

2.5 Steigung eines Polynoms

Titel	V2- 2-5 Steigung eines Polynoms
Version	Juli 2011
Themenbereich	Von der Sekanten- zur Tangentensteigung
Themen	Verfeinerung der Intervalle zur Bestimmung der Steigung an mehreren Punkten eines Graphen im Hinblick auf die (gesamte) Ableitungsfunktion
Rolle des GTR	Berechnungen mit einer Tabellenkalkulation bzw. Aufstellen von Wertetabellen, Zeichnen von Graphen
Methoden & Hinweise	<p>Diese Aufgabe ist sehr ähnlich zur Aufgabe V2 –2-4 Polynom vom Grad 3. Nur ist diese Aufgabe (etwas) offener formuliert und der Funktionsterm ist nicht vorgegeben.</p> <p>Dadurch kann (auch) arbeitsteilig gearbeitet werden. Gute Schülerinnen und Schüler können sich um die Bestimmung des Funktionsterms kümmern, während die übrigen Schülerinnen und Schüler die graphischen Teile der Aufgabe bearbeiten.</p> <p>Der Hilfstext zum Finden des Funktionsterms befindet sich zwar auf dem Aufgabenblatt, er sollte den Schülerinnen und Schüler aber nur bei Bedarf zur Verfügung gestellt werden.</p> <p>Auch in dieser Aufgabe wird wieder Wert darauf gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler immer wieder Ableitungsfunktionen auch händisch, d. h. ohne Zuhilfenahme des GTR, zeichnen können. Dieses sollte auch in Klausuren abgefragt werden.</p> <p>Auch Schätzungen von Steigungen (an beliebigen Graphen) können als (Stunden-)Einstieg dienen.</p> <p>Die Überprüfung der Ergebnisse ist (als Grundhaltung) für Schülerinnen und Schüler wichtig. In dieser Aufgabe wird das zeichnerische Verfahren rechnerisch überprüft. Die Überprüfung der Ergebnisse kann aber auch durch unterschiedliche Gruppenarbeitsphasen erfolgen.</p> <p>Sollten Schülerinnen und Schüler den Funktionsterm nicht herausbekommen, macht es Sinn, diesen den Funktionsterm zu nennen.</p> <p>Der Aufgabenteil d) eignet sich gut zur Einführung der Sekantensteigung- bzw. Differenzenquotientenfunktion.</p> <p>Als Hausaufgaben bieten sich entsprechende Aufgaben mit einer Variation des Funktionsterms an.</p>
Quelle	CiMS
Zeitlicher Rahmen	1 Stunde

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Gegeben ist der Graph eines Polynoms. Siehe Anlage 1.

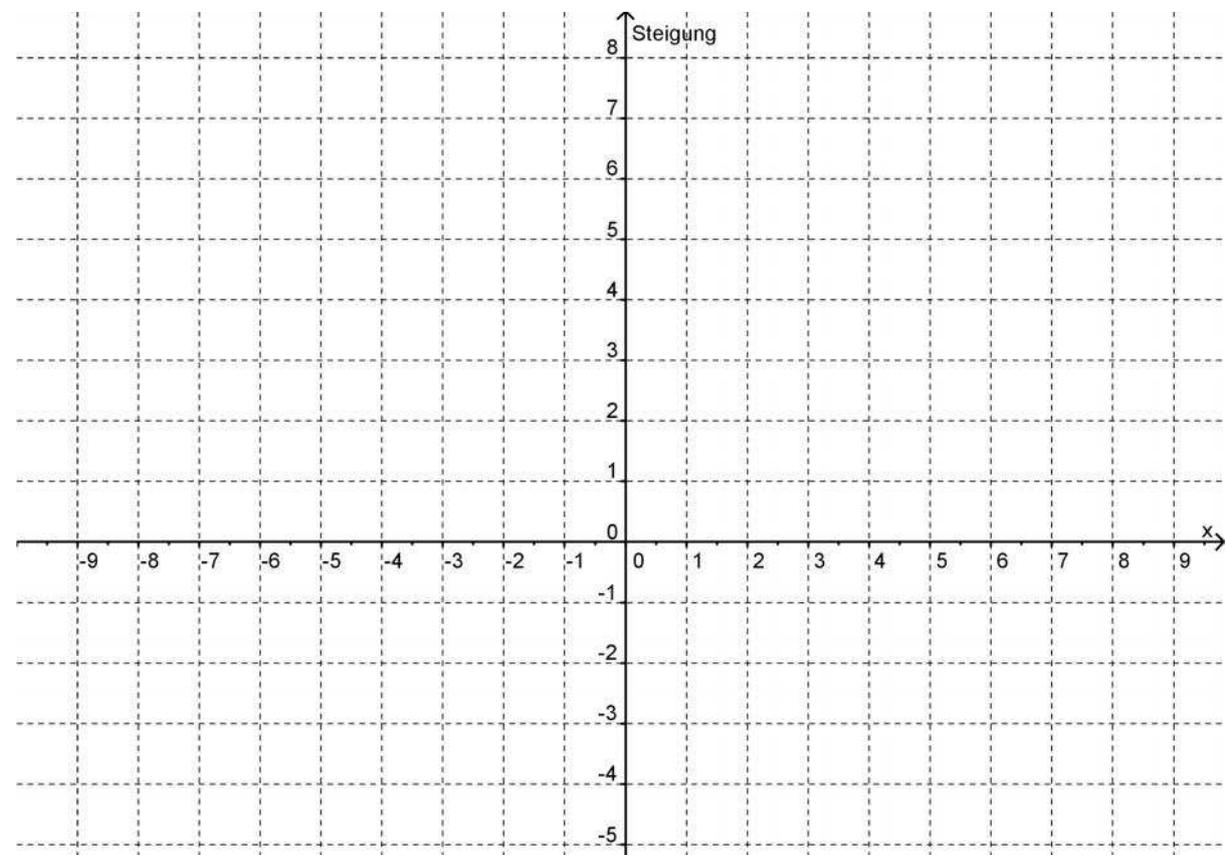
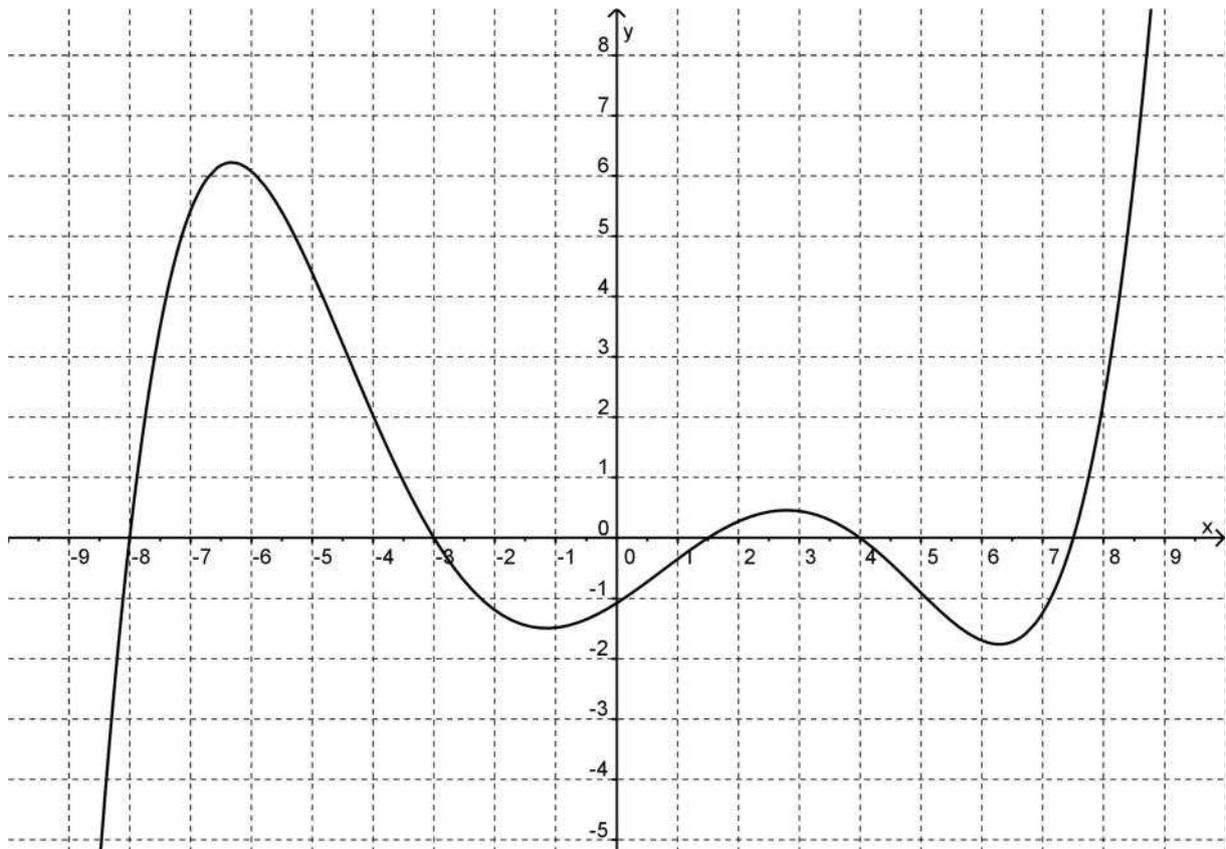
- Bestimmen Sie grafisch (mindestens) die Steigungen an den Stellen $x_1 = -7$ und $x_2 = 5$ und zeichnen Sie anschließend den Graphen der Steigungsfunktion in das untere Koordinatensystem der Anlage 1 ein.
- Bestimmen Sie grafisch die Stellen, an denen der Graph eine Steigung von 100 % hat.
- Überprüfen Sie die Aufgabenteile a) und b) nun rechnerisch mithilfe Ihres GTR.
D. h. suchen Sie eine Funktionsvorschrift für f und überprüfen Sie rechnerisch die Steigungswerte aus dem Aufgabenteil b).



Hinweise:

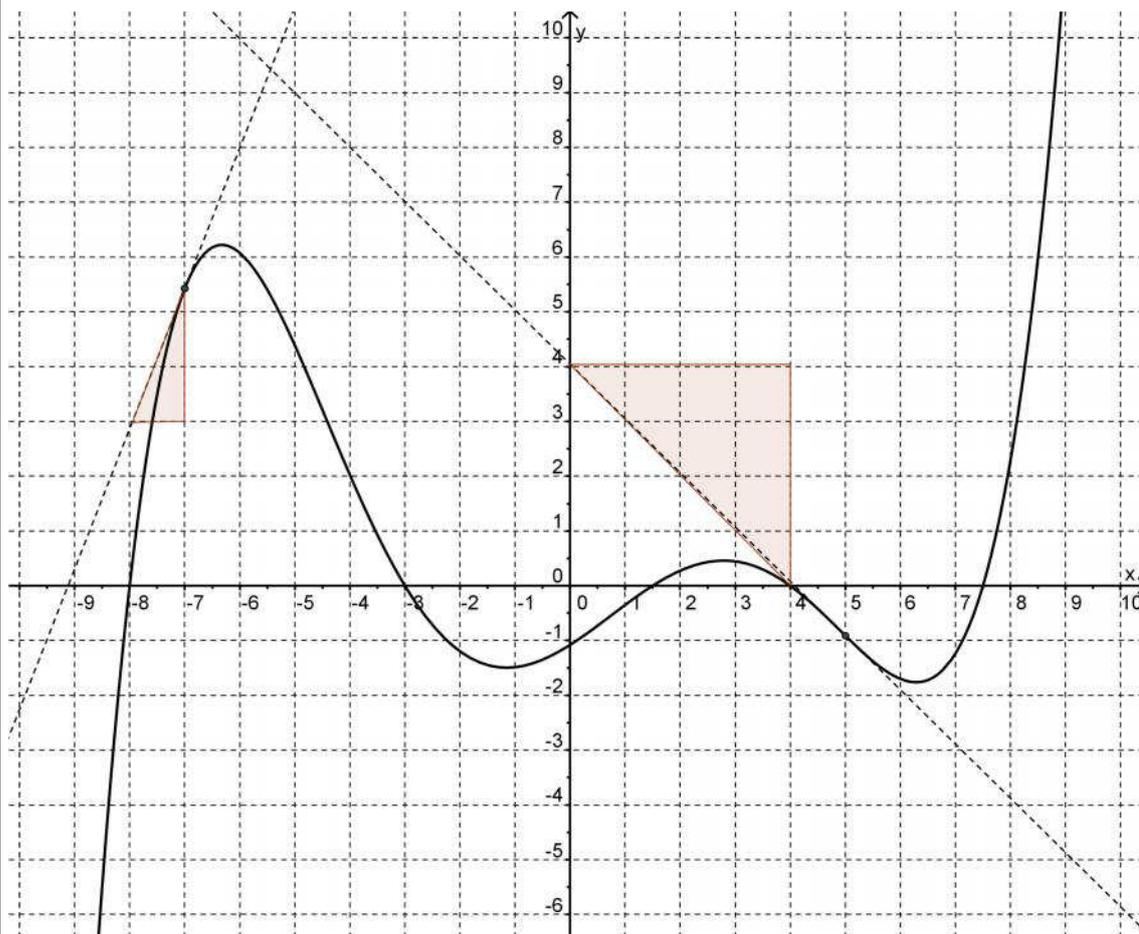
- *Bestimmen Sie den Mindestgrad der Funktion.*
 - *Benutzen Sie eine Linearfaktorenzerlegung $p_n(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$.*
 - $f(0) \approx -1,08$.
- Überlegen Sie sich eine Möglichkeit, den Funktionsterm der Steigungsfunktion mit Ihrem Taschencomputer mit einer guten Näherung zu zeichnen, ohne dessen Funktionsterm zu kennen.

Anlage 1



Von der mittleren zur lokalen Änderung

a. Die Steigung kann grafisch durch Steigungsdreiecke bestimmt werden.



Es ergeben sich annähernd $f'(-7) \approx 2,6$ und $f'(5) \approx -1$.

Schülerinnen und Schüler erhalten natürlich nicht das entsprechende Bild wie unten. Sie sollten allerdings die Maximalstellen des Ableitungsgraphen und andere wichtige Punkte bestimmenbestimmen.

$$f'(-4,5) \approx -2,4$$

$$f'(0,7) \approx 0,8$$

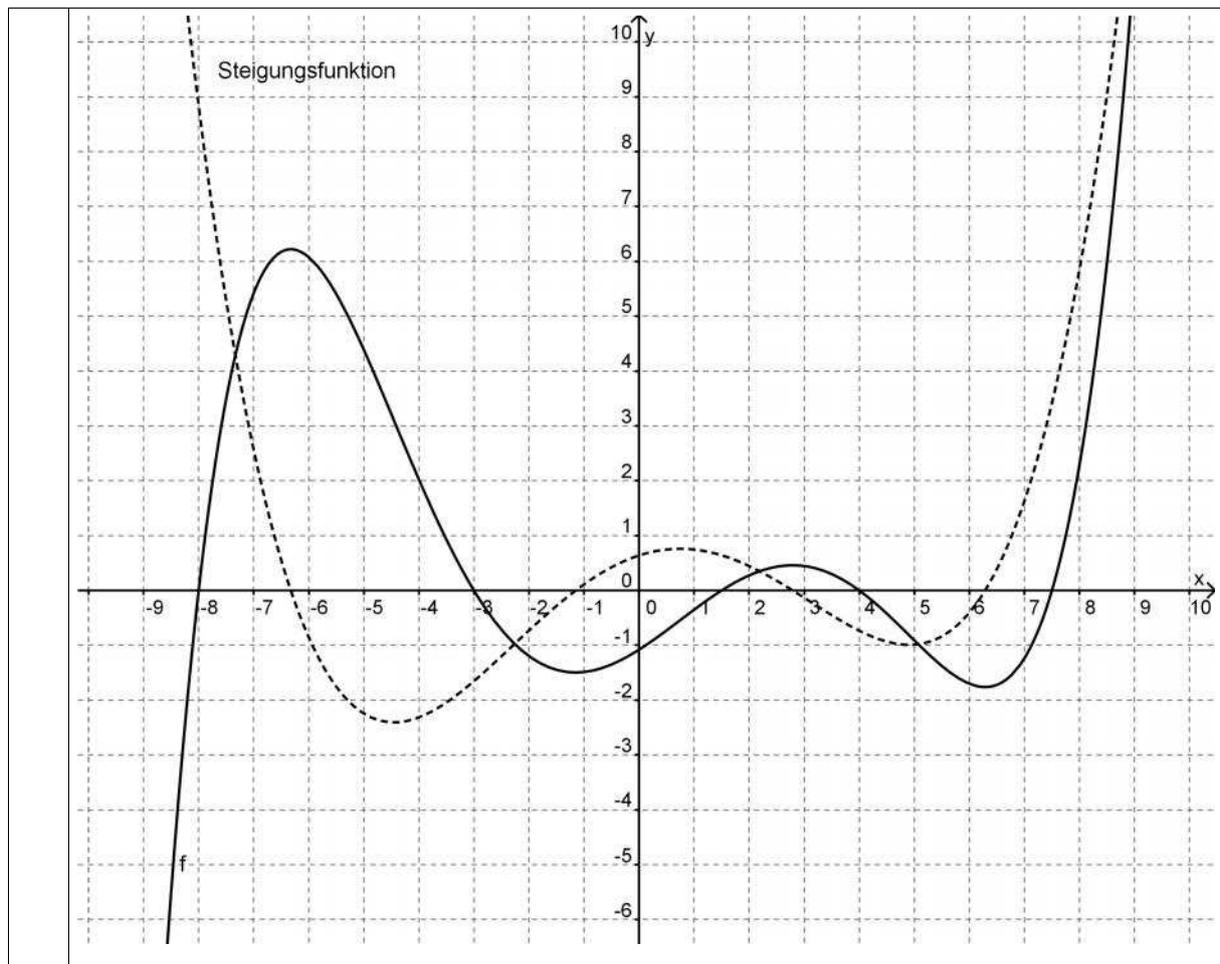
$$f'(5) \approx 1,6$$

$$f'(7) \approx 1,6$$

$$f'(8) \approx 5,9$$

$$f'(-8) \approx 8,8$$

Von der mittleren zur lokalen Änderung

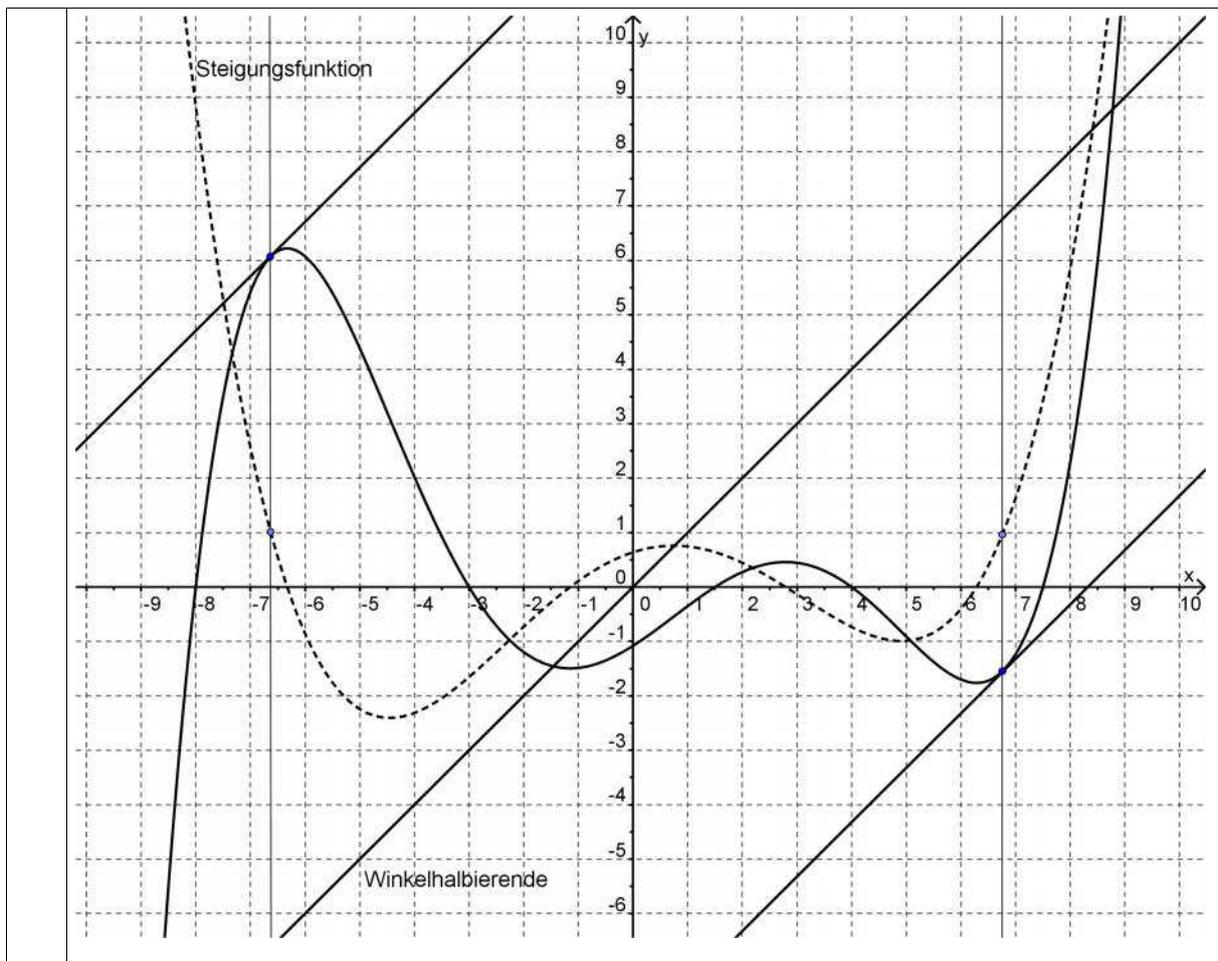


- b. Eine Steigung von 100 % ist gleichbedeutend mit einem Winkel von 45° , d. h. die Steigung der Tangenten beträgt. 1

Zeichnet und verschiebt man Winkelhalbierende des ersten Quadranten so, dass sie den Graphen berührt, findet man $x_{1_100\%} \approx -6,6$ und $x_{2_100\%} \approx 6,8$.

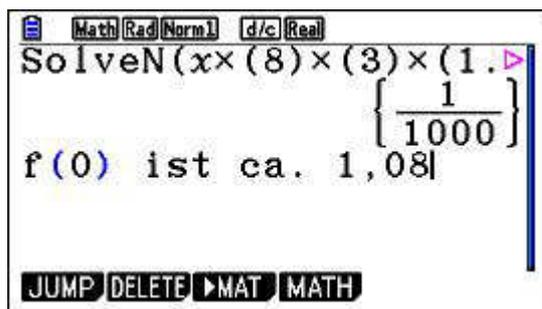
Analog kann man nach den Stellen suchen, an denen die Steigung -1 beträgt. Hier muss nur die Winkelhalbierende des zweiten Quadranten genommen werden. Es folgt $x_{3_100\%} \approx -5,9$ und $x_{4_100\%} \approx -2,3$.

Von der mittleren zur lokalen Änderung



- c. Damit eine rechnerische Überprüfung erfolgen kann, muss der Funktionsterm bekannt sein.

Vorgeben war, dass es sich um ein Polynom handelt. Die Nullstellen kann man aus dem Graphen ablesen. Es sind 5 Nullstellen, also ist der Mindestgrad 5 und mithilfe der Linearfaktorzerlegung erhält man den Ansatz



Damit hat man nun den Funktionsterm

$f(x) = 0,001 \cdot (x+8)(x+3)(x-1,5)(x-4)(x-7,5)$ und man kann die Rechenverfahren der vorherigen Aufgaben anwenden.

Die Ergebnisse entsprechen in guter Näherung denen aus Aufgabenteil b).

- d. Die (rechtsseitige) Sekantensteigungsfunktion $sekmf$ von f , für festes und kleines h mit $sekmf(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ leistet das Verlangte. Man muss nur beachten, dass h nicht zu
- groß ist, damit die Ergebnisse nicht zu ungenau werden,
 - klein ist, damit keine unsinnigen Ergebnisse herauskommen.
- Entsprechend kann man auch mit der linksseitigen Sekantensteigungsfunktion arbeiten.
- Hinweis: Diese Sekantensteigungsfunktion ist für Schülerinnen und Schüler nicht so einfach und muss im Klassengespräch vertieft werden.*