichen Taschenrechner zu finden waren – werden Sie überzeugen: Das Unterrichten mit Tabellenkalkulation wird in Mathematik-Lehrplänen verpflichtend vorgeschrieben. Bisher musste der Unterricht aus dem Klassen- in den Computerraum verlegt werden. Im CASIO forum lesen Sie eine typische Aufgabe zur Tabellenkalkulation, die ohne Computer, dafür mit der ClassWiz-Serie bearbeitet werden kann. Diese Rechnerserie, die in Deutschland aus dem FX-87DE X und dem FX-991DE X besteht, kann sogar QR-Codes anzeigen: Über ein Smartphone mit QR-Code Reader können nun online Graphen, statistische Diagramme, aber auch Hinweise zur Bedienung des Taschenrechners angezeigt werden. Eine ganz neue Generation von Schulrechnern!

Mit der **Miss-Marple-Aufgabe** starten wir eine Serie im CASIO forum. Die Lösungen sind nur online verfügbar, daher können Sie Ihre eigene Problemlöse-Kompetenz testen. Viel Spaß beim Knobeln!
Über Rückmeldungen zur Umsetzung im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an **education@casio.de**.

Ihr Redaktionsteam
CASIO Educational Projects

Neue Serie: Aufgaben zum Knobeln

Helfen Sie Miss Marple!

Autor: Annette Achmus, Studienseminar Hannover

Miss Marple hat um 16:50 Uhr mit dem Zug den Londoner Bahnhof Paddington verlassen, um nach Oxford zu reisen. Bald nach der Abfahrt ist sie kurz eingeschlafen.
Beim Aufwachen, noch immer ein wenig verschlafen, schaut sie aus dem Fenster. Auf dem Nebengleis fährt ein anderer Zug in die gleiche Richtung. Da beide Züge in diesem Moment fast die gleiche Geschwindigkeit haben, kann sie die Menschen im anderen Zug beobachten, ein Kind etwa, das Grimassen macht und Miss Marple zu Reaktionen herausfordert.
Doch plötzlich macht sie in einem anderen Abteil des parallel fahrenden Zuges eine grausige Beobachtung: Eine Frau wird erdrosselt!
Den Täter kann sie leider nicht erkennen, ein Vorhang versperrt ihr die Sicht.

Natürlich wendet sie sich umgehend an die Polizei und schildert ihre Beobachtungen. Da aber bisher noch keine Vermisstenanzeige vorliegt und auch keine Leiche gefunden wurde, glauben ihr die Polizisten nicht und vertrösten Miss Marple.
Diese lässt jedoch nicht locker, dann muss sie das Verbrechen eben selbst aufklären! Dafür müsste sie zuerst einmal die Leiche finden. Aber wo soll sie mit der Suche beginnen?
Im Internet hat sie zuerst den passenden Fahrplan herausgesucht: alle Züge, die den Bahnhof Paddington zwischen 16:45 und 17:00 Uhr verlassen haben. Dazu auch eine Landkarte der Gegend zwischen London Paddington und Oxford. Sie kommt damit aber irgendwie nicht richtig weiter.
Können Sie ihr helfen? Bedenken Sie dabei, dass alle Überlegungen und Rechnungen sauber dargestellt und erklärt werden müssen, nur so kann Miss Marple mit diesen Unterlagen die Polizei überzeugen, nur so sind sie „gerichtsfest“.

16:45		**Swansea** London Paddington 16:45 - Reading 17:09 - Swindon 17:38 - Bristol Parkway 18:04 - Newport (Gwent) 18:30 - Cardiff Central 18:48 - Bridgend 19:09 - Post Talbot Parkway 19:22 - Neath 19:30 - Swansea 19:45
16:50		**Oxford** London Paddington 16:50 - Ealing Broadway 16:58 - Hayes + Harlington 17:05 - West Dayton 17:09 - Slough 17:20 - Maidenhead 17:27- Twyford (Berkshire) 17:35 - Reading 17:45 - Didcot Parkway 18:12 - Oxford 18:34
16:55		**Heathrow Terminal 5** London Paddington 16:55 - Heathrow Terminal 1 17:10 - Heathrow Terminal 5 17:16
16:57		**Penzance** London Paddington 16:57- Reading 17:32 - Taunton 18:49 - Tiverton Parkway 19:02 - Exeter St. Davis 19:18 - Newton Abbot 19:40 - Totnes 1954 - Plymouth 20:22 - St. Erth 22:09 - Penzance 22:22
16:59		**Oxford** London Paddington 16:59 - Slough 17:14 - Reading 17:29 - Didcot Parkway 17:45 - Oxford 18:00

Die Lösung der Aufgabe und hilfreiche Links finden Sie in der Materialdatenbank unter **www.casio-schulrechner.de**

Das Dach des Centre Pompidou (Metz)

Autor: Julie Valerius, Nikolaus-von-Kues-Gymnasium, Bernkastel-Kues

Computergestütztes Design gewinnt in Industrie und Alltag immer mehr an Bedeutung, so z.B. in der Automobilindustrie oder in der Architektur. Splines, also Funktionen, die basierend auf (wenigen) Stützstellen stückweise aus Polynomen zusammengesetzt werden, sind dabei ein grundlegendes Verfahren. Im Sinne eines lebensweltbezogenen Mathematikunterrichts bietet es sich an, Schülern ein Grundverständnis für die Arbeitsweise solcher Programme zu vermitteln.

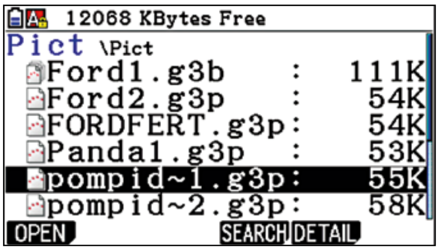
In der Schule können Splines vertiefend im Anschluss an die sogenannten „Steckbriefaufgaben“ behandelt werden. Allerdings ist Spline-Interpolation ohne digitale Berechnungen und Darstellungsunterstützung nur unter hohem Aufwand leistbar, wenig anschaulich – aber motivierend.

Auch mit Grafikrechner-Unterstützung erscheint es sinnvoll, sich auf kubische Splines (Polynome 3. Grades) zu beschränken. Diese sind zum Grundverständnis völlig ausreichend und bieten eine vernünftige Relation zwischen Rechenaufwand und Lernertrag.

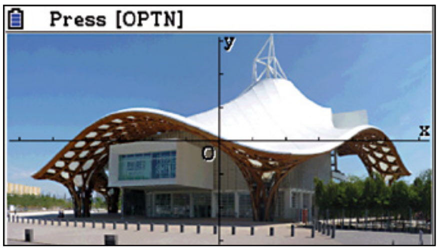
Im vorliegenden Artikel wird die Verwendung des Bildplot-Add-Ins des FX-CG20 erläutert. Dieses erlaubt es, eigene Fotos einzulesen, Stützpunkte auszuwählen, diese in einer Liste zu bearbeiten und die berechneten Interpolationspolynome im Vergleich mit dem Realbild darzustellen. Zur Reduktion des sonst erheblichen Rechenaufwandes wird auf Matrizen (Run-Matrix-Menü) zurückgegriffen.

Die Idee zu diesem Beitrag entstand bei der Besichtigung des Centre Pompidou in Metz, dessen geschwungene Dachform zur Interpolation durch Splines geradezu einlädt.

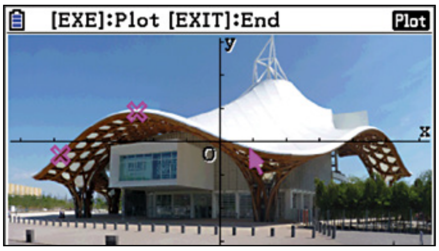
Mithilfe des Programms „Picture Conversion Engine“ (welches Lehrer bei Interesse über **education@casio.de** anfordern können) können Bild- und Moviedateien am Computer bearbeitet und in das Dateiformat (g3p, g3b) konvertiert werden, das auf dem Casio FX-CG20 verwendbar ist.
Zu Beginn öffnet man im Hauptmenü das Bildplot-Add-In und wählt das gewünschte Bild aus:



So erscheint das Centre Pompidou auf dem Bildschirm:

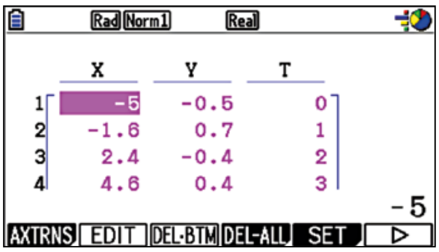


OPTN → F2 [Plot] erlaubt es, Punkte zu setzen (bestätigen jeweils mit EXE)



Die Korrektur der gesetzten Punkte ist möglich durch OPTN → F6 → F3 [EDIT] → Punkt mittels Cursortasten anwählen → EXE → Verschieben des Punktes mittels Cursortasten → EXE

F3 [List] zeigt die Koordinaten der ausgewählten Punkte:



Jetzt beginnt erst einmal die Handarbeit:

Die ausgewählten Stützpunkte müssen in Bedingungen übersetzt werden, die der Forderung der Interpolation der Dachform mithilfe stückweise definierter Polynome dritten Grades, die „glatt“ ineinander übergehen, gerecht werden:

- „direkter“ (stetiger) Anschluss:
  $f_i(x_i) = y_i$ und $f_{i+1}(x_i) = y_i$
- knickfrei:
  $f_i'(x_{i+1}) = f'_{i+1}(x_{i+1})$ bzw. $f_i'(x_{i+1}) - f'_{i+1}(x_{i+1}) = 0$
- ruckfrei:
  $f_i''(x_{i+1}) = f''_{i+1}(x_{i+1})$ bzw. $f_i''(x_{i+1}) - f''_{i+1}(x_{i+1}) = 0$

Zusätzlich müssen zwei Randbedingungen gestellt werden, die jedoch je nach Problemstellung angepasst werden können:

- (i.d.R.) geradlinige Fortsetzbarkeit:
  $f_1''(x_1) = 0$ und $f_n''(x_n) = 0$

Anmerkung: Aufgrund der Gleichheit von f´ und f´´ stimmt nicht nur das Krümmungsverhalten, sondern die Krümmung (→ Radius des Krümmungskreises) selbst überein!

Ausgehend von 5 Stützpunkten ergeben sich 4 Polynome f_i (i = 1,2,3,4) mit insgesamt 16 zu berechnenden Parametern, festgelegt durch 16 Bedingungen.

Es empfiehlt sich, eine tabellarische Übersicht in Papierform anzulegen, anhand derer die entsprechenden Koeffizienten des LGS anschließend in eine Matrix (Menü 1) übertragen werden können. Sie finden diese Übersicht in der Materialdatenbank auf **www.casio-schulrechner.de**

Dieser Tabelle sind die Bestimmungsgleichungen für die 16 Koeffizienten der 4 Spline-Polynome genauer zu entnehmen.

Es beschreiben die Gleichungen
- 1 – 8 die Forderung, dass die Polynome an den Stützpunkten stetig ineinander übergehen,
- 9, 10 die Forderung der linearen Fortsetzbarkeit am Rand, die jedoch nicht zwingend ist und je nach Problemstellung variiert werden kann,
- 11 – 13 den knickfreien Übergang an den Stützstellen,
- 14 – 16 die Übereinstimmung im Krümmungsverhalten an den Stützstellen.

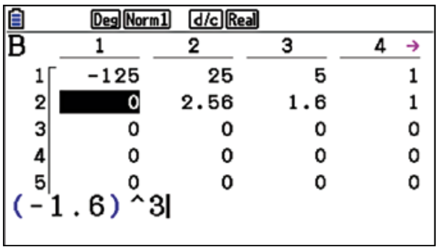
Beim Ausfüllen der Tabelle ist es nicht notwendig, z.B. $(-1{,}6)^3$ zu berechnen, da die Eingabe in eine Matrix auch per Rechenoperationen möglich ist.

Zur Berechnung der Koeffizienten wird die Matrixoperation im Run-Matrix-Menü eingesetzt:

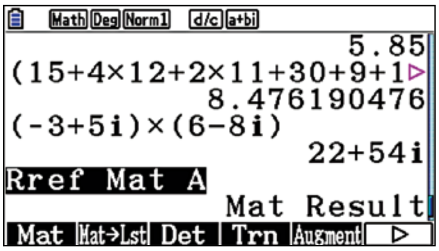
F3 [MAT/VCT] → F3 [DIM] → m:16 (Zeilenzahl), n:17 (Spaltenzahl) → EXE → Eingabe (nach EXE springt der Cursor immer um eins nach rechts bzw. wieder an den Anfang der nächsten Zeile)

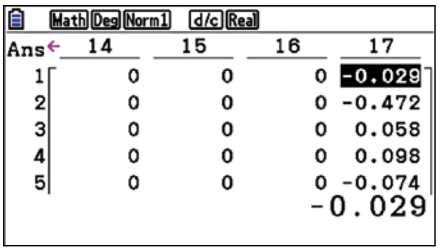
Fortsetzung: Spline-Interpolation mit dem FX-CG20

Nach der letzten Eingabe: 2 x [EXIT] → normaler Taschenrechner-Bildschirm

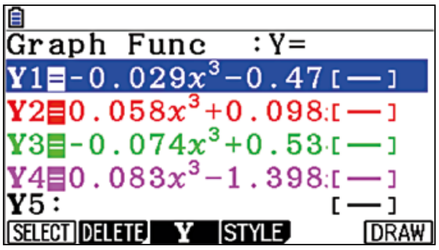


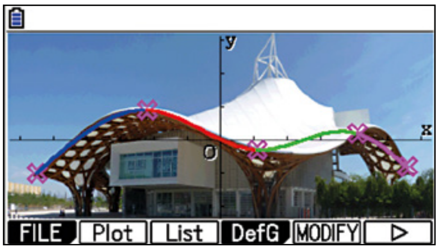
Der Befehl „Rref Mat [Name]“ liefert die gesuchten Koeffizienten der Interpolations-Polynome, die von Hand zur Eingabe im Bildplot-Menü übertragen werden müssen.





Zurück im Bildplot-Menü können die stückweise definierten Polynome f_1 bis f_4 über [OPTN] → [F4] [DefG] eingegeben und anschließend dargestellt werden:





Die nicht ganz optimale Interpolation vor allem im rechten Bereich liefert Anlass zu Diskussionen und Weiterführungen:

- Sollten mehr oder andere Stützpunkte gewählt werden?
- Beeinflusst die Wahl der Stützpunkte die Güte der Approximation?
- Ist das nicht klar, da es sich um eine räumliche Darstellung handelt?
- Wie können räumliche Objekte interpoliert werden?

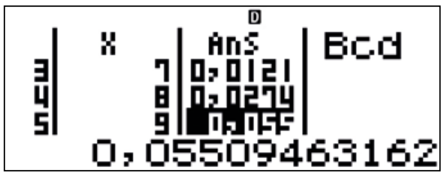
Insgesamt bietet das Bildplot-Add-In auch außerhalb der Spline-Interpolation die Möglichkeit, im Alltag die „mathematische Brille“ aufzusetzen, um den Unterricht durch Realbeispiele zu bereichern. Weitere GTR-Funktionen wie Matrizenrechnung oder Regression erlauben eine Reduktion des Rechenaufwands, wodurch der unterrichtliche Schwerpunkt ganz im Sinne der Kompetenzorientierung verstärkt auf Modellbildung, Interpretieren und Argumentieren gelegt werden kann.

Buchtipp

Freiburger Verlag: CASIO FX-87DE Plus von der Sek I bis zum Abitur

ISBN: 978-3-86814-284-6

Eine alternative Lösungsmöglichkeit zu dem Beispiel 3b auf Seite 20 im Buch (kumulierte Binomialverteilung) finden Sie in unserer Materialdatenbank unter **www.casio-schulrechner.de**:



Der FX-87DE Plus kann Listen von Wahrscheinlichkeiten erzeugen!

Zustandsgleichung idealer Gase

Für die neue „standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung" in Österreich wird ab dem Schuljahr 2017/18 der verbindliche Einsatz höherwertiger Technologie festgelegt. Während die sogenannten Typ-1-Aufgaben so konstruiert sind, dass sie (weitgehend) technologiefrei lösbar sind, wird für die Typ-2-Aufgaben der Einsatz von Systemen gefordert, welche die grundlegenden Funktionen einer Dynamischen-Geometrie-Software, einer Tabellenkalkulation sowie eines Computer-Algebra-Systems beherrschen. Der ClassPad II erfüllt diese Anforderungen und bietet außerdem keine elektronischen Hilfsmittel zur Kommunikation, die unzulässig wären.
Da die Hilfsmittel in der Übergangsfrist bereits für die Typ-2-Aufgaben zugelassen sind, bietet der ClassPad II den Schülerinnen und Schülern große Vorteile, wie die folgende Musterlösung der Haupttermin-Klausur von 2014[1] zeigt.

Die Formel $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen dem Druck p, dem Volumen V, der Stoffmenge n und der absoluten Temperatur T eines idealen Gases und wird *thematische Zustandsgleichung idealer Gase* genannt. R ist eine Konstante.

Das Gas befindet sich in einem geschlossenen Gefäß, in dem die Zustandsgrößen p, V und T verändert werden können. Die Stoffmenge n bleibt konstant.

Als Erstes bietet sich an, in der *Main*-Anwendung die Abhängigkeiten der Zustandsgrößen als Funktionen zu erfassen. Beispielhaft ist in der Abbildung gezeigt, wie die Zustandsgleichung nach p aufgelöst und eine Funktion *f_p (V,T,n,R)* definiert wird. Die *solve*-Funktion und der *Define*-Befehl befinden sich auf dem eingeblendeten Keyboard in dem Tastensatz Math3. Die ausgewählte rechte Seite lässt sich dabei mit Finger oder Stift herunterziehen. Analog wird für *f_V (p,T,n,R)* und *f_T (p,V,n,R)* verfahren.

```
solve(pV=nRT, p)
                        {p=R·T·n/V}
Define f_p(V,T,n,R)=R·T·n/V
                                done
```

a) Führen Sie alle Möglichkeiten an, die zu einer Verdoppelung des Drucks führen, wenn jeweils eine der Zustandsgrößen verändert wird und die anderen Größen konstant bleiben!

Da die Stoffmenge n und die Gaskonstante R unveränderlich sind, verbleiben nur Volumen V und Temperatur T.

Mit der *judge*-Funktion wird überprüft, ob sich der Druck tatsächlich verdoppelt, wenn das Volumen halbiert oder die Temperatur verdoppelt wird.

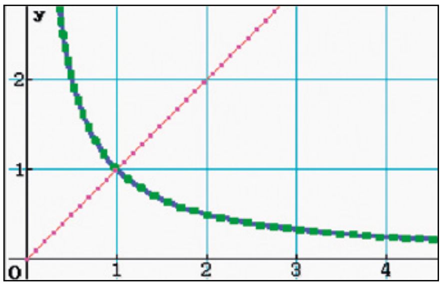
```
judge(f_p(V/2,T,n,R)=2f_p(V,T,n,R))
                                TRUE
judge(f_p(V,2T,n,R)=2f_p(V,T,n,R))
                                TRUE
```

In der nächsten Teilaufgabe sollen zwei Graphen ausgewählt werden, die die Abhängigkeit zweier Zustandsgrößen richtig darstellen (vgl. Originalaufgabe).

Insgesamt vier funktionale Abhängigkeiten, *p(V)*, *V(T)*, *V(p)* und *p(T)*, werden zum Vergleichen in der *Grafik & Tabelle*-Anwendung erstellt. Die konstanten Größen in *f_p (V,T,n,R)* und *f_V (p,T,n,R)* werden auf *1* gesetzt und die unabhängige Variable muss jeweils x sein. Das Aussehen der einzelnen Linien lässt sich durch Antippen der Vorschau [———] ändern. Die ungewohnt große Anzahl von Funktionsargumenten erleichtert hier die grafische Darstellung.

```
y1=f_p(x,1,1,1)
y2=f_V(1,x,1,1)|x>0
y3=f_V(x,1,1,1)
y4=f_p(1,x,1,1)|x>0
```

Mit dem *„with"-Operator (|)* werden die linearen Funktionen auf die positive x-Achse eingeschränkt. Bei den Hyperbeln ist es für den gewählten Ausschnitt des Koordinatensystems nicht unbedingt nötig.



Alternativ kann das Funktionsverhalten auch algebraisch untersucht werden. Am Beispiel des Drucks werden analog die Abhängigkeiten allein vom Volumen oder der Temperatur angezeigt.

```
f_p(V,1,1,1)
                1/V
f_p(1,T,1,1)
                  T
```

b) Bei gleichbleibender Stoffmenge und gleichbleibender Temperatur kann das Volumen des Gases durch die Änderung des Drucks variiert werden.

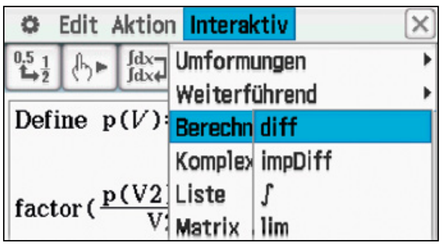
Begründen Sie, warum die mittlere Änderung des Drucks in Abhängigkeit vom Volumen $\frac{p(V_2)-p(V_1)}{V_2-V_1}$ für jedes Intervall $[V_1; V_2]$ mit $V_1 \neq V_2$ ein negatives Ergebnis liefert!

Ermitteln Sie jene Funktionsgleichung, die die momentane Änderung des Druckes in Abhängigkeit vom Volumen des Gases beschreibt!

Der Differenzenquotient kann mit dem ClassPad II auch grafisch bearbeitet werden, hier wird aber die algebraische Untersuchung gezeigt. Zunächst wird die Abkürzung *p(V)* definiert. Die angegebene mittlere Änderung wird mittels der *factor*-Funktion gekürzt. Ein Faktorisieren reicht hier aus, um den Term zu vereinfachen, ein Aufruf des weitergehenden *simplify* ist hier nicht nötig. Das reine Vorzeichen wird mit der *signum*-Funktion und durch die Angabe, dass *T*, *n* und *R* positive Zahlen sind, bestimmt. Für reale Volumina ergibt sich insgesamt ein negatives Vorzeichen.

```
Define p(V)=f_p(V,T,n,R)
                                done
factor((p(V2)-p(V1))/(V2-V1))
                       -R·T·n/(V1·V2)
signum(ans)|{T>0,n>0,R>0}
                     -signum(V1·V2)
d/dV(p(V))
                           -R·T·n/V^2
```

Der analytische Ausdruck für die momentane Änderung lässt sich auf zwei Wegen erzeugen. Zum einen gibt es eine entsprechende Schablone auf dem eingeblendeten Keyboard im Tastensatz Math2, zum anderen ein komfortables Eingabefenster im *Interaktiv*-Menü im Bereich *Berechnungen* unter dem Punkt *diff*. Das gleiche Endergebnis folgt aus der bereits vereinfachten mittleren Änderung zwei Zeilen zuvor mit V1=V2=V.



Weitere Matura-Klausuren des bifie und die Lösungen mit dem ClassPad II finden Sie unter **www.casio-schulrechner.at**

1 Quelle: Bundesinstitut bifie, „Haupttermin 2013/14 – Mathematik (AHS)", www.bifie.at/node/2633

Schneller reich mit niedrigen Zinsen

Autor: Dominik Scala, Marienschule Offenbach

In diesem Beitrag soll gezeigt werden, wie bereits in Klasse 7 die Tabellenkalkulation der ClassWiz-Serie eingesetzt werden kann. Der Themenbereich der Zins- und Zinseszinsrechnung bietet sich hier hervorragend an. Es zeigt sich, dass der Rechner nicht nur Rechenarbeit abnehmen, sondern auch zum Entdeckungs- und Experimentierwerkzeug werden kann. Mit der Tabellenkalkulation der ClassWiz-Serie sind die wichtigsten Grundfunktionen in einem Schultaschenrechner verfügbar, Mathematikunterricht im Informatikraum wird seltener.

Deine beste Freundin hat zum Geburtstag 500 € geschenkt bekommen und möchte das Geld auf die Bank bringen. Diese bietet ihren Kunden zwei verschiedene Typen von Sparkonten an.

A: Dieses Konto bietet einen Jahreszinssatz von 1,8 %, die Zinsen werden nach 12 Monaten zum Guthaben addiert.

B: Das andere Konto bietet einen Monatszinssatz von nur 0,15 %, die Zinsen werden jedoch nach jeweils 30 Tagen gutgeschrieben.

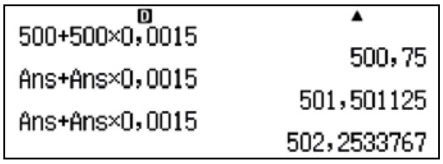
Deine Freundin fragt dich um Rat: Welches Sparkonto ist das bessere?

Die hier vorgestellte Aufgabe ist als Einstieg in die Zinseszinsrechnung konzipiert. Sie setzt die Kenntnis der Begriffe Kapital, Anfangskapital und Zinssatz voraus.

Zuerst wird der Jahreszins (Konto A) berechnet: Kapital = 500 € + 500 € · 0,018 = 509 €

Anschließend wird das Anwachsen des Kapitals K_i auf Konto B untersucht. Um schrittweise an das Prinzip der Zinseszinsrechnung herangeführt zu werden, wird dies zunächst ohne Tabellenkalkulation für die ersten drei Monate berechnet.

Nach 1 Monat	K_1	500 € + 500 € · 0,0015 = 500,75
Nach 2 Monaten	K_2	500,75 € + 500,75 € · 0,0015 ≈ 501,50
Nach 3 Monaten	K_3	501,50 € + 501,50 € ·0,0015 ≈ 502,25

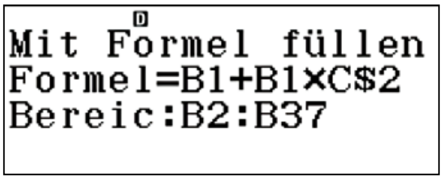


Die ClassWiz-Serie kann in der linearen Anzeige bis zu 6 Zeilen gleichzeitig anzeigen.

Es ist wichtig, dass die Lernenden an dieser Stelle die rekursive Struktur der Rechnung verstehen. Dies fördert ihre Fähigkeiten im Umgang mit den formalen Elementen der Mathematik, es ist Voraussetzung, um die Rechnung zu abstrahieren und in die Tabellenkalkulation zu implementieren. Die fertige Tabelle kann dann wie folgt aussehen:

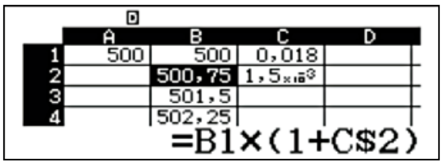
	A	B	C	D
1	500	500	0,018	
2		= B1 + B1 * C$2	0,0015	
		...		
13	= A1 + A1 * C$1	= B12 + B12 * C$2		= B13 - A13
14		= B13 + B13 * C$2		

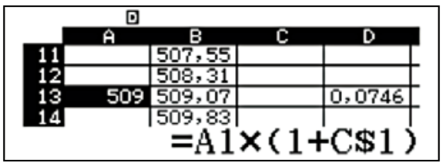
Die Tabellenkalkulation wird aus dem Hauptmenü (MENU) mit der Taste 8 aufgerufen, das $-Zeichen ist unter OPTN verfügbar, dort ist auch der „Mit Formel füllen"-Befehl zu finden.

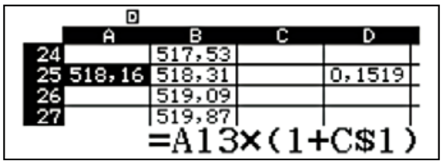


In der Spalte C sind in den Zeilen 1 und 2 die Zinssätze 0,018 bzw. 0,0015 eingetragen. Es bietet sich an, diese Werte durch *absolute Bezüge* in die eigentliche Rechnung einzubinden. Es wird deutlich, von welchen Parametern das Problem abhängt. Bequem können diese Werte verändert werden, ohne die Spalten A und B antasten zu müssen.

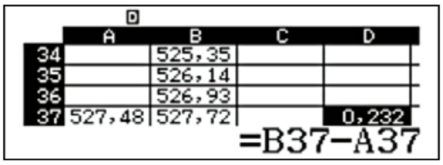
In der zweiten Zeile wird ein *relativer Bezug* auf den Kapitalwert der ersten Zeile gesetzt, während der Bezug auf den Zinssatz *absolut* ist. Durch das Setzen des relativen Bezuges können die restlichen Zeilen einfach aufgefüllt werden („Mit Formel füllen"); in Spalte A wird nur jedes zwölfte Feld gefüllt.







Die letzte Zeile belegt, dass der Übergang vom Jahreszins auf den Monatszins zu einem etwas höheren Endkapital führt.



Diese Tabelle kann genutzt werden, um den Einfluss von Anfangskapital und Zinssatz allgemeiner zu untersuchen. Dazu müssen nur die Einträge in den Zellen A1, B1 und C1 sowie in C2 verändert werden. Durch die Bezüge auf diese Zellen werden alle anderen Zellen automatisch aktualisiert.

Es zeigt sich rasch, dass das Anfangskapital nur als multiplikative Konstante zum Endergebnis beiträgt. Dagegen hat die Veränderung des Zinssatzes eine weit drastischere Auswirkung. Durch Ausprobieren ist es möglich, die Zeit bis zur Kapitalverdopplung zu ermitteln oder die exponentielle Abhängigkeit zu entdecken.

Wer trägt die Bremer Stadtmusikanten?

Es hatte ein Mann einen Esel, der ihm schon lange Jahre treu gedient hatte, dessen Kräfte aber nun zu Ende gingen, sodass er zur Arbeit immer untauglicher ward. Da wollte ihn der Herr aus dem Futter schaffen, aber der Esel merkte, dass kein guter Wind wehte, lief fort und machte sich auf den Weg nach Bremen: 'Dort', dachte er, 'kannst du ja Stadtmusikant werden.'

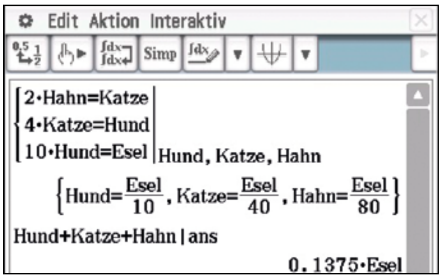
So beginnt das Märchen von den Bremer Stadtmusikanten, welches in Bremen sogar als Denkmal zu bewundern ist. Wie die Anordnung der Tiere zeigt, war mit des Esels Flucht seine schwere Arbeit noch nicht erledigt: Fortan musste er nämlich die anderen Tiere auf seinem Rücken tragen. Und dies, obwohl ein gesunder Esel nur mit einer Traglast belastet werden darf, die nicht mehr als 20 % seiner eigenen Masse entspricht.

Um zu überprüfen, ob der arme Esel unter der Last seiner Mit-Musikanten zusammenbrechen könnte, werden die Informationen zusammengestellt:

- die Katze war doppelt so schwer wie der Hahn,
- der Hund viermal so schwer wie die Katze und
- der Esel war zehnmal so schwer wie der Hund.

Anhand dieser Angaben wird ein Gleichungssystem aufgestellt, aus welchem sich die Traglast durch Hund, Katze und Hahn in Abhängigkeit von der Masse des Esels ergibt.

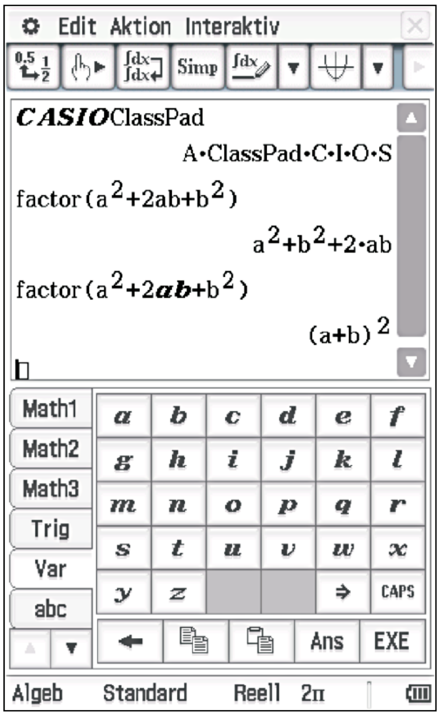
Im ClassPad II sieht die Rechnung wie folgt aus:



Die oben genannten Bedingungen ergeben eine Traglast, die 13,75 % der Esel-Masse entspricht. Da der Esel aus dem Märchen schon am Ende seiner Kräfte gewesen ist, bevor die anderen Tiere auf seinen Rücken gestiegen sind, ist eine derartige Traglast sicherlich am Rande des Zumutbaren. Das ganze Märchen lastet wortwörtlich auf dem Rücken des armen Esels.

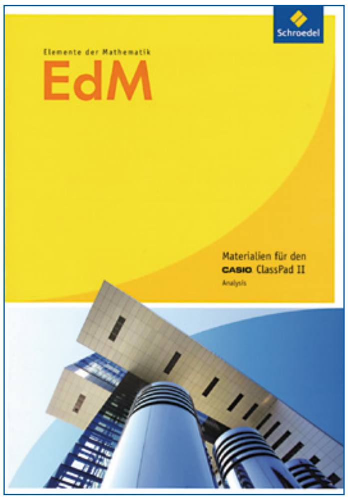
Aber die Moral von der Geschichte ist eine ganz andere: Der ClassPad II rechnet nicht nur mit Variablen, die aus einem Buchstaben bestehen (etwa x oder y), sondern auch ganz wunderbar mit Tieren!

Ergänzung:
Es gibt beim ClassPad II eine Unterscheidung zwischen den dick-kursiv gedruckten Ein-Buchstaben-Variablen aus der *Var*-Tastatur, die automatisch nur aus einem Buchstaben bestehen, und den anderen Variablen. Diese können aus bis zu 8 Zeichen langen Buchstabenketten bestehen und werden beispielsweise über die *abc*-Tastatur eingegeben. Im Screenshot sind die Eigenheiten der unterschiedlichen Variablen und mögliche Fehlerquellen zu erkennen:



Buchtipp

Elemente der Mathematik / Materialien für ClassPad II



ISBN: 978-3-507-73209-4 bzw.
ISBN: 978-3-507-73210-4

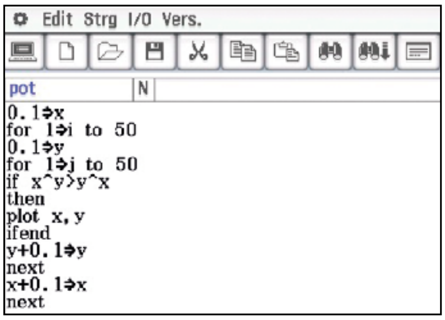
Für die bundesweite Ausgabe der EdM Reihe aus dem Schroedel Verlag sind jetzt Materialien für den ClassPad II verfügbar. Die Materialien sind für die Analysis und die Lineare Algebra / Analytische Geometrie / Stochastik in 2 Heften verfügbar und können bei CASIO oder direkt beim Schroedel Verlag bestellt werden.

Was ist größer, x^y oder y^x?

Autor: Dr. Jens Weitendorf, Gymnasium Harksheide, Norderstedt

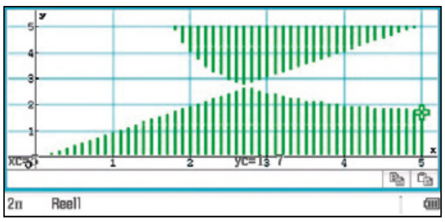
Der Artikel soll Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes des ClassPad aufzeigen. Er bewegt sich inhaltlich an der Grenze, was in der Schule noch behandelt werden kann. Auf der anderen Seite bieten sich aber auch Differenzierungsmöglichkeiten an. Den Ausgangspunkt bildet die Frage, für welche Wertepaare (x,y) gilt: $x^y > y^x$? Für einzelne Werte ist dies überprüfbar. Es sollen aber alle Paare bestimmt werden, für die die Ungleichung richtig ist. Dies geschieht in einem Wechselspiel zwischen Untersuchungen und Überprüfungen mit dem ClassPad und der Benutzung von mathematischem Hintergrundwissen. Neben der Diskussion des Rechnereinsatzes werden mathematische Arbeitsweisen erkennbar. Dieser Artikel ist eine gekürzte Version des gleichnamigen Beitrags aus dem Buch „Unterrichtspraktische Beispiele mit CAS- & graphikfähigen Taschenrechnern“.

Einen ersten Überblick verschafft ein experimenteller Zugang mit dem folgenden Programm. Es untersucht die Werte $0{,}1 \le x$ und $y \le 5$ mit einer Schrittweite von 0,1.



```
0.1⇒x
for 1⇒i to 50
0.1⇒y
for 1⇒j to 50
if x^y>y^x
then
plot x,y
ifend
y+0.1⇒y
next
x+0.1⇒x
next
```

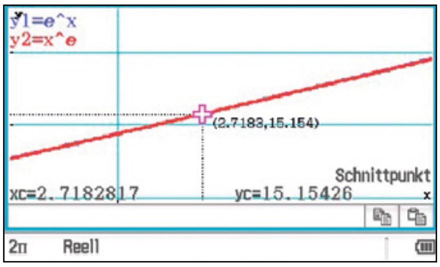
Den gewünschten Überblick liefert die vom Programm erstellte Grafik:



Aus der gewonnenen Grafik ergeben sich zwei Fragestellungen:

1) Die eine Grenzfunktion hat die Gleichung $g_1(x) = x$, welche beschreibt die zweite Funktion $g_2(x)$?
2) Für den Schnittpunkt der beiden Grenzfunktionen gibt es nur eine Lösung der Gleichung $x^y = y^x$, sie lautet $x = y = e$.

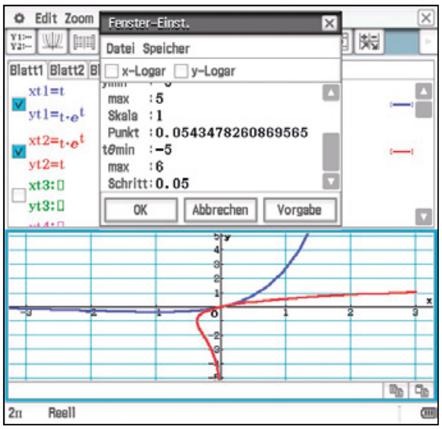
Bestätigt wird dies durch die Schnittpunktbestimmung im Grafik-Menü.



Dies ist natürlich kein Beweis. Eine exakte Begründung und eine Antwort auf die 1. Frage liefert ein tieferer Einstieg in die mathematische Theorie.

Für den Beweis wird die Lambertsche W-Funktion benötigt. Diese ist implizit durch die Gleichung $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$ gegeben, sie ist die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$. Wird für die grafische Darstellung der Parametertyp gewählt, so werden die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion in einem Schaubild dargestellt.

Die Abbildung zeigt, dass die Lambertsche W-Funktion für $x < 0$ zwei Werte hat, deswegen ist die Beschränkung auf einen „Zweig“ nötig. Die entsprechende Einschränkung liefert der Extremwert der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$: E(-1;-1/e)



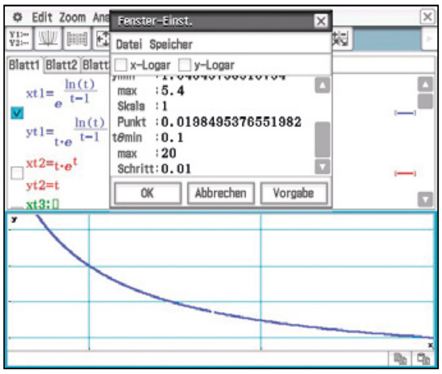
Daher liegt der kritische Punkt der Lambertschen W-Funktion bei P(-1/e;-1). Fehlt noch der Bezug zum Problem. Um diesen Zusammenhang zu erkennen, muss die Gleichung $x^y = y^x$ auf die Form $W(x) \cdot e^{W(x)} = x$ gebracht werden. Hierbei hilft ein CAS leider nicht.

Die Lösung bringt der Ansatz $y = k \cdot x$ mit $k > 0$ und entsprechenden Umformungen, auf die hier verzichtet wird.

Bestimmung der zweiten Grenzfunktion

Der gleiche Ansatz hilft auch bei der Bestimmung der zweiten Grenzfunktion, die leider nicht in geschlossener Form angegeben werden kann. Es ist aber die Parameterdarstellung bekannt, die grafisch darstellbar ist.

$x(t) = e^{\frac{\ln(t)}{t-1}}$ und $y(t) = t \cdot e^{\frac{\ln(t)}{t-1}}$



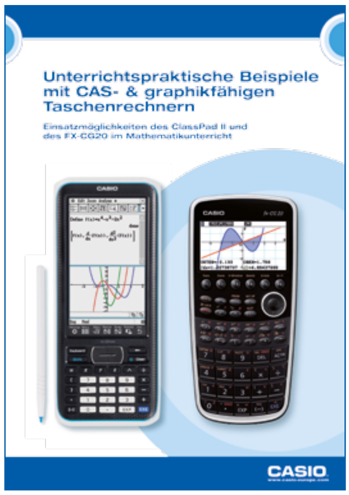
Ein Vergleich der Abbildungen zeigt, dass der Graph den gewünschten Verlauf hat.

Mir ist bewusst, dass die Behandlung der Problematik im Unterricht ein hohes mathematisches Abstraktionsniveau erfordert. Sie zeigt deutlich, was mathematisches Arbeiten bedeutet und welche Unterstützung dabei ein CAS-Rechner darstellt. Deswegen ist sie sicher auch für Mathematikstudenten hilfreich.

Buchtipp

Unterrichtspraktische Beispiele mit CAS- & graphikfähigen Taschenrechnern

In Zusammenarbeit mit der Universität Würzburg sind verschiedene Unterrichtsbeispiele zu Grafikrechnern mit und ohne CAS entstanden, die in diesem Buch zusammengefasst wurden.



ISBN: 978-3-941321-35-9

Expertenmeinung

Warum sollte man Grafikrechner nutzen?

Autor: Prof. Dr. Gilbert Greefrath, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster

Der Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern wird aktuell intensiv diskutiert. Obwohl der Einsatz solcher Geräte in großen Studien (M3, CASI, CASSIS, CALiMERO, CiMS, SINUS Transfer, MaBiKoM, ...) in Deutschland bereits erprobt, detailliert untersucht und positiv evaluiert wurde, gibt es von verschiedenen Seiten Zweifel am Sinn des Einsatzes im Mathematikunterricht. Die Diskussion geht dabei jedoch in zwei unterschiedliche Richtungen:

Sollte im Mathematikunterricht nur ohne digitale Mathematikwerkzeuge gearbeitet werden?

Vielfach wird der Verlust händischer Fertigkeiten im Mathematikunterricht beklagt. Daher wird häufig von Lehrkräften die Verwendung digitaler Werkzeuge abgelehnt. Im Mathematikunterricht sollte man aber nicht nur mit „Papier und Bleistift" arbeiten. Die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife sehen auch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge vor. Zu diesen Werkzeugen zählen unter anderem grafikfähige Taschenrechner. Sie können beim Entdecken mathematischer Zusammenhänge, insbesondere beim Modellieren und Problemlösen, zur Verständnisförderung für mathematische Zusammenhänge, zur Verarbeitung größerer Datenmengen sowie zur Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von Kontrollmöglichkeiten eingesetzt werden.

Die technischen Möglichkeiten digitaler Werkzeuge schaffen darüber hinaus neue Möglichkeiten für die Unterrichtsgestaltung. Schülerinnen und Schüler können beispielsweise durch Kontrollmöglichkeiten stärker eigenverantwortlich arbeiten. Möglichkeiten des Experimentierens und Erkundens können besonders in individuellen und kooperativen Arbeitsphasen genutzt werden. So können gerade ständig verfügbare digitale Werkzeuge wie grafikfähige Taschenrechner im Unterricht die Lehrkräfte entlasten. Studien haben gezeigt, dass durch geeignete Unterrichtskonzepte, einschließlich Tests mit hilfsmittelfreien Teilen, die händischen Fertigkeiten gleichzeitig erhalten und gefördert werden können. Im Mathematikunterricht sollten also sowohl Kompetenzen ohne als auch mit digitalen Mathematikwerkzeugen vermittelt werden.

Sollten im Mathematikunterricht modernere und mächtigere digitale Mathematikwerkzeuge eingesetzt werden?

Bei der Frage, welche Alternativen zur Verfügung stehen, müssen zunächst die Anforderungen an digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht bedacht werden. Hier sollten natürlich die Möglichkeiten des Einsatzes besonders in den Blick genommen werden. Ideal sind dazu Geräte oder Software, die einen möglichst vielfältigen Einsatz im Sinne der Bildungsstandards ermöglichen. Hierzu sind sicherlich modernere und mächtigere Geräte wie Tablet-Computer oder Laptops mit Funktionsplotter, Geometriesoftware, Tabellenkalkulation, Statistikanwendung, Messwerterfassung etc. sehr gut geeignet.

Jedoch zeigt die Erfahrung, dass digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht nur dann dauerhaft eingesetzt werden, wenn sie auch in den Prüfungen benutzt werden dürfen. Deshalb müssen die eingesetzten Geräte sowohl dem Schulalltag gewachsen sein als auch in Prüfungen verwendet werden können und dürfen.

Die ständige Verfügbarkeit, die Robustheit und die Nutzung in Prüfungen sind also Punkte, die ebenfalls bedacht werden sollten. Um beispielsweise bei Prüfungen gleiche Ausgangsbedingungen herzustellen, müssen alle vorher gemachten Eingaben gelöscht werden, während die zur Prüfung notwendigen Programme erhalten bleiben. Dies sollte technisch möglichst einfach und schnell durchführbar sein. Außerdem muss die drahtlose Kommunikation während der Prüfung ausgeschlossen sein. Hierzu sind grafikfähige Taschenrechner sehr gut geeignet.

Dies sind Gründe, warum Grafikrechner nach aktuellem Stand sinnvoll in der Schule genutzt werden können. Alternativen werden durch die fortschreitende technische Entwicklung geschaffen werden.

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit:
www.casio-schulrechner.de

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.00.2
ClassPad 330 Plus	3.10.3
ClassPad 330/300 Plus	3.06.3
FX-CG20	2.0
FX-9860GII/SD	2.04
Software	
ClassPad II Manager	2.00.2
ClassPad Manager	3.06
FX-CG20 Manager	2.0
FX-Manager Plus	2.04

Stand: Dezember 2014

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team umfassend bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Vertriebspartner:
Österreich: Ivo Haas Lehrmittelversand und Verlag Ges.m.b.H
Saalachstraße 36 • 5013 Salzburg
Tel.: 0662/430 567-0 • E-Mail: casio@ivohaas.com
Schweiz: Campus Equipment
Georges Vorburger
Kerbelweg 2 • 9470 Buchs SG
Tel.: 081/756 75 55 • E-Mail: vorburger@taschenrechner.ch

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Bildquellen:
S. 1: M. Mettin, S. 3: T. Selinger

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

4 971850 092063
115SGR-Forum17