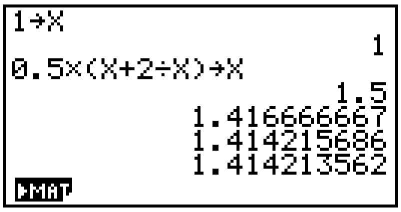
Suche nach neuen Zahlen - das Utility "Iterates" als didaktisches Hilfsmittel

Vorwort:

In nahezu allen Schulbüchern ist das Heron-Verfahren weitgehend etabliert. Gemäß neuem Kerncurriculum sollen Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung von rationalen zu reellen Zahlen an Beispielen begründen, die Grenzen der Beschreibung reeller Zahlen durch Dezimalbrüche erläutern sowie Näherungsverfahren beschreiben und anwenden.
Mit einem Computeralgebrasystem – wie es der ClassPad beinhaltet – kann der Kompetenzaufbau unterstützt werden. Zudem sind weitergehende Untersuchungen möglich, um tiefere Erkenntnisse auf dem Weg irrationalen Zahlen zu gewinnen.

Die Konstruktion von Rechtecken, die stets ihren Flächeninhalt behalten und immer „quadratähnlicher“ werden führt i.d.R. schon nach drei Schritten dazu, die grafische Ebene zu verlassen und Herons Idee der Mittelwertbildung rein rechnerisch weiterzuführen. Schon ein GTR erleichtert hier die Arbeit erheblich.

Die Iterationsvorschrift: $x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{a}{x_i}\right)$ mit z.B. $x_o = 1$ liefert gute Näherungswerte für $\sqrt{a}$.



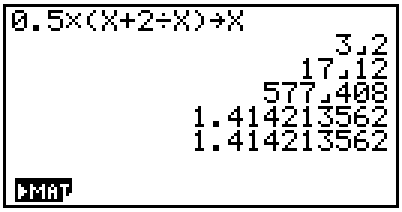


Abb. 1

Screenshots vom FX-9860G mit Näherungswerten für $\sqrt{2}$.

Darüber hinaus stellt das Utility „Iterates“ des ClassPad CAS-spezifische Eigenschaften zur Verfügung. Es kann als didaktisches Hilfsmittel dienen, um besondere Fragestellungen zu bearbeiten.

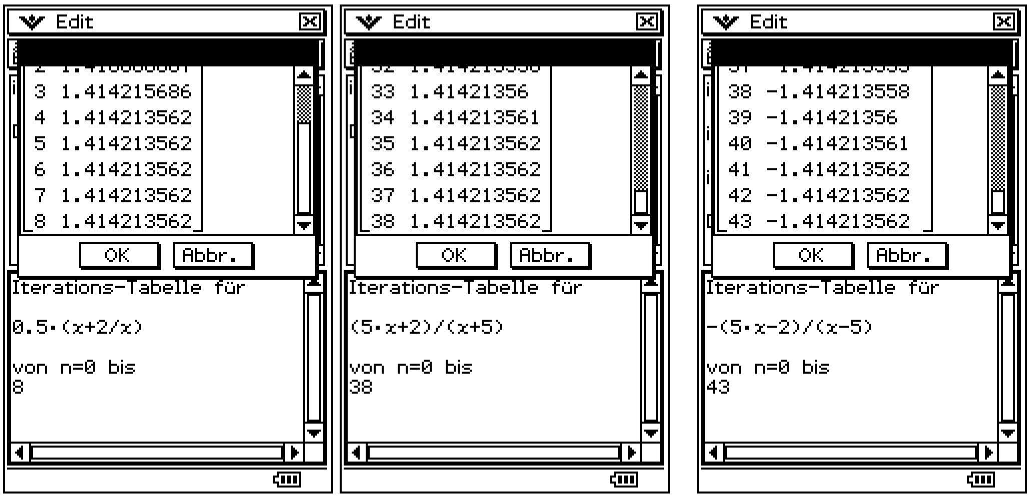
- Kann die Idee des Heron auf m-te Wurzeln verallgemeinert werden?
- Wie steht es um die Konvergenzgeschwindigkeit?
- Was passiert bei Variation des Startwertes?
- Wie verhalten sich verschiedene Iterationen mit gleichem Fixpunkt?

Zunächst gehen wir der Frage nach, wie sich die zugehörige Kantenlänge aus dem Volumen V eines Würfels berechnet. Zweckmäßigerweise geht man zu Beginn von einem Quader mit quadratischer Grundfläche aus und erhält das gesuchte Ergebnis in der Tat gemäß Herons Vorschrift. Die neue Kantenlänge der Grundfläche ist der Mittelwert aus Länge, Breite und Höhe der „alten“ Säule: $x_{i+1} = \frac{1}{3}\left(x_i + x_i + \frac{V}{x_i^2}\right)$.

Will man Weiterdenken, ist es mit der naheliegenden Anschauung zwar vorbei, als Lohn der Anstrengung winkt jedoch die Verallgemeinerung der Iterationsvorschrift auf die m-te Wurzel einer Zahl a. Man findet: $x_{i+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)\cdot x_i + \frac{a}{x_i^{m-1}}\right)$.

Die zugehörige Fixpunktgleichung $x = \frac{1}{m}\left((m-1)\cdot x + \frac{a}{x^{m-1}}\right)$ wird nun mit dem Solve-Befehl gelöst. Das Ergebnis $x = a^{\frac{1}{m}}$ ist beruhigend, sagt allerdings noch nichts darüber aus, wie schnell die jeweilige Iteration dann tatsächlich konvergiert. Dazu vergleichen wir die klassische Heron-Iteration für $\sqrt{2}$ mit zwei speziellen Iterationen aus der Familie $x_{i+1} = \frac{a + k\cdot x_i}{x_i + k}$, die ebenfalls alle $x = \pm\sqrt{a}$ als Lösung ihrer zugehörigen Fixpunktgleichung haben.

Wir rufen das Modul „Iterates(*Term(x), Startwert, Anz. n der Iterationen*)“ im Main-Menu des ClassPad dreimal nacheinander auf. Um die verschiedenen Iterationen durchzuführen, wählen wir in *Term(x)* stets a = 2, einmal mit m = 2, dann mit k = 5 und als Drittes noch mit k = -5.



Modus Dezimal Modus Dezimal Modus Dezimal

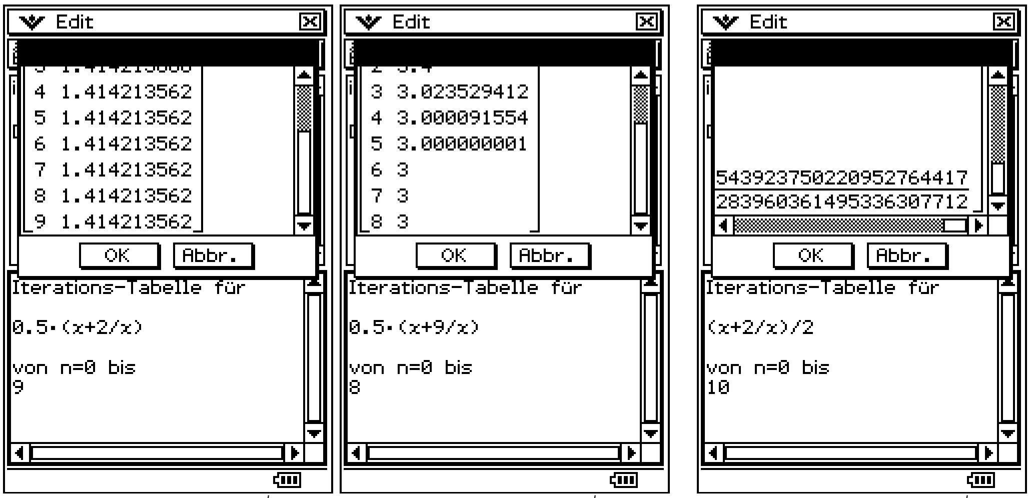
Abb. 2

Drei verschiedene Iterationen für $x^2 = 2$.

Der Startwert ist stets $x_0 = 1$.

Die Ergebnisse sind evident und laden zu weiteren Untersuchungen ein, die z.B. mit Hilfe der Option Spinnennetzdiagramm (Webdiagramm) im Menü Zahlenfolgen möglich sind.

Wählen wir für eine Iteration jetzt beide möglichen Ausgabemodi, kann dies als Ausgangspunkt für eine fruchtbare Diskussion über die Erreichbarkeit des Grenzwertes dienen. Zugleich lässt sich die Fragestellung untersuchen, wie Zwischenergebnisse als Brüche dargestellt werden.



Modus Dezimal ($\sqrt{2}$) Modus Dezimal ($\sqrt{9}$) Modus Standard ($\sqrt{2}$)

Abb. 3

Heron-Iteration zu $\sqrt{2}$ und $\sqrt{9}$ in verschiedenen Modi.

Im Modus Dezimal sind die Ergebnisse gut nachvollziehbar. Infolge der begrenzten Stellenanzahl und kumulierender Rundungsfehler werden „glatte“ Lösungen ab einer bestimmten Iterationsanzahl auch als solche angezeigt.

Aber was passiert im Modus Standard, etwa im Fall $\sqrt{2}$, wenn das CAS für die Anzeige im Bruchformat sorgt? Scrollt man nach rechts und zählt/schätzt dabei im rechten Bild der Abb. 3 die Stellenanzahl im Nenner, so ergeben sich ungefähr 400 Ziffern. Für n = 11 sollten es sogar etwa 800 sein, angezeigt wird stattdessen der Bruch $\frac{13250218}{9369319}$. Für noch größere Werte von n sind die Ausgaben ebenfalls nicht weiter nutzbar. Das CAS – und jedes andere früher oder später auch – ist an seiner Genauigkeitsgrenze angekommen. Die spannende Analyse für den Fall $\sqrt{9}$ mag der Leser selbst durchführen.

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist als Symbol für etwas Neues aufzufassen. Sie lässt sich zwar durch Brüche beliebig genau annähern, ist aber nicht als Bruch darstellbar. Irrationale Zahlen sind von neuer Qualität und es erscheint notwendig zu untersuchen, welche Rechengesetze gelten.