2.3 Polynom vom Grad 2

Titel	V2- 2-3 Polynom vom Grad 2
Version	Mai 2010
Themenbereich	Von der Sekanten- zur Tangentensteigung
Themen	Verfeinerung der Intervalle zur Bestimmung der Steigung an einzelnen Punkten eines Graphen
Rolle des GTR	Berechnungen mit einer Tabellenkalkulation bzw. Aufstellen von Wertetabellen
Methoden & Hinweise	Einführungsaufgabe Diese Aufgabe dient als <u>ein</u> Beispiel zur Hinführung zur Tangentensteigung – weitere müssen folgen. Sekantensteigungen wurden im vorher stattfindenden Unterricht bereits bestimmt. Hier soll nun die „Verfeinerung“ der Sekantensteigung zur Tangentensteigung zunächst rechnerisch an einer Stelle durchgeführt werden. Empfehlenswert ist es die Schülerinnen und Schüler zunächst den Prozess manuell an einer Stelle durchführen zu lassen (Aufgabenteil a)) – das GTR übernimmt dabei nur die Rolle eines (intelligenten) Taschenrechners zur Funktionswertbestimmung. Für den Kreis gibt es eine recht gelungene Demonstration mit Übungen im Internet unter: http://www.e-teaching-austria.at/geometrie/5_schulstufe/adi_tangente/modul_tangente.html Gerade weil die Schülerinnen und Schüler noch keinen formalen Grenzwertbegriff kennen, wird die immer bessere Annäherung an die Tangentensteigung für immer kleiner werdende *h* gut veranschaulicht. Die (kleinen) Taschencomputer haben eine Grenze, was die Anzahl der vertrauenswürdigen Stellen betrifft. Es bietet sich an, hier die DERIVE-Datei aus der Materialsammlung einzusetzen, mit der man die Steigung mit immer besser werdender Genauigkeit bestimmen kann.
Quelle	CiMS
Zeitlicher Rahmen	1 Schulstunde

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = x^2 + 1$. Den Graphen finden Sie in der Anlage.

a. Bestimmen Sie grafisch die Steigung der Funktion *f* an der Stelle $x_0 = 1$.

- mit dem Geodreieck,
- mit der Spiegelmethode.
  Die Spiegelmethode ist eine grafische Möglichkeit recht genau Tangenten an Kurven zu zeichnen. Grundidee dabei ist, den (planen) Spiegel so an die Kurve zu legen, dass diese sich im Spiegelbild knickfrei fortsetzt. Die Spiegeloberfläche (genauer gesagt deren Schnittgerade mit der Zeichenebene) entspricht dann der Normalen. Die Tangente liegt dann senkrecht dazu.[2]

Vergleichen Sie die Ergebnisse.

b. Ermitteln Sie nun rechnerisch die Steigung der Funktion *f* an der Stelle $x_0 = 1$.
Bestimmen Sie dabei die Steigungen der Sekanten durch $P = (1|2)$ und $Q = (1+h|f(1+h))$ und lassen Sie das *h* immer kleiner werden.
In der unten stehenden Tabelle sind nur einige Werte für *h* angeben. Bestimmen Sie die Steigung der Sekanten für sinnvoll viele *h* und übertragen Sie die vervollständigte Tabelle in Ihre Unterlagen.

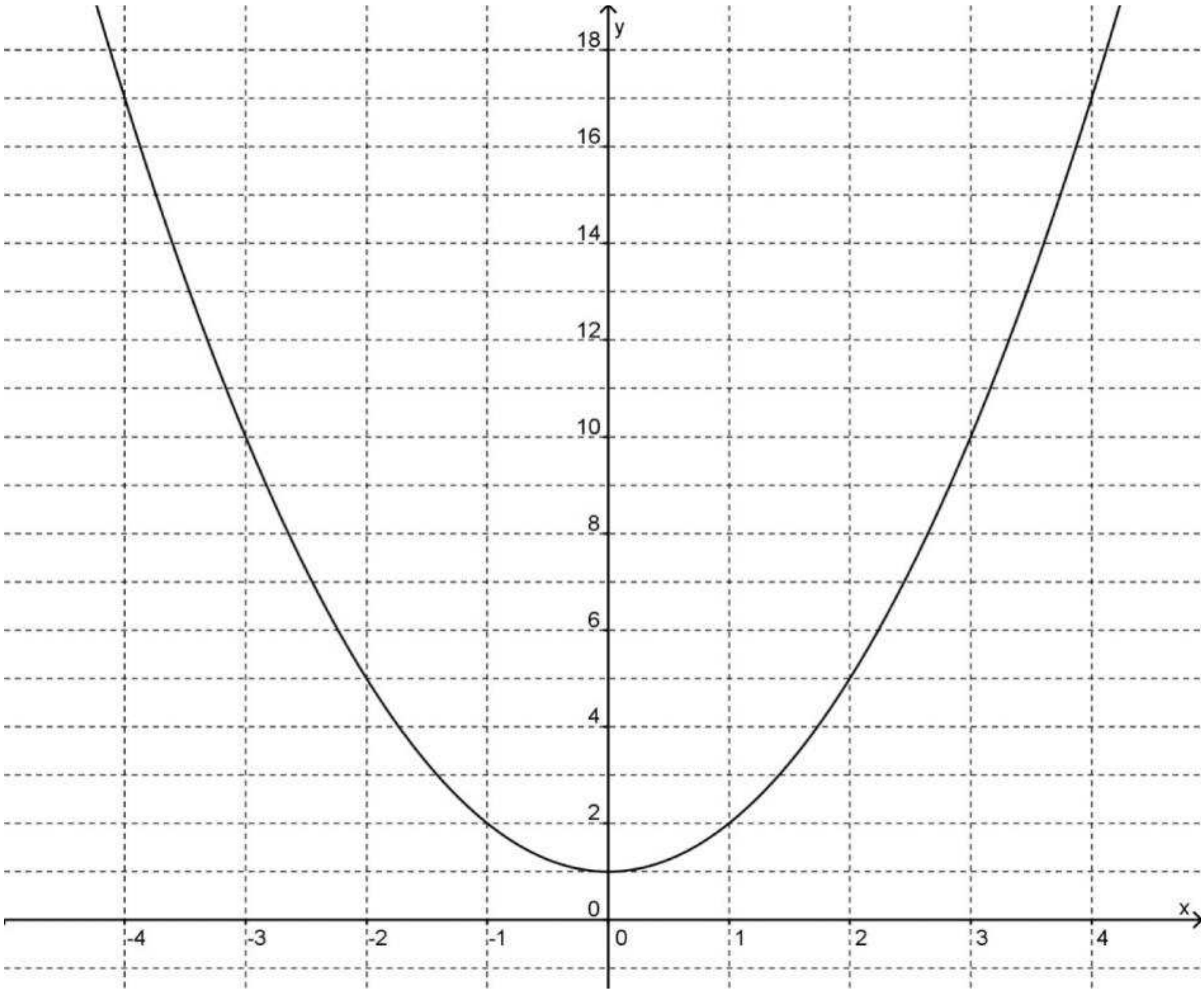
h	$1+h$	$f(1+h)$	Steigung der Sekanten
1	2		
$\frac{1}{10}$	1,1		
$\frac{1}{100}$	1,01		
$\frac{1}{1000}$	1,001		
…	…		
–1	0		
$-\frac{1}{10}$	0,9		
$-\frac{1}{100}$	0,09		
$-\frac{1}{1000}$	0,009		
…	…		

c. Geben Sie eine Vermutung über die Steigung der Tangente an dem Graphen von *f* an der Stelle $x = 1$ an. Das entspricht der Steigung des Graphen an der Stelle $x = 1$.

d. Bestimmen Sie analog die Steigung des Graphen an den Stellen
a. $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ und $x = -4$.

[2]Zur Spiegelmethode erhalten Sie weitere Informationen unter:
http://www.e-teaching-austria.at/geometrie/5_schulstufe/adi_tangente/modul_tangente.html

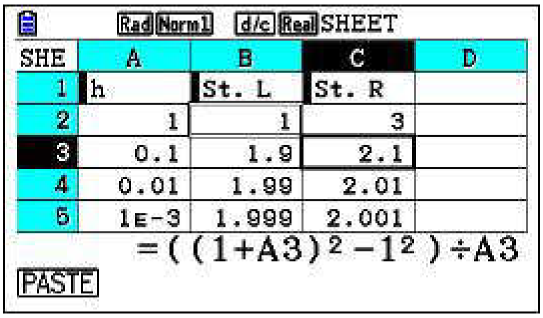
Anlage



a. Je nach Genauigkeit ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse. Siehe Aufgabenteil b)

b. *Hinweis: Schülerinnen und Schüler werden wahrscheinlich nicht (wie im Folgenden) mit einer Folge für h arbeiten, sondern die entsprechenden Werte direkt eingeben. Das sollte man dann auch so akzeptieren.*

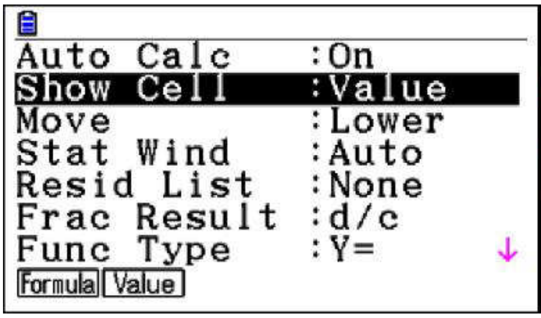
Bestimmt werden die Sekantensteigungen nach der Formel $m_{1;h} = \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}$

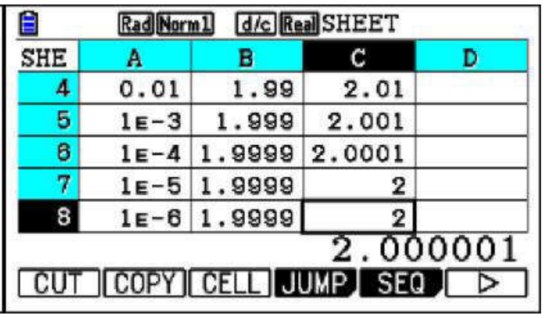


Je nach Rechnerkapazität erhält man die folgenden Werte.

Anhand dieser Daten bietet es sich an, mit den Schülerinnen und Schüler auch über Rechenkapazitäten und Genauigkeit von Ergebnissen zu reden.

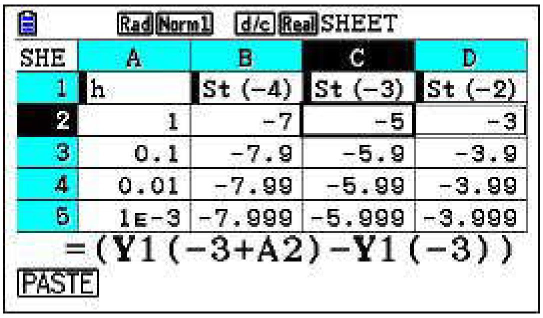
Tipp: Im Setup der Tabellenkalkulation des GTR lässt sich die Anzeige am unteren Bildschirmrand von „Formel“ (Formula) auf „Wert“ (Value) umstellen. Damit kann der exakt errechnete Wert abgelesen werden.





c. Als Vermutung ergibt sich für die Steigung der Tangenten der Wert 2. Die Steigung wird als Grenzwert der Sekantensteigungen (für immer kleiner werdendes *h*) angesehen.

d. „Rechtsseitige“ Annäherung.
Die Stellen kann man in den Tabellenüberschriften ablesen.



e. „Linksseitige“ Annäherung erfolgt analog zur „Rechtsseitigen“