5.2 Parfüm

Titel	V – 5-2 Parfüm
Version	Mai 2010
Themenbereich	Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung
Themen	Optimierung im wirtschaftlichen Kontext
Rolle des CAS	Lösen von Gleichungen Berechnungen von Ableitungen Umformungen von Termen
Methoden Hinweise	Diese Aufgabe ist auch ohne Differenzialrechnung lösbar.
Quelle	CiMS Das Bild stammt aus Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Perfumeund der Autor ist Doug Coldwell
Zeitlicher Rahmen	1 Schulstunde

Von der mittleren zur lokalen Änderung

In der Parfümerie Baldini ist heute nicht die Nase des großen Meisters gefragt, sondern das Wissen seines Geschäftsführers Chénier.

Die neue Kreation soll mit möglichst großem Gewinn vermarktet werden.

Bei der Herstellung der kostbaren, duftenden Flüssigkeit fallen Kosten an, die sich nach den Worten des Geschäftsführers wie folgt berechnen lassen:

„Die Geldmenge (in 1000 Talern) berechnet sich nach folgender einfach genialer Formel:
Den ersten Wert erhält man, indem man die Menge des hergestellten Parfüms (in Litern) zur dritten Potenz erhebt und das Dreifache der siebenfachen Menge hinzufügt. Danach multipliziert man das Achtfache der herzustellenden Menge mit der Menge selber und subtrahiert diesen so gewonnenen Wert von dem bereits berechneten. Man bedenke aber auch, dass für die Dauer der Herstellung zweimal tausend Taler an den Vermieter des Hochsicherheitslabors abzugeben sind.“

Beiden scheint, dass 100Taler für einen kleinen Flakon mit 10 ml dieser kostbaren Flüssigkeit in der Welt der Reichen und Schönen durchaus angemessenen sind. Ihnen ist völlig klar, dass die Nachfrage viel größer als das Angebot sein wird – aber was tut man nicht alles für seine Exklusivität.

Baldini ist entzückt von den Worten seines Geschäftsführers und fragt ihn: „Sagt, mon Cher, wie viel Parfüm sollen wir nun herstellen, maintenant?“

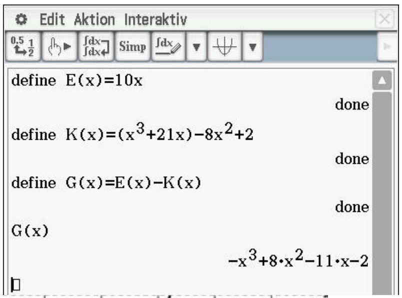
Baldini weiß es nicht – Chénier weiß es nicht – wissen Sie es? Wenn nicht, rechnen Sie es aus.

Hinweis:
Diese Aufgabe ist auch ohne Differenzialrechnung lösbar. Benutzen Sie zu Übung trotzdem die Methoden der Differenzialrechnung.
Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Kosten, Erlös und Gewinn grafisch dar.

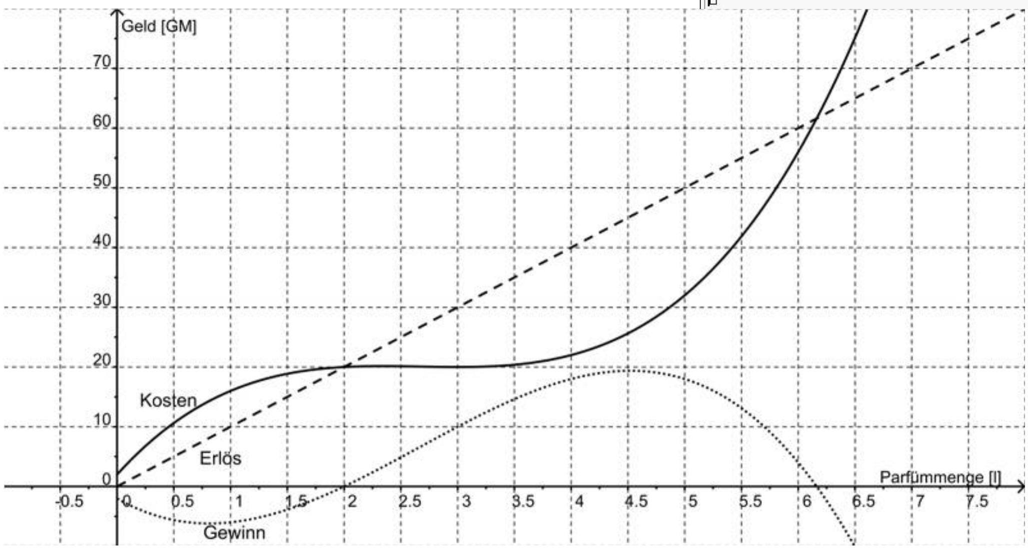
Wir setzen x als die Produktionsmenge in Litern.
Die Herstellungskosten $K(x)$ ergeben sich aus dem Text, der mit

$1000 \text{ Taler} = 1 \text{ Geldmenge } (1\,\text{GM})$ 1000 Talern = 1 Geldmenge folgendermaßen in eine Formel übersetzt wird:

$K(x) = (x^3 + 21 \cdot x) - (8 \cdot x^2) + 2$.



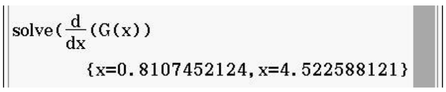
Da 10 ml zu einem Preis von 100 Talern verkauft werden soll, wird dann ein Liter zum Preis von 10.000 Talern, also 10 GM, verkauft. Damit ergibt sich



An der Zeichnung kann man sehen, dass der Gewinnbereich zwischen 2 und ungefähr 6,3 liegt.

Der Gewinnbereich ist also das Intervall $[2; 6{,}1623]$.

Aus dem Graphen folgt, dass im Gewinnbereich ein Gewinnmaximum liegt. Dieses wird nun mithilfe der Differenzialrechnung berechnet.



Da nur $x_{E,2}$ im Gewinnbereich liegt, erhält man bei $x_{E,2}$ das Gewinnmaximum.
Wegen $G(4{,}52) \approx 19{,}3778$ und $G(4{,}53) \approx 19{,}3775$ liegt das Gewinnmaximum bei 4,52.

Die Parfümerie Baldini sollte entsprechend den Ausgangsbedingungen 4,52 Liter von der neuen Kreation herstellen.

Hinweis: Diese Rechnung geht nur dann auf, wenn die gesamte produzierte Menge auch verkauft wird. Bleibt etwas übrig, stimmt die Gewinnfunktion nicht mehr. Haben sie dagegen einen reizenden Absatz, wäre zu überlegen, ob der Preis für 10 ml nicht verteuert werden sollte.