

Erster Kontakt mit Folgen:

Die folgenden Aufgaben sind in Gruppen zu lösen und die Ergebnisse in geeigneten **Tabellen** festzuhalten. Wichtig sind nicht so sehr die einzelnen Zahlen, sondern wie sie sich entwickeln.

a) Wir wandeln die Aufgabe (Klett S. 46 1b)) vom Raketenstart ab. Die Intervalle sein nun $[0;20]$, $[2,5;20]$, $[5;20]$, $[7,5;20]$, $[10;20]$, $[15;20]$,

b) Schätze **ganz grob** wie groß $\sqrt{19}$ ist. Nehmen wir an, Du schätzt $\sqrt{19}$ sei gleich 2 oder gar gleich 25. Nenne diese Zahl a_1 . Bilde $a_2 = \frac{\left(\frac{19}{a_1} + a_1\right)}{2}$ (Rekursionsformel), dann $a_3 = \frac{\left(\frac{19}{a_2} + a_2\right)}{2}$, usw. Beschreibe die Beobachtung!

c) Berechne für fortlaufende **natürliche** Zahlen n ($n=1, 2, 3, 4, \dots$) die Terme $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und n^2

Was haben alle Beispiele gemeinsam?

Die Beispiele liefern mit jedem neuen Schritt eine neue Zahl a_n , sie liefern eine (Zahlen-) Folge.

Auffassung einer Folge als Funktion - Idee der 'Nummerierung', ab 0 oder ab 1

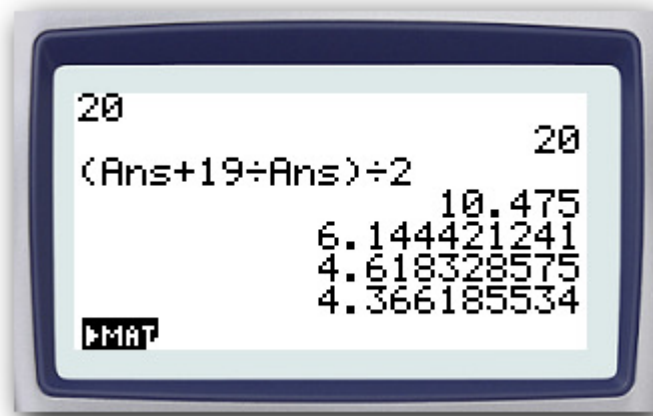
Definition einer Folge (z.B. Elemente S. 41 / Klett S. 10)

Wir unterscheiden: n ist die Nummer eines Folgengliedes
 a_n ist das Folgenglied selbst
 (a_n) die ganze Folge

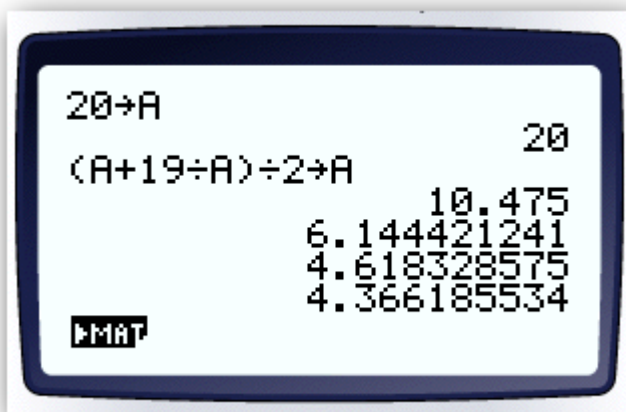
Beispiele:

Wie berechnen wir Folgenglieder mit dem Casio fx-9860?

Betrachten wir wieder das Einstiegsbeispiel 'Wurzel aus 19':

Möglichkeit 1: Berechnung der Werte im RUN-Menue (1)

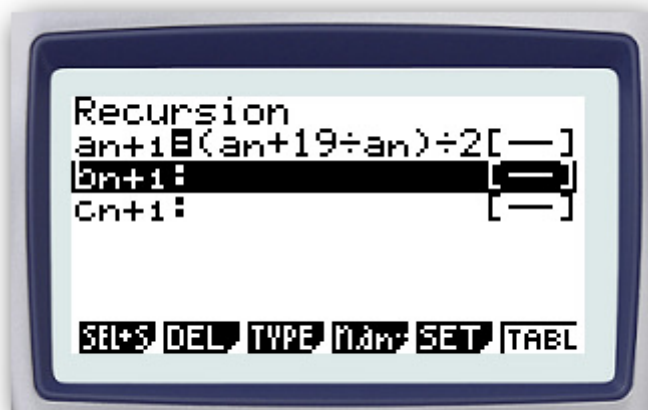
Wir geben den Schätzwert 20 ein, und bestätigen mit EXE. Anschließend tippen wir die Rekursionsformel (s. oben) unter Zuhilfenahme von ANS ein und bestätigen immer wieder mit EXE.



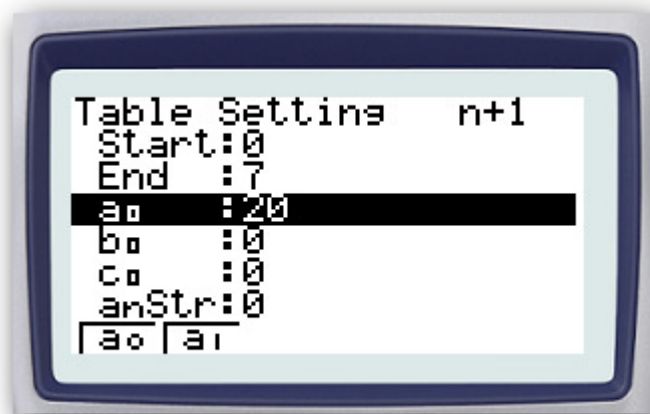
Entsprechendes geht auch unter Verwendung von Speicherplätzen. Der Speicher A wird hier zu Beginn mit dem Wert 20 belegt.

Möglichkeit 2: Wir arbeiten mit dem Menüpunkt RECUR (8):

Hier berechnet man Folgenglieder direkt oder aus den Vorhergehenden.



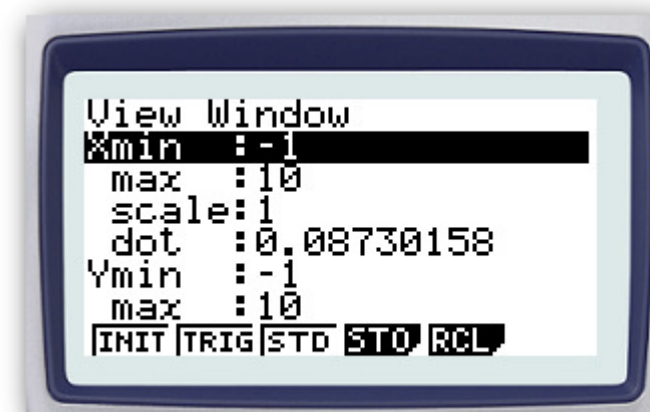
Tastenfolge: MENUE/RECUR. Wir wollen Werte a_{n+1} aus a_n -Werten berechnen und wählen deshalb TYPE a_{n+1} und geben die Rekursionsformel ein.



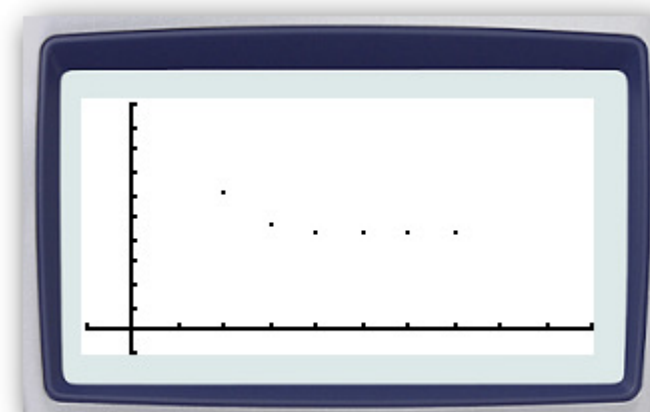
Danach müssen wir evtl. unter SET die Randbedingungen eingeben, das erste Glied erhält hier die Bezeichnung a_0



und können uns dann mit TABL die zugehörige Tabelle anzeigen lassen.



Wenn wir mit V-Window den richtigen Ausschnitt einstellen,



ist es kein Problem, mit G-PLOT (oder G-CON) die errechneten Werte graphisch darzustellen

Rekursive und explizite Beschreibung von Folgen:

Wenn wir mittels eines Termes Folgenglieder direkt berechnen können, sprechen wir von einer **expliziten** Vorgabe der Folge, wenn wir zur Berechnung von Gliedern die vorhergehenden Glieder benötigen, sprechen wir von **rekursiver** Vorgabe.

Aufgabe: Gib sowohl rekursiv wie explizit an:

a) 1; 3; 5; 7; ...

b) 0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125;

Übungen Elemente S. 43 / 44, insbesondere auch Nr. 8 bis 11

**Übungen zur Umwandlung einer expliziten in eine rekursive Folgenbeschreibung
(umgekehrte Richtung meist Probieren)**

Beispiele: 1) $a_n = 1/a_n$ 2) $a_n = 1/(2n+1)$

Besondere Folgen: (arithmetische und geometrische Folgen)

S. 50, Aufgabe 1 als Einstiegsbeispiel (eine geom. Folge)

geom. Folgen: Teile von Nr. 3, 4 und 5 sowie Nr. 9 (vgl. mit Wachstum)

arithm. Folgen: Beispiele nur in Klett - $(a + dn)$;

evtl. Querverbindungen zum Thema Wachstum aufgreifen

Für beide Typen die Formeln $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ bzw. $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ erarbeiten

Beobachtung: Die meisten unserer Folgen laufen auf eine bestimmte Zahl g hin. Diese Zahl g kann eine Steigung, ein Flächeninhalt, eine Wurzel oder vieles andere sein.

Man bezeichnet g , der sich die Folgenglieder immer mehr, aber nicht unbedingt gleichmäßig annähern, als Grenzwert der Folge

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt, sonst divergent.

Anschaulich erkennen wir den Grenzwert daran, dass der Abstand der Folgenglieder von der waagrechten Geraden $y=g$ immer mehr abnimmt, die Gerade ist eine Art waagrecht Asymptote



einfache Beispiele

evtl. exakte Definition der Epsilon-Umgebung und des Grenzwertes S. 58 und S. 59 bei guter Gruppe

Übungen S. 61 Teile von Nr. 9, 10 und 11

Grenzwerte spezieller Folgen (z.B. Nullfolgen; Schroedel S. 62 oben)

Grenzwertsätze für Folgen, an Hand von Beispielen erarbeiten

Übungen S. 64 und 65

Hilfen zur Auffindung von Grenzwerten - Zusammenfassung der Möglichkeiten:

- a) Umformung: $\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$ geht gegen 1
- b) Abdeckmethode
- c) Differenz zum vermuteten Grenzwert ist Nullfolge: $\frac{n+1}{n-1} - 1 = \dots$
- d) Die Grenzwertsätze

Mittels eines Arbeitsblattes viele weitere Übungen anbieten

Eigenschaften von Folgen:

Definition: Eine Folge heißt monoton wachsend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\dots a_n \leq a_{n+1}$. Eine Folge heißt monoton fallend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\dots a_n \geq a_{n+1}$

Einfache Monotonienachweise S. 70 / 7 a, b, c, f Nr. 8, 9

dabei mögliche Strategien, die Monotonie nachweisen mit:

- a) Differenz oder Quotient
- b) andere Umformungen, z.B. Polynomdivision
- c) über Funktion

Definition: Ein Folge heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S (s) gibt mit $S \geq a_n$ ($s \leq a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$

einfache Beispiele S. 70 Nr. 13

LP-Hinweis: An eine formale Behandlung von Monotonie und Beschränktheit ist nicht gedacht, trotzdem bei Zeit und entsprechender Klasse:

Die Beschränktheit mit Polynomdivision und durch Abschätzung:

$$\text{z.B. } \frac{n-4}{n-2} < \frac{n-4}{n-4} = 1$$

Dies evtl. auch mit $\frac{2n+1}{n+1} > \frac{2n+1}{2n+1} = 1$

Auch andere Umformungen wie Differenzuntersuchung auf $<$ oder $>$ Null sind möglich

Satz: Wenn eine Folge monoton und beschränkt ist, dann ist sie konvergent.

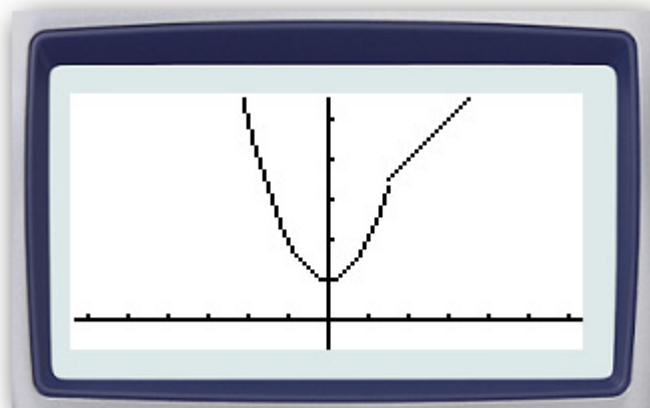
Evtl. Übungen S. 70 Nr. 9, 14, ...

Grenzwerte bei Funktionen ab S. 86 Aufgabe 1 unten:

Eine Funktion Abschnittsweise definieren



(z.B. Aufgabe 1 S. 86)



Die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit wiederholen exemplarisch mit Folgen bearbeiten

Zum Abschluß das Problem verketteter Folgen aufnehmen