

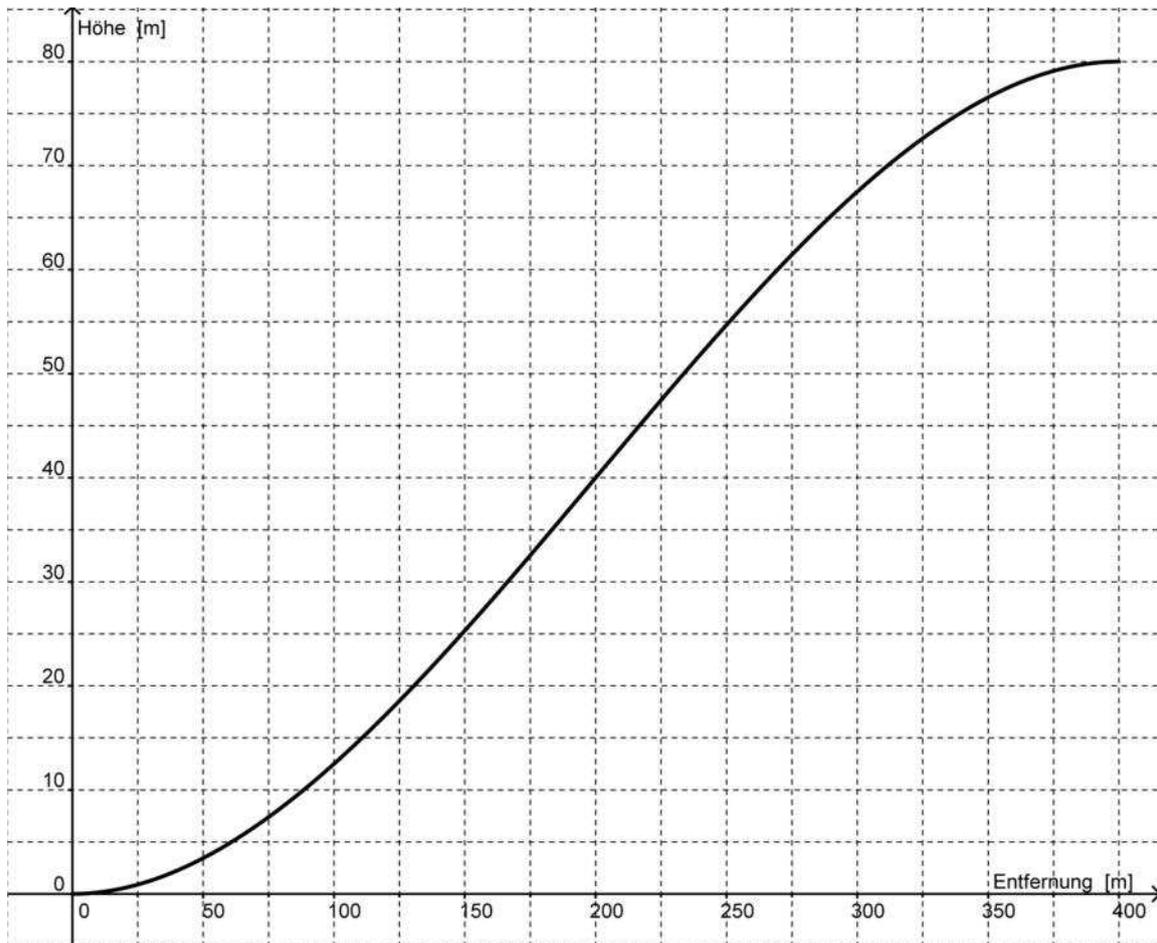
4. Übungen

4.1 Bergstraße

Titel	V2 – 4-1 Bergstraße
Version	Mai 2010
Themenbereich	Übungen zur Ableitung
Themen	Steigungen von Straßen
Rolle des GTR	Lösen von Gleichungen Berechnungen von Ableitungen Umformungen von Termen
Methoden & Hinweise	Übungsaufgabe
Quelle	Unbekannt
Zeitlicher Rahmen	20 Minuten

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Das folgende Schaubild stellt das Profil einer Bergstraße dar.



Nachdem im letzten Winter zahlreiche Fahrzeuge auf der Bergstraße liegen geblieben sind, beauftragt die Verkehrsbehörde ihren Mitarbeiter Willibald Schilda, die Aufstellung eines Hinweisschildes zu veranlassen.

An welcher Stelle bzw. welchen Stellen sollte Waldemar dieses Schild aufstellen?

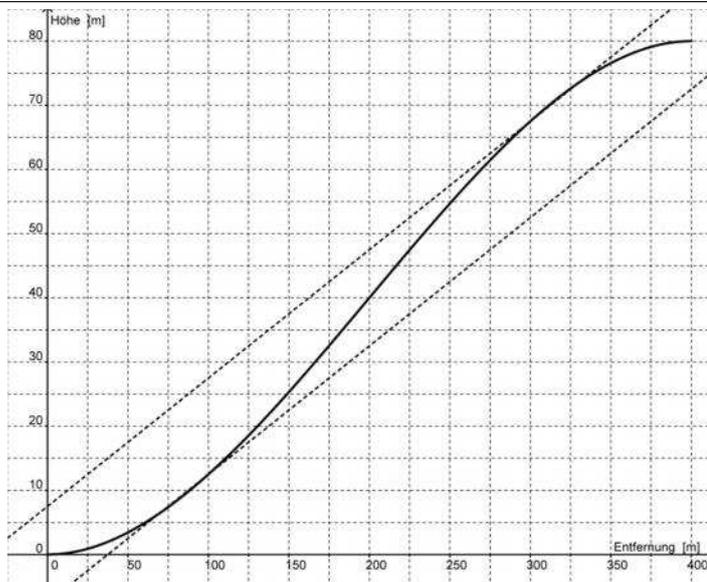


- Überlegen Sie zunächst, was unter einer Steigung von 20 % zu verstehen ist.
- Zeichnen Sie eine Gerade mit der Steigung von 20 % in das Koordinatensystem ein. Untersuchen Sie mithilfe des Geodreiecks, an welcher Stelle der Graph diese Steigung erreicht. Lesen Sie die zugehörigen Punktkoordinaten ab.
- Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung zum obigen Graphen.
- Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion zu der gefundenen Funktion und benutzen Sie diese, um die Stellen mit der Steigung 20 % zu bestimmen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil b).
- Würden Sie genauso wie die Verkehrsbehörde anweisen? Was würden Sie anders machen? Wo würden Sie die Hinweisschilder aufstellen? Begründen Sie Ihre Meinung.

Von der mittleren zur lokalen Änderung

a. Als Steigung ist hier der jeweilige Anstieg des Graphen bzw. der jeweiligen Tangente, in Prozent gemeint, also: $f'(x) \cdot 100\%$.

b. Setzt man $g(x) = 0,2x + a$, $a = \pm 7,5$, so ergibt sich das nebenstehende Bild.
Die gesuchten Punktkoordinaten lauten ungefähr $(75 | 7,5)$ und $(325 | 75)$



c. Die Funktionsgleichung kann mithilfe einer Regression oder einer Steckbriefaufgabe gelöst werden. Wichtig ist der Ansatz, dass es sich um eine ganzrationale Funktion dritten Grades handeln muss.

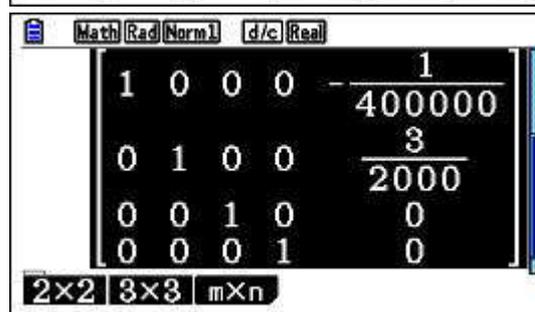
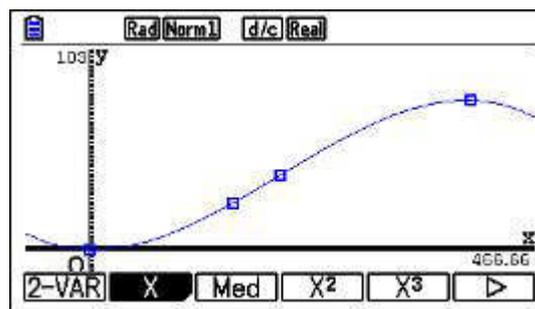
Für die Steckbrieflösung muss die Funktion von Hand abgeleitet werden:

$$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$f'(x) = 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x + a_1$$

Nun kann das Gleichungssystem mit Matrizen und dem „RREF“-Befehl gelöst werden:

$$\text{Rref} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 400^3 & 400^2 & 400 & 1 & 80 \\ 3 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 \cdot 400^2 & 2 \cdot 400 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



d. Werden die errechneten Parameter eingesetzt und dann die Funktion erneut abgeleitet so erhält man:

$$ff(x) = \frac{-x^3}{400000} + \frac{3 \cdot x^2}{2000}$$

$$ff'(x) = \frac{-(3 \cdot x^2 - 1200 \cdot x)}{400000}$$

Die Ableitung $ff'(x)$ wird nach 0.2 gelöst. Nun lassen sich die Punkte berechnen.

Von der mittleren zur lokalen Änderung

<p>Math Deg Fix2 Real</p> <p>Grafikfunkt.: Y=</p> <p>$Y1 = \frac{-x^3}{400000} + \frac{3 \times x^2}{2000}$ [—]</p> <p>Y2: [—]</p> <p>Y3: [—]</p> <p>Y4: [—]</p> <p>Y5: [—]</p> <p>SELECT DELETE TYPE TOOL MODIFY DRAW</p>	<p>Math Deg Fix2 d/c Real</p> <p>$\text{N}\left(\frac{-(3x^2 - 1200x)}{400000} = 0.2\right)$</p> <p>{84.53, 315.47}</p> <p>Y1 (84.53) 9.21</p> <p>Y1 (315.47) 7.0 7.0</p> <p>Y r Xt Yt X</p>	
<p>e.</p>	<p>Math Deg Norm1 Real</p> <p>Grafikfunkt.: Y=</p> <p>$Y1 = \frac{400000}{x} + \frac{2000}{x}$ [—]</p> <p>$Y2 = \left \frac{d}{dx} (Y1) \right _{x=x}$</p> <p>$Y3 = \left \frac{d^2}{dx^2} (Y1) \right _{x=x}$ [—]</p> <p>Y r Xt Yt X</p>	<p>Math Deg Norm1 d/c Real</p> <p>SolveN(Y3=0)</p> <p>{200}</p> <p>Y2 (200) 0.3</p> <p>Y r Xt Yt X</p>
<p>Es macht keinen Sinn, die Hinweisschilder erst an den Stellen mit der größten Steigung aufzustellen. Deshalb müssen Hinweisschilder auf eine Steigung von 30 % am Anfang und am Ende der Bergstraße stehen.</p>		