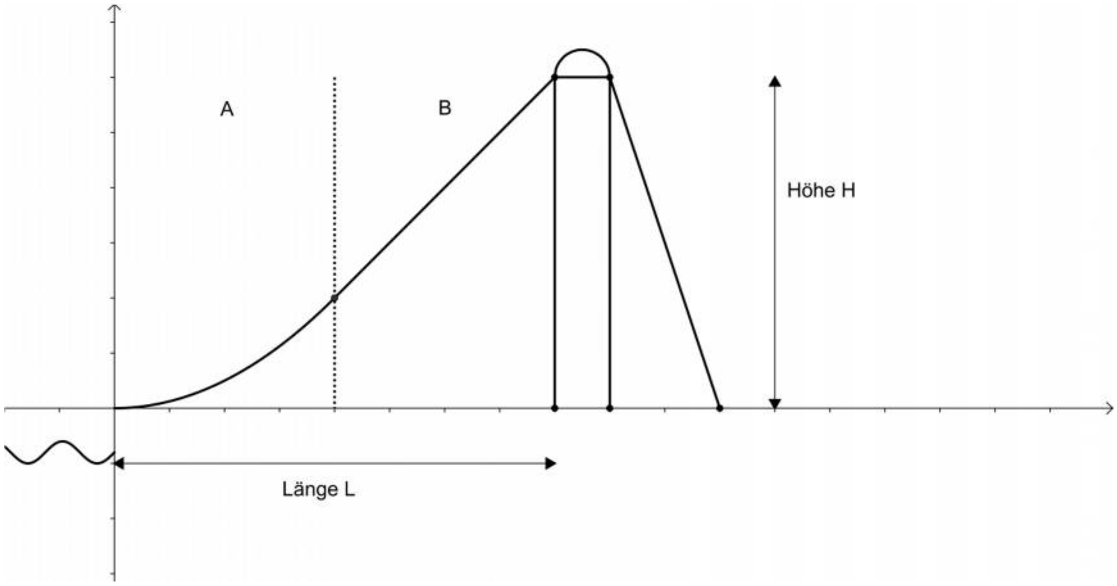
5.7 Im Schwimmbad

Titel	V2 – 5-Z3Im Schwimmbad
Version	Mai 2010
Themenbereich	Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung
Themen	Trassierungsaufgaben
Rolle des CAS	Unterstützer bei der Bestimmung der Ableitung, bei der Termumformung und dem Lösen von Gleichungssystemen. Zeichnen von Graphen.
Methoden Hinweise	
Quelle	
Zeitlicher Rahmen	

Von der mittleren zur lokalen Änderung

Im Schwimmbad soll eine neue Wasserrutsche gebaut werden. Sie besteht aus einem parabelförmig gebogenen Teil A und einem linearen Teil B:

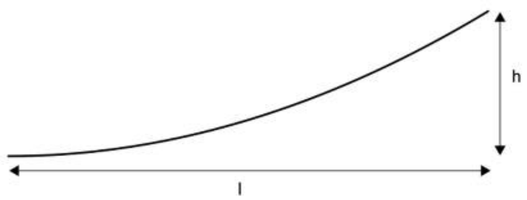


Für die Parabelstücke stehen drei Bauteile zur Verfügung:

(1) $h = 0{,}8m$

(2) $h = 1{,}0m$

(3) $h = 1{,}2m$



Die horizontale Länge *l* der Parabelstücke beträgt jeweils 2,0 m.

Der lineare Teil der Rutsche hat eine Länge von 2,8 m.

a. Überlegen Sie, was beim Zusammenfügen der beiden Bauteile beachtet werden muss. Notieren Sie Ihre Überlegungen und tauschen Sie sich dazu mit Ihrem Nachbarn aus.

b. Zeichnen Sie die drei unterschiedlichen Rutschen mit Ihrem Taschencomputer und Skizzieren Sie eine der drei unterschiedlichen Rutschen in Ihr Heft.
Hinweis: Untersuchen Sie, welche Steigung sich jeweils für den linearen Teil ergibt.

c. Ermitteln Sie die Gesamthöhe *H* und Gesamtlänge *L* der drei möglichen Rutschen.

d. Entwickeln Sie soweit wie möglich Funktionsgleichungen für die restlichen Bauteile einer der drei Rutschen, sodass deren Darstellungen in Ihrem CAS das obige Bild ergeben. Zeichnen Sie die Rutsche mit Ihrem CAS.

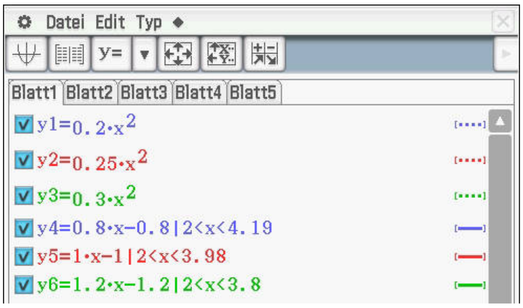
a. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein Trassierungsproblem. Das parabelförmige $p: x \to p(x)$ und das lineare $l: x \to l(x)$ Bauteil müssen nahtlos (Anschluss) und knickfrei aneinander angepasst werden. D. h., es sind die Gleichungen:

$$\begin{array}{lccc} (I) & p(2) & = & l(x) \\ (II) & p'(2) & = & l'(2) \end{array}$$ anzusetzen und zu lösen.

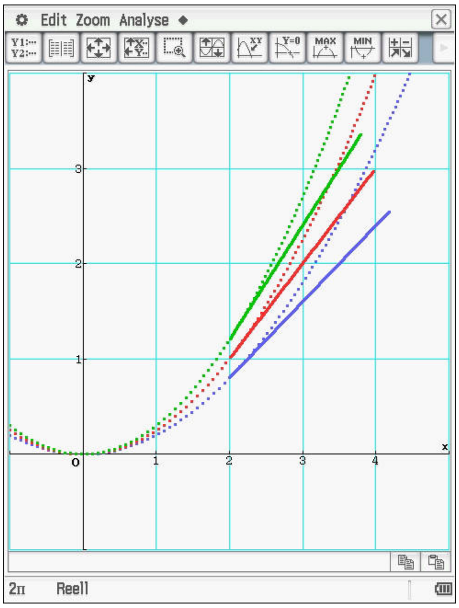
b. Legt man den Koordinatenursprung in den Scheitelpunkt der Parabelteile (Absprungstelle), so ergeben sich für die drei Parabelteile mit dem Ansatz $p(x) = a \cdot x^2$ folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (1) & p_1(x) = 0{,}20 \cdot x^2 \\ (2) & p_2(x) = 0{,}25 \cdot x^2 \\ (3) & p_3(x) = 0{,}30 \cdot x^2 \end{array}$$ und als Steigungen an der Stelle $x = 2$ $$\begin{array}{l} p_1'(2) = 0{,}8 \\ p_2'(2) = 1{,}0 \\ p_3'(2) = 1{,}2 \end{array}.$$

Für die linearen Bauteile gelten demnach:



$$\begin{array}{ll} (1) & l_1(x) = 0{,}8 \cdot x - 0{,}8 \\ (2) & l_2(x) = 1{,}0 \cdot x - 1{,}0 \\ (3) & l_3(x) = 1.2 \cdot x - 1{,}2 \end{array}.$$



c. Um die Gesamtlänge herauszubekommen, wird die Länge der Parabelteile (2 m) zur horizontalen Länge der linearen Bauteile addiert. Letztere Längen ergeben sich z. B. mittels folgender Überlegung:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arctan(m)$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\Delta x}{2{,}8} \Rightarrow \Delta x = 2{,}8 \cdot \cos(\arctan(m)).$$

Damit ergeben sich

$$\begin{array}{l} L_1(x) = 2\ \text{m} + 2{,}19\ \text{m} = 4{,}19\ \text{m} \\ L_2(x) = 2\ \text{m} + 1{,}98\ \text{m} = 3{,}98\ \text{m}. \\ L_3(x) = 2\ \text{m} + 1{,}79\ \text{m} = 3{,}79\ \text{m} \end{array}$$

Analog ergibt sich für die Gesamthöhe aus

$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta y}{2{,}8} \Rightarrow \Delta y = 2{,}8 \cdot \sin(\arctan(m))$$

	wozu jeweils die angegebene Höhe des Parabelteils addiert werden muss. $H_1(x) = 0{,}8\text{ m} + 1{,}75\text{ m} = 2{,}55\text{ m}$ $H_2(x) = 1\text{ m} + 1{,}98\text{ m} = 2{,}98\text{ m}$ $H_3(x) = 1{,}2\text{ m} + 12{,}15\text{ m} = 3{,}35\text{ m}$
d.	Die Wellenbewegung kann durch die Funktion *w* mit $w(x) = 0{,}1\sin(10x) - 0{,}4$ dargestellt werden. Der Kreisbogen oben auf der Rutsche kann mit der Funktion *k* mit $k(x) = \sqrt{0{,}25^2 - (x - 4{,}25)^2} + 3$ gezeichnet werden. Und die Treppe t hat die Funktionsgleichung $t(x) = -3(x - 4{,}5) + 3$