

Erklärung der Icons, die du bei der **Darstellung von Funktionen** dringend kennen solltest.

Funktionstyp auswählen

Koordinatenachsen einstellen

Wertetabelle erstellen

Graph zeichnen

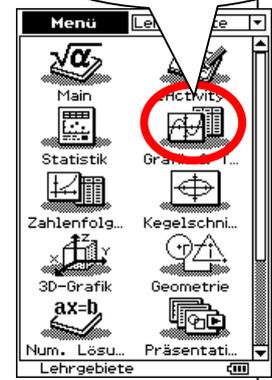
Tabellengrenzen und Schrittweite einstellen

Anwendung: Grafik & Tabelle

The screenshot shows the 'Edit' screen with the following elements:

- Toolbar: $y=$ dropdown, function type icons (line, parabola, etc.), and table icons.
- Function list: $y_1 = 2 \cdot x + 3$, y_2 , y_3 , y_4 , y_5 , y_6 , y_7 , y_8 .
- Graph: A coordinate system with x-axis from -7 to 7 and y-axis from -3 to 3. A line is plotted.
- Bottom: 'Bog Real' and a calculator icon.

The application menu shows the 'Grafik & Tabelle' icon circled in red.



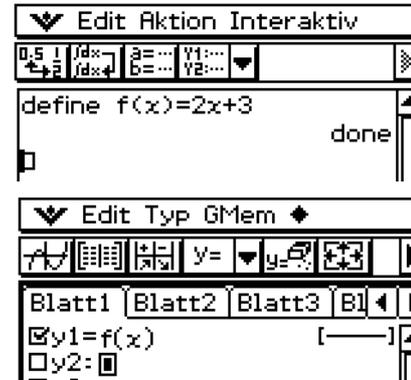


Eingabe eines Funktionsterms:

- 1) in der Grafikanwendung  Graph&Tab...
- Funktionsterm eingeben
 - mit **EXE** bestätigen



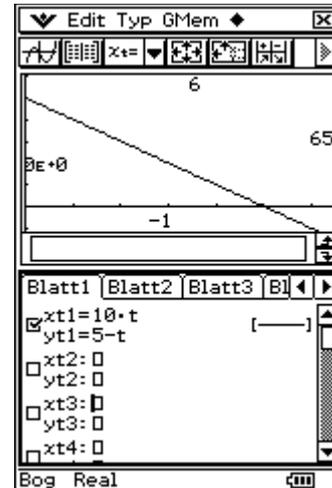
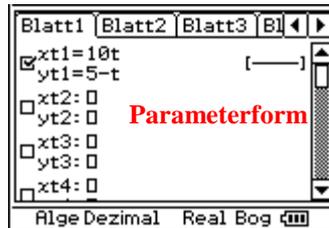
- 2) in der Main- und Grafikanwendung  Main
- „Define $f(x) = 2x + 3$ “ eingeben über *Aktion* \rightarrow *Befehle*
 - dann in der Grafikanwendung $y1 = f(x)$ schreiben



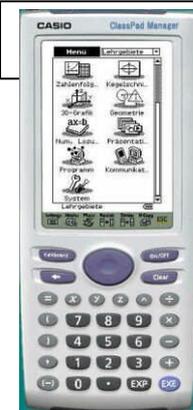


Eingabe und Darstellung

Möchte man Geraden in Koordinatenform eingeben, so wählt man im Grafikeditor $y=$, für die **Parameterform** $x+=$.



Nach der Eingabe kann man über das Icon Graph das Grafikenfenster aufrufen.
Die Einstellung des Grafikausschnitts geschieht über Graph .



Termumformungen

Alle Befehle zur Termumformung erreicht man über **Aktion** → **Umformungen**.

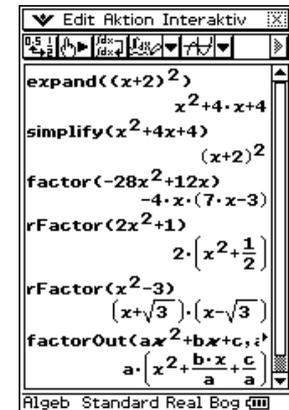
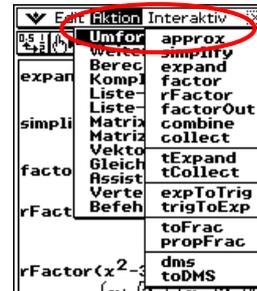
expand: Zerlegung eines Terms in einzelne Summanden; Ausmultiplizieren von Termen: $expand((x+2)^2)$

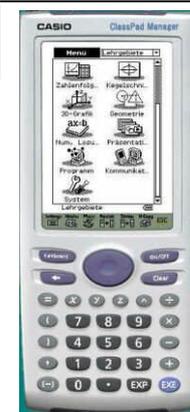
simplify: Vereinfacht einen Term: $simplify(x^2+4x+4)$

factor: Formt, falls möglich, eine Summe in ein Produkt im Bereich der ganzen Zahlen um, Ausklammern aller möglichen Faktoren, auch -1:
 $faktor(-28x^2+12x)$

rfaktor: Gibt, falls vorhanden, die Faktoren eines Terms im Bereich der reellen Zahlen bis hin zu dessen Wurzeln an:
 $rfaktor(x^2-3)$

factorOut Ausklammern eines vorgegebenen Faktors: $factorOut(ax^2+bx+c,a)$



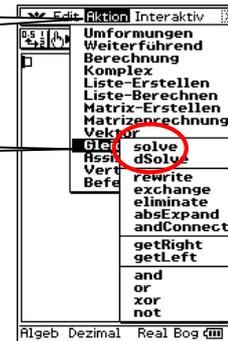


Wie kann man Gleichungen lösen?

1. Rechnerische Lösung mit Hilfe des Befehls *solve*:

Menüpunkt Aktion/Interaktiv

Gleich./Ungleich



- Eingabe der Gleichung über *Aktion*
- Lösen mit **EXE**



oder

- Eingabe der Gleichung
- Gleichung markieren
- Lösen über *Interaktiv*



Variable eingeben



Wie kann man Gleichungen lösen?

2. Grafische Lösung in der Grafikanwendung

Beispiel: $2x+3=5x-6$

Eingabe der Teilterme

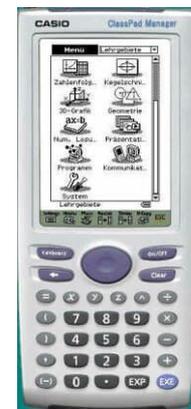
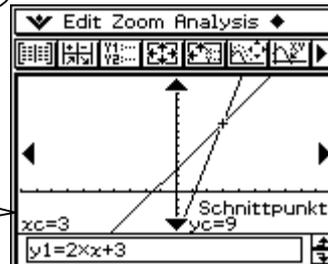
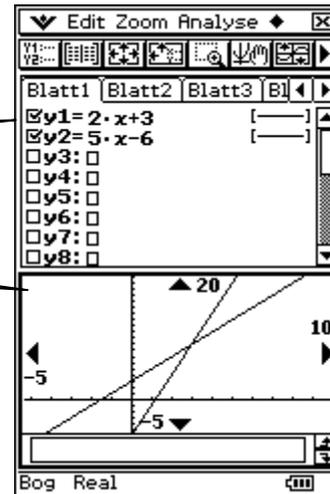
Darstellung

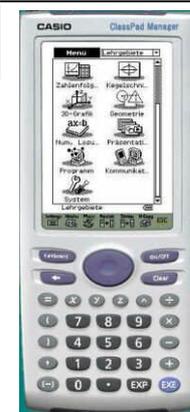
Analysis → Grafische Lösung



Schnittpunkt

Lösung





Wie kann man Gleichungssysteme lösen?

Beispiel:
$$\begin{cases} 2x - 3 = 5y \\ x - 4 + y = 2 \end{cases}$$

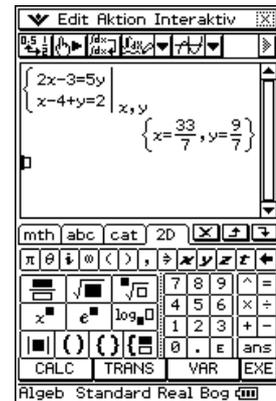
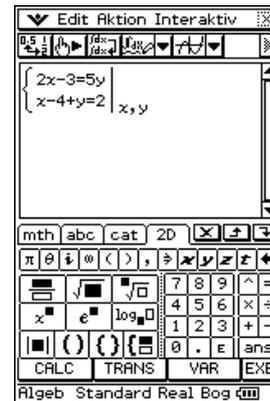
1. Möglichkeit:

Man löst beide Gleichungen nach einer Variablen auf (z.B. y) und bestimmt die Lösung grafisch (siehe Karte 2)

2. Möglichkeit:

Man nutzt die Vorlage für ein Gleichungssystem über **Keyboard** \rightarrow 2D, gibt in die Felder links vom Strich die beiden Lösungen und in das Feld rechts die Variablen – getrennt durch ein Komma - ein. Nach Eingabe von EXE erscheint die Lösung.

Das geht auch mit drei Gleichungen und drei Variablen, wenn man zweimal auf die Vorlage aus dem 2D-Menü tippt.





Wichtige Icons:

Umstellung Bruch- /
Dezimaldarstellung

Graphische
Darstellungen

Sortieren

Umschaltung
von Text auf
Berechnung

links- /
rechtsbündig /
zentriert

Öffnet das
Fenster zur
Betrachtung des
Zelleninhalts

Zeilen bzw.
Spalten einfügen

Löschen der
aktuell
ausgewählten Zeile
bzw. Spalte

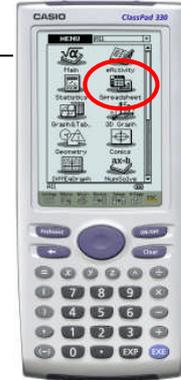
Umschaltung
von Text auf
Berechnung

links- /
rechtsbündig /
zentriert

Öffnet das
Fenster zur
Betrachtung des
Zelleninhalts

Zeilen bzw.
Spalten einfügen

Löschen der
aktuell
ausgewählten Zeile
bzw. Spalte



Eingabe von Formeln

Formeln werden im Bearbeitungsfeld eingegeben und immer durch ein Gleichheitszeichen eingeleitet. Sie werden mit dem Icon  im Betrachtungsfenster eingegeben.

Grafische Darstellungen

Nachdem man die Werte markiert hat (durch Ziehen mit dem Stift), tippt man auf das Grafik-Icon (das je nach Darstellungsart variiert). Dann erscheint ein Fenster mit der gewünschten Grafik.

	A	B	C
1	Umfang	Länge	Breite
2	100	10	
3	100	20	
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

Formula input field: $=A2/B2$

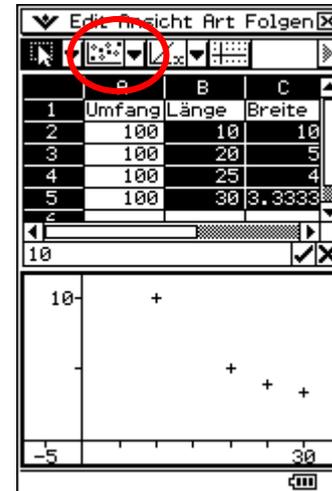
	A	B	C
1	Umfang	Länge	Breite
2	100	10	10
3	100	20	5
4	100	25	4
5	100	30	3.3333

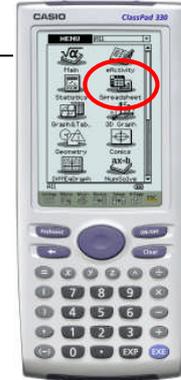
Formula input field: $=A5/B5$

C5 Wert:
3.333333333

C5 Formel:
A5
B5

Result: C5 3.333333333





Relative und absolute Bezüge

Möchte man auf den Inhalt einer Zelle verweisen oder mit dem Inhalt weiterrechnen, so kann man nach Eingabe eines = mittels der Zellenposition (z.B. A1) darauf verweisen. Diese kann man über die Tastatur eingeben oder leichter durch Antippen der entsprechenden Zelle. Kopiert man eine solche Zellenreferenz, so wird sie dem Bezug angepasst. Hat man zum Beispiel in einer Zelle „=A1“ stehen und kopiert diese um 2 Stellen nach unten, dann steht dort nach dem Kopieren „=A3“.

Wenn diese Anpassung nicht geschehen soll, fügt man das \$ ein (absoluter Bezug). Dann bleibt der Bezug auch beim Kopieren unverändert.

	A	B	C
1	1	-1	
2	2		
3	3		
4	4		
5	5		
6	6		

=2·A1-3

B1 Wert:
-1

B1 Formel:
2·A1-3

relativer Bezug

B1 -1

	A	B	C
1	1	-1	
2	2	1	
3	3		
4	4		
5	5		
6	6		

=2·A2-3

B2 Wert:
1

B2 Formel:
2·A2-3

B2 1

	A	B	C
1	1	-1	-2
2	2	1	
3	3	3	
4	4	5	
5	5	7	
6	6		

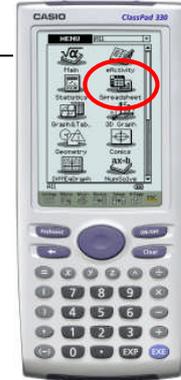
=B1·\$A\$2

C1 Wert:
-2

C1 Formel:
B1·\$A\$2

Absoluter Bezug

C1 -2



Formeln kopieren

Über *Edit* → *kopieren* und *Edit* → *einfügen* kann man eine Formel kopieren, auch in mehrere Zellen, wenn man diese vorher markiert.

Einfacher geht es durch *Ziehen*. Tippe dazu eine Zelle mit dem Stift an und wähle sie damit aus, sie erscheint nun mit schwarzem Hintergrund. Hebe den Stift ab, halte ihn dann noch einmal auf die ausgewählte Zelle und warte, bis ein weißer Bearbeitungsrand entsteht. Ziehe dann die Zelle auf eine andere und hebe den Stift wieder ab. Es können auch mehrere Zellen markiert und kopiert werden.

▼ Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C
1	1	-1	
2	2		
3	3		
4	4		
5	5		
6	6		

=2·A1-3

B1 Wert:
-1

B1 Formel:
2·A1-3

B1 -1

Mit dem Stift
herunterziehen

▼ Datei Edit Graph Aktion

	A	B	C
1	1	-1	
2	2	1	
3	3		
4	4		
5	5		
6	6		

=2·A2-3

B2 Wert:
1

B2 Formel:
2·A2-3

B2 1

▼ Datei Edit Graph Aktion

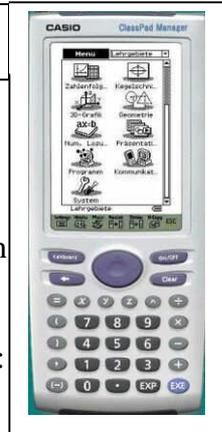
	A	B	C
1	1	-1	
2	2	1	
3	3		
4	4		
5	5		
6	6		

=2·A2-3

B2 Wert:
1

B2 Formel:
2·A2-3

B2 1



Wie kann man Funktionen definieren?

1. Möglichkeit:

Zum **Grafikeditor** gelangt man über die Anwendung *Grafik & Tabelle*. Man kann ihn aber auch aus der Main-Anwendung oder einer e-Activity aufrufen, wenn man in der Abwärtspfeilschaltfläche das Icon () auswählt. Hier trägt man den Funktionsterm ohne Funktionsnamen ein.

In der Symbolleiste oben findet man dann die folgenden nützlichen Schaltflächen:

 liefert den Graphen, bei dem (vorher) über das Icon  der richtige Ausschnitt ausgewählt werden kann.  liefert eine Tabelle, bei der über das Icon  Startwert und Schrittgröße der x-Werte in der Tabelle eingestellt werden können.

2. Möglichkeit:

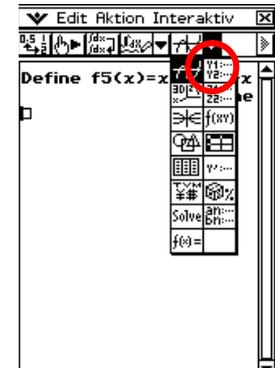
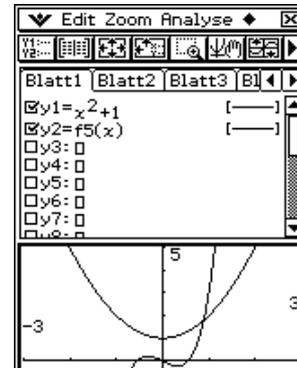
Mit dem Befehl **Define** wird eine Funktion definiert und der Name im Grafikeditor aufgerufen.

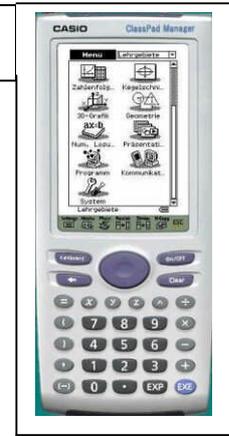
Beispiel: Gibt man z.B. in Main ein

$$\text{Define } f5(x) = x^5 + 3x^3 - x,$$

so kann man im Grafikeditor z.B. bei $y2 = f5(x)$ eintragen und die definierte Funktion $f5(x)$ wird dargestellt.

3. Möglichkeit: vgl. S.3





Einschränkungen des Definitionsbereiches

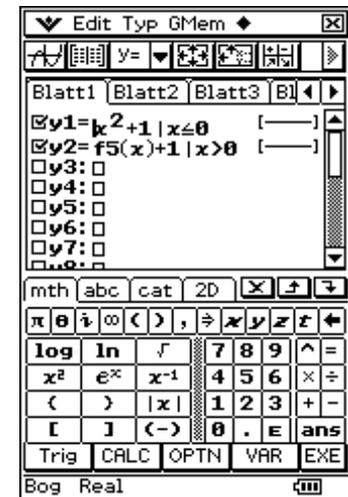
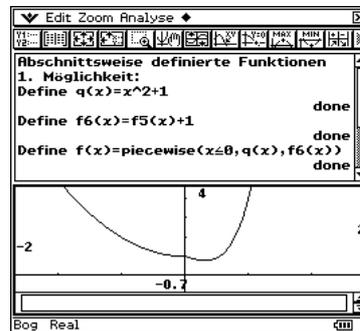
werden mit dem **with-Operator** | (**Keyboard**) \rightarrow mth \rightarrow OPTN) erreicht. Er kann sowohl im Grafikeditor wie auch in Main eingesetzt werden. Er kann allerdings nicht direkt beim Define-Befehl eingesetzt werden.

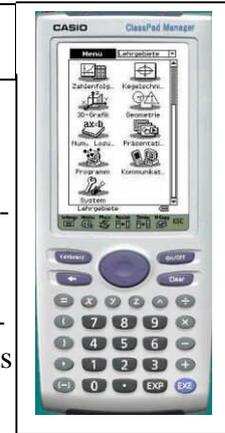
Funktionswerte

Werden wie folgt berechnet: $f5(2)$ liefert z.B. 54.

Abschnittsweise definierte Funktionen

- Möglichkeit (nur bei zwei Teilfunktionen):
Mit **piecewise**(D_{f1} , $f1(x)$, $f2(x)$) können zwei Teilfunktionen zu einer Funktion zusammengebunden werden
- Möglichkeit
Man gibt die beiden Teilfunktionen im Grafikeditor getrennt ein und schränkt den Definitionsbereich ein





Wie kann man Funktionen darstellen?

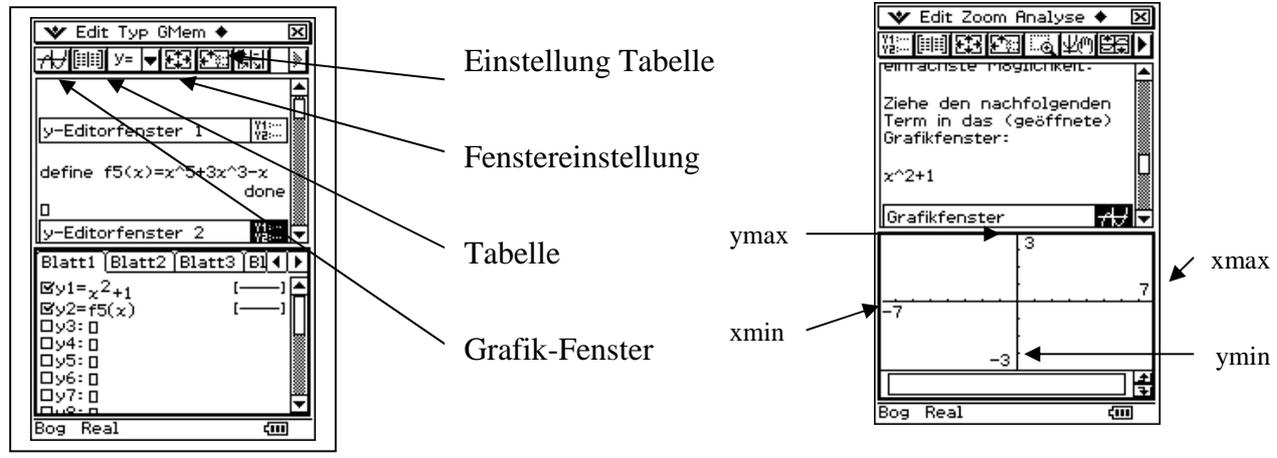
a) Wertetabellen

 liefert eine Wertetabelle, bei der über das Icon  Startwert und Schrittgröße der x-Werte für die Wertetabelle eingestellt werden können.

b) Grafen

Die Möglichkeiten über den Grafikeditor sind oben schon genannt worden. Alternativ kann man einen Funktionsterm (mit dem Stift) auswählen und einfach in das **Grafikfenster** ziehen.

Danach muss man die Fenstergröße ggf. neu einstellen.



Einstellung Tabelle

Fenstereinstellung

Tabelle

Grafik-Fenster

ymax

xmin

xmax

ymin

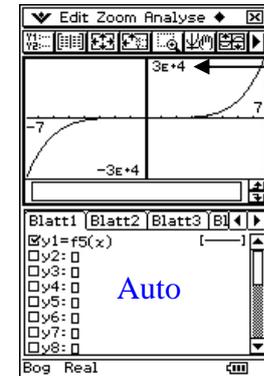
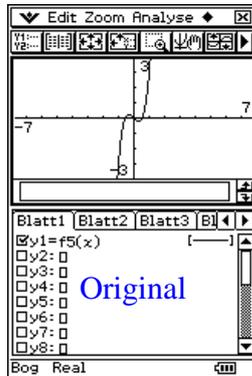
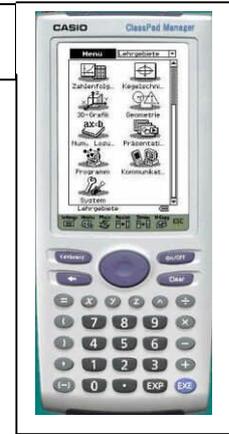
Die Zoom-Funktionen

Verkleinern und **Vergrößern**: Vergrößert bzw. verkleinert das Grafikfenster.

Auto: Wählt das Grafikfenster so, dass alle wichtigen Eigenschaften zu sehen sind. Nicht immer günstig, siehe Beispiel unten ...

Feld: Mit dem Stift wird durch Ziehen ein Ausschnitt gewählt, der anschließend so vergrößert wird, dass er das gesamte Grafikfenster ausfüllt.

Original: Setzt die Einstellungen des Betrachtungsfensters () auf die Originalwerte vor dem Zoomprozess zurück.



Ableitungsfunktionen

1. Ableitungsfunktion:

Den Befehl zur Bestimmung der Ableitung `diff()` kann man über *Keyboard* $\rightarrow abc$ oder über *Aktion* $\rightarrow Berechnungen$ eingeben. `diff(f(x),x,1)` bestimmt $f'(x)$. Falls x die Variable ist und die 1. Ableitungsfunktion berechnet werden soll, können beide Parameter weglassen werden, d.h. `diff(f(x),x)` und `diff(f(x))`.

Falls man die Ableitungsfunktion für weitere Berechnungen benötigt, bietet es sich an, dieser gleich einen Namen zuzuordnen, z.B. `Define f1(x) = diff(f(x),x,1)`

Dann kann man mit der Funktionsvariablen `f1` weiterarbeiten.

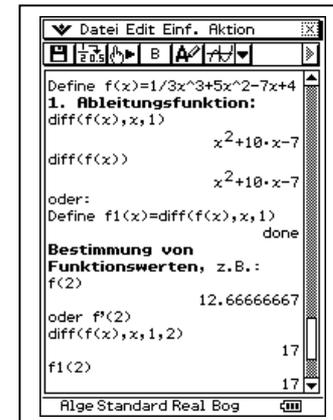
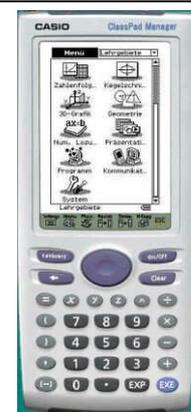
2. Ableitungsfunktion:

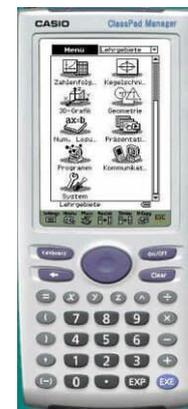
`diff(f(x),x,2)` bestimmt entsprechend $f''(x)$.

Funktionswerte

kann man entweder über eine Wertetabelle erhalten oder auch direkt: `diff(f(x),x,1,2)` liefert $f'(2)$.

Wenn man vorher die 1. Ableitungsfunktion als `f1` definiert hat (siehe oben), kann man diesen Wert so erhalten: `f1(2)` oder `f1(x)/x=2`





Funktionsuntersuchung

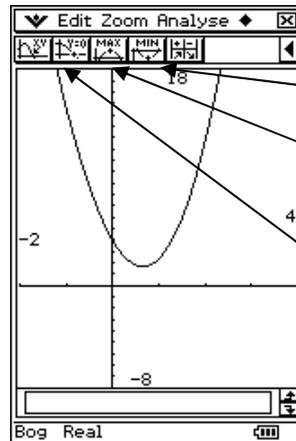
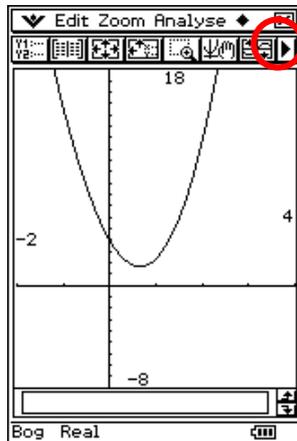
a) grafisch

Im Grafikbereich gibt es Icons (in der Menuleiste auf Dreieck  tippen) für die gängigen Untersuchungsmerkmale:

 liefert die **Nullstellen**,  und  die **lokalen Extrema**, für die Wendestellen nimmt man die 1. Ableitungsfunktion und bestimmt deren Extremstellen oder die 2. Ableitungsfunktion und deren Nullstellen.

Alternative: *Analysis* → *grafische Lösung* → ...

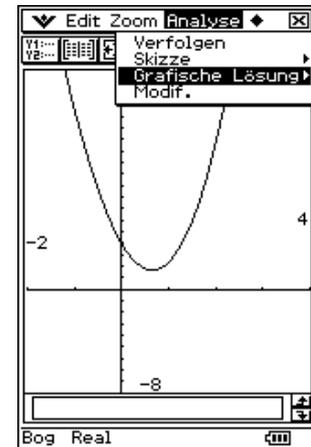
Vorsicht: Beide Verfahren liefern nur solche Stellen, die in dem dargestellten Bildausschnitt zu sehen sind und es liefert nur Näherungslösungen.

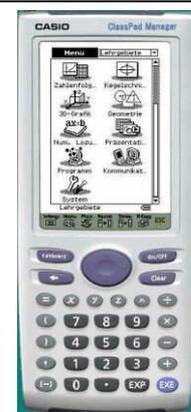


Lok. Maximum

Lok. Minimum

Nullstellen





Funktionsscharen definieren

Beisp. 1: $f_a(x) = x^4 + a \cdot x^3$

Mit dem ClassPad können Funktionsscharen folgendermaßen definiert werden:

Define $f(a,x)=x^4+a \cdot x^3$ oder auch $Define f(x)=x^4+a \cdot x^3$.

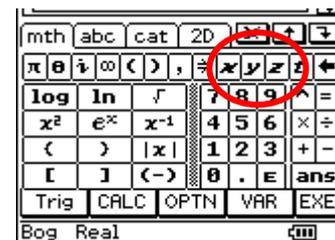
Beisp. 2: $g_{a,b,c}(x) = c(e^{-ax} - e^{-bx})$

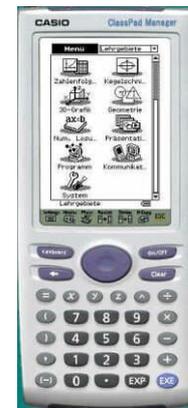
Define $g(x)=c \times (e^{(-a \times x)} - e^{(-b \times x)})$

Diese Funktion hat drei Parameter, von denen jeweils 2 gleichzeitig mit dem ClassPad variiert werden können.

Achtung

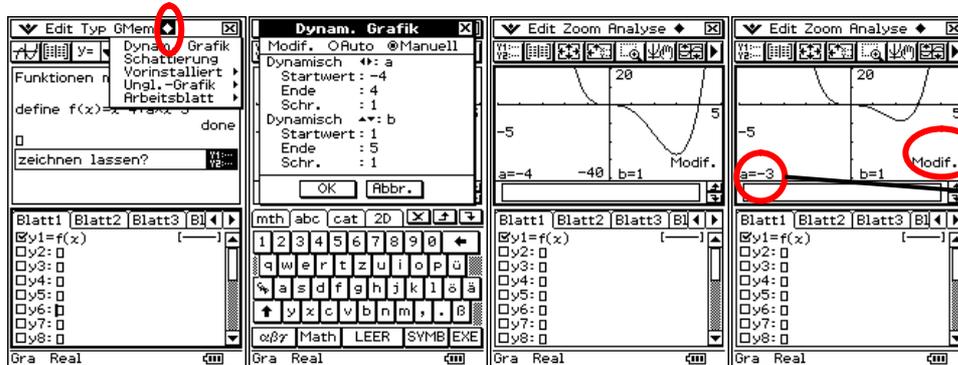
Bei Funktionsscharen muss darauf geachtet werden, dass man das Multiplikationszeichen zwischen z.B. a und x setzt oder die spezielle „dicke Systemvariable“ (z.B. von der Hardware-Tastatur) nutzt. Ansonsten würde der ClassPad die Variable x nicht im Funktionsterm finden, sondern „ax“ als 2-Buchstaben-Variable interpretieren.





Zeichnen von Graphen einer Funktionsschar (1):

1. Gib in den Grafikeditor die Gleichung der Funktionsschar oder die Funktionsvariable ein. Stelle über das Icon  den Zeichenbereich für x und y ein
2. Gehe in der Menuzeile auf  (Raute) und aktiviere „Dynam. Grafik“.
3. Verändere gegebenenfalls bei „Dynamisch“ den Namen für den Parameter der Funktionsschar (hier a), setze Start- und Endwert, sowie die Schrittweite fest und aktiviere „Manuell“.
4. Der ClassPad zeichnet die 1. Kurve (mit dem kleinsten eingestellten Parameterwert). Mit Hilfe der Cursorwippe, rechts und links, (bei zwei Parametern auch mit den Hoch-/Runter-Tasten) werden die weiteren Graphen der Schar gezeichnet.
5. Stellt man statt „Manuell“ „Auto“ ein, so werden alle eingestellten Parameterwerte automatisch dreimal durchlaufen.



Dyn. Modus

Parameterwert

Zeichnen von Grafen einer Funktionsschar (2):

Um möglichst viele Grafen einer Funktionsschar in einem gemeinsamen Koordinatensystem darzustellen, definiert man im Grafikeditor mehrere Funktionen in der gleichen Weise und setzt dann mit dem *with*-Operator verschiedene Werte für den Parameter.

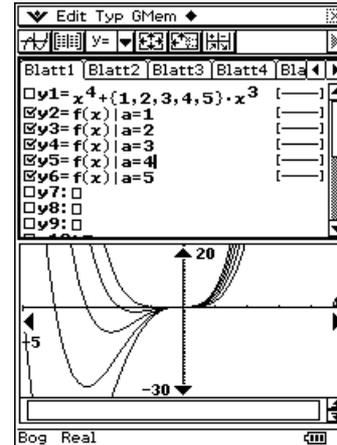
Oder man schreibt die Liste der Parameterwerte direkt in die Eingabezeile (siehe y1 im Screenshot rechts).

Achtung

Bei Nutzung der dynamischen Grafik ist zu beachten, dass danach der Parameter *a* belegt ist. Das hat zur Folge, dass dann z.B. die Ableitungsfunktion den Parameter nicht mehr enthält, sondern dafür der zuletzt berechnete Wert für *a* eingesetzt wird.

Lösung:

Über  *Setting* → *Variablenmanager* oder über den Befehl *delvar* (*Aktion* → *Befehle*) wird die entsprechende Variable gelöscht und damit der Parameter wieder freigegeben.

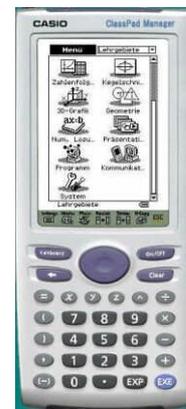


```
define f(x)=x^4+a*x^3
done
□
dynamische Grafik
f(x)
x^4+5*x^3
Hier bleibt die letzte Festlegung für a erhalten, daher
muss zunächst die Variable gelöscht werden:
delvar a
done
f(x)
x^4+a*x^3
□
mehrere Grafen
f(x)
x^4+a*x^3
```

Untersuchung von Funktionsscharen

Die Untersuchung von Funktionsscharen läuft genau so wie bei Funktionen, nur dass die Lösungen in der Regel noch einen oder mehrere Parameter enthalten. Die Entscheidung, wann z.B. bei der Untersuchung auf Extrema $f''(x_E) > 0$ ist, kann der Rechner nicht immer treffen.

Beispiele:



▼ Datei Edit Einf. Aktion

Untersuchung auf
Extrema:

Bsp. 1

Define $f(x)=x^4+ax^3$

done

Solve(diff(f(x),x,1)=0,x)

{x=0,x=-0.75·a}

diff(f(x),x,2,-0.75·a)

$2.25 \cdot a^2$

Es gilt also $f''(x_E) > 0$.

Alge Standard Real Bog

2. Beispiel.

define $h(x)=x^5-kx^3$

done

solve(diff(h(x),x,1)=0,x)

$\left\{ x=0, x=-\frac{\sqrt{15 \cdot k}}{5}, x=\frac{\sqrt{15 \cdot k}}{5} \right\}$

diff(h(x),x,2, $\frac{-\sqrt{15 \cdot k}}{5}$)

$\frac{-6 \cdot \sqrt{15 \cdot k}^3}{5}$

solve($\frac{-6 \cdot \sqrt{15 \cdot k}^3}{5} < 0, k$)

{k>0}

Diese Ungleichung löst der Rechner ohne Probleme.

Beispiel 3:

Hier kommt man durch
zwischenzeitlichen
Rückgriff auf die Gleichung $g_1''(x_E) = 0$ weiter.

Weitere Einsetzungen
zeigen, dass $g_1''(x_E) > 0$
für $a > 1$.

```

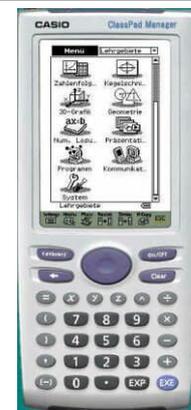
-----
define g1(x) = g(x)|b=1
done
g1(x)
e-a·x - e-x
solve(diff(g1(x), x, 1)=0, x)
{
  -ln(1/a)
  x = -----
  a-1
}
diff(g1(x), x, 2, -ln(1/a))
-(1/a)1/a-1 + 1/a-1 · {
  1/a-1 - a2
  (1/a)1/a-1 (1/a)1/a-1
}
(1)

```

```

((a) (a))
solve(diff(g1(x), x, 2, -ln(1/a)) > 0, a)
{
  a2·(1/a)1/a-1 - (1/a)1/a-1 > 0
}
solve(a2·(1/a)1/a-1 - (1/a)1/a-1 = 0, a)
{a=0, a=1}
a2·(1/a)1/a-1 - (1/a)1/a-1 | a=1.5
2

```



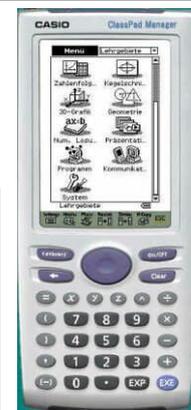
Grenzwertbetrachtungen

Der ClassPad kann den Grenzwert immer dann ohne Probleme berechnen, wenn der Parameter den Grenzwert nicht oder nur über das Vorzeichen beeinflusst.

Im letzteren Fall wird das Ergebnis mit Hilfe der Signumfunktion angegeben:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

```
define f(x)=x^4+a*x^3
lim (f(x))|
x→∞ done
lim (f(x))
x→-∞ ∞
kein Problem, auch nicht bei
lim (a*x^4+x^3)
x→∞ ∞
Hier helfen Einschränkungen
lim (a*x^4+x^3)|a<0
x→-∞ ∞*signum(a)
```



Man kann auch mit dem *With-Operator* ($\text{Keyboard} \rightarrow \text{math} \rightarrow \text{OPTN}$) arbeiten. Dabei darf die Einschränkung sowohl in als auch außerhalb der Klammer für den Term des Grenzwertes stehen.

Bei komplizierteren Fällen helfen Einschränkungen des Definitionsbereiches nicht immer weiter. In solchen Fällen gibt der ClassPad „undefined“ aus.

Konkrete Parameterfestlegungen wirken nur, wenn sie direkt hinter dem Funktionsterm stehen.

Beispiel:

```

g1(x)
lim (g1(x))
x→0      e-a·x-e-x

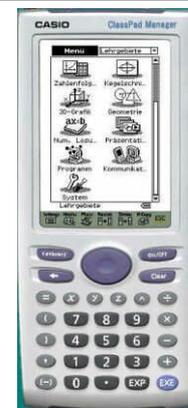
lim (g1(x))
x→-0     Undefined

lim (g1(x))
x→-0     Undefined

das Problem kann der CP nicht lösen, nur mit konkreten
Einschränkungen:
lim (g1(x)|a>0)
x→0      Undefined

lim (g1(x)|a=1)
x→0      0

lim (g1(x)|a=-1)
x→0      0
  
```



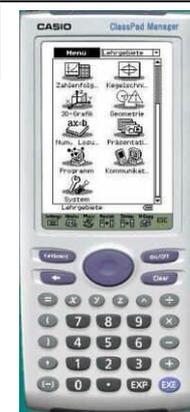
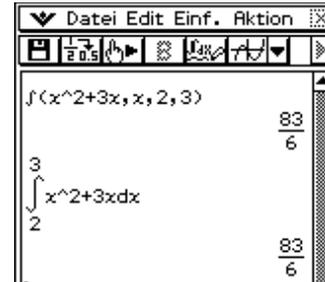
Bestimmte Integrale können bestimmt werden

a) über *Aktion* → *Berechnung*:

$\int(\text{Term}, \text{Variable}, \text{untere Grenze}, \text{obere Grenze})$

b) über **Keyboard** → *2D* → *CALC*

(keine Klammern nötig beim Funktionsterm)



c) in der Grafikanwendung

über *Analyse* → *grafische Lösung*

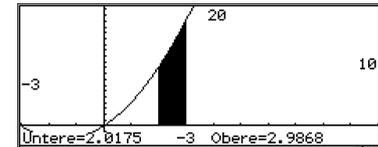
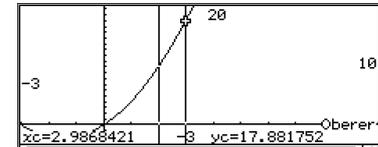
→ $\int dx$ wird die Fläche unter einem

Graphen näherungsweise berechnet:

Mit dem Cursor stellt man zunächst die linke und nach Bestätigung mit

(EXE) auch die rechte Intervallgrenze ein. Es wird die Maßzahl der Fläche angegeben und die Fläche im Graphen schwarz gekennzeichnet.

Die Grenzen können auch direkt über die Tastatur eingegeben werden. Nach der Eingabe der linken Grenze öffnet sich automatisch ein Abfragefenster.



Stammfunktionen

a) über *Aktion* → *Berechnung*, ohne Integralgrenzen

$$\int (x^2+3x, x)$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3 \cdot x^2}{2}$$

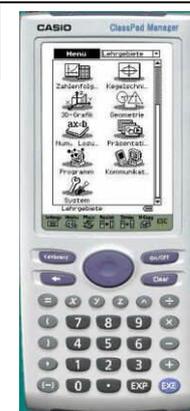
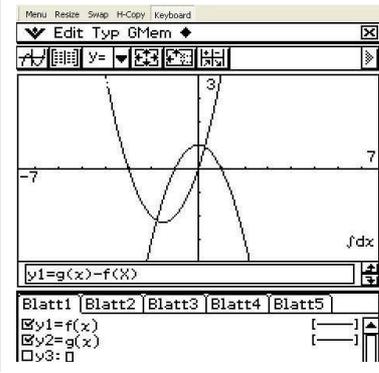
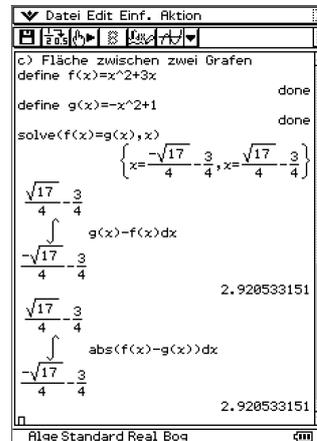
b) über *Keyboard* → *2D* → *CALC*
(keine Klammern nötig beim Funktionsterm)

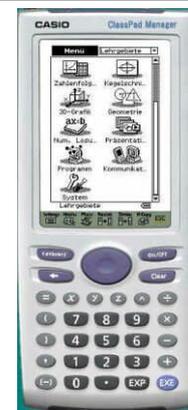
$$\int x^2+3x dx$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3 \cdot x^2}{2}$$

Fläche zwischen zwei Grafen

Nach Definition der Funktionen und Bestimmung der Schnittstellen kann die eingeschlossene Fläche über die Differenzfunktion bestimmt werden. Ggf. kann auch der Betrag der Differenzfunktion eingesetzt werden:

$$\text{abs}(f(x) - g(x))$$




Numerische Integration (Beispiel Ober-/Untersumme)

Hier werden zunächst die benötigten Parameter für untere und obere Grenze sowie Anzahl der Unterteilungen mit dem Zuweisungsoperator definiert (z.B. 2 \Rightarrow a), damit man sie ohne Probleme zum Experimentieren ändern kann.

Untersumme (für monoton steigende Funktionen)

$$(b-a)/n * \sum f(a+(i-1)*(b-a)/n), i, 1, n)$$

Obersumme (für monoton steigende Funktionen)

$$(b-a)/n * \sum f(a+i*(b-a)/n), i, 1, n)$$

Nach dem Experimentieren mit verschiedenen n kann man schließlich die Anzahl der Unterteilungen beliebig groß werden lassen:

Untersumme

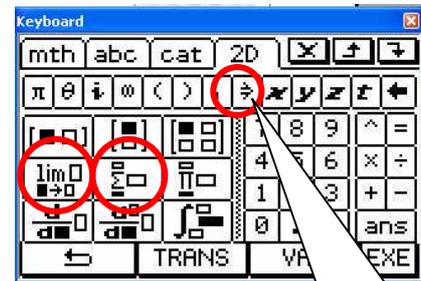
$$\lim((b-a)/n * \sum f(a+(i-1)*(b-a)/n), i, 1, n), n, \infty)$$

Obersumme

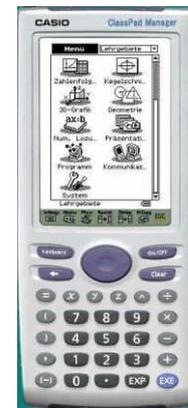
$$\lim((b-a)/n * \sum f(a+i*(b-a)/n), i, 1, n), n, \infty)$$

Für das **Trapezverfahren** lautet die Formel:

$$\lim((b-a)/n * \sum (0.5 * f(a+(i-1)*(b-a)/n) + f(a+i*(b-a)/n)), i, 1, n), n, \infty)$$



Zuweisungsoperator



Rotationsvolumen

Das Rotationsvolumen (Rotation um die x-Achse) kann über die bekannte Formel berechnet werden oder aber näherungsweise in der Grafikanwendung (*Analyse* → *grafische Lösung*) bestimmt werden. Die Güte der Näherung ist dabei von der Einteilung der x-Achse und der Schrittweite des Cursors abhängig.

e) Rotationsvolumen

$$\pi \int_2^3 f(x)^2 dx$$

617.951275

Edit Zoom Analyse

Verfolgen Skizze

Gr Nullstelle
Maximum
Minimum
fMax
fMin
y-Achsen-Schnittpkt.
Schnittpunkt
y berechnen
x berechnen
Jdx
Wendepunkt
Punkte-Abstand
 $\pi \int (f(x))^2 dx$

Blatt1 | Blatt2 | Blatt3 | Blatt4 | Blatt5

y1=f(x) []

y2: 0

y3: 0

y4: 0

y5: 0

y6: 0

y7: 0

y8: 0

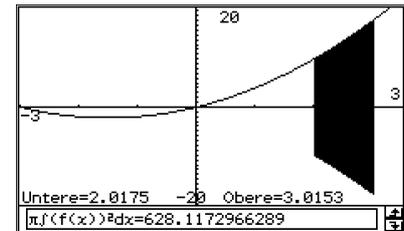
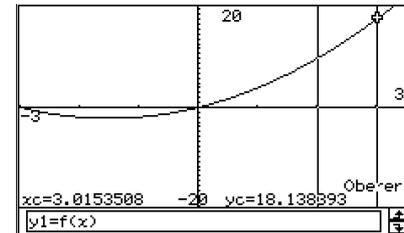
y9: 0

y10: 0

y11: 0

y12: 0

Bog Real



Lösen von linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme lassen sich mit Hilfe des Gleichungssystemlösers aus dem 2D-Keyboard ($\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$) (Variante 1) oder mit Hilfe der erweiterten Matrix und des Gauß-Jordan-Algorithmus (der im ClassPad implementiert ist) (Variante 2) lösen:

Variante 1:

Über **Keyboard** $\rightarrow 2D \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$ erhält man eine Vorlage für ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen. Durch jedes weitere Tippen auf das Symbol wird das Gleichungssystem um eine Zeile erweitert.

Beispiel:

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \\ y + z = 4 \end{array} \right|$$

Beispiel 1: (eindeutige Lösung)

$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \\ y + z = 4 \end{array}$$

1. Variante:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \\ y + z = 4 \end{array} \right|_{x, y, z}$$

$$\left\{ x=1, y=\frac{5}{2}, z=\frac{3}{2} \right\}$$

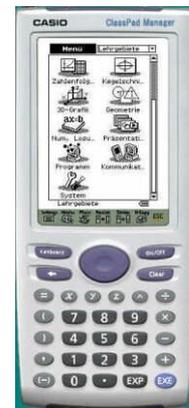
Beispiel 2: (keine Lösung)

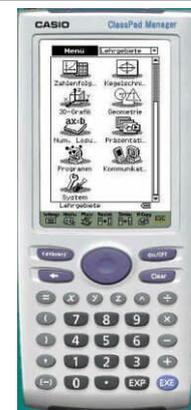
$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \\ x = -1 \end{array}$$

1. Variante:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \\ x = -1 \end{array} \right|_{x, y, z}$$

No. Solution





Über- und unterbestimmte LGS:

Variante 1:

Mit dem Gleichungslöser aus dem 2D-KeyBoard muss man darauf achten, dass die Zahl der Gleichungen jeweils mit der Zahl der Variablen übereinstimmt.

Beispiel 3: (unterbestimmtes GS)

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ -4x + y - z &= -3 \end{aligned}$$

1. Variante: Grundsätzlich muss die Anzahl der Gleichungen mit der Zahl der Variablen übereinstimmen. Daher gibt es drei verschiedene Ansätze:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \end{cases} \Bigg|_{x, y} \quad \{x=1, y=z+1\}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \end{cases} \Bigg|_{x, z} \quad \{x=1, z=y-1\}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \end{cases} \Bigg|_{y, z} \quad \{y=2 \cdot x + z - 1, z=z\}$$

Bei Gleichungen ohne Lösung wird jeweils „no solution“ ausgegeben.

Beispiel 4: (Überbestimmtes Gleichungssystem)

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ -4x + y - z &= -3 \\ y + z &= 4 \\ x + y + z &= 5 \end{aligned}$$

1. Variante:

Hier muss man eine zusätzliche Variable einfügen:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -4x + y - z = -3 \\ y + z = 4 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Bigg|_{x, y, z, t}$$

$$\left\{ x=1, y=\frac{5}{2}, z=\frac{3}{2}, t=t \right\}$$

Über- und unterbestimmte LGS:

Variante 2:

Im Gegensatz zum Gleichungssystemlöser aus dem 2D-Keyboard muss man hier nicht darauf achten, dass die Zahl der Variablen und der Zeilen übereinstimmt. Hier kommt es lediglich auf die richtige Interpretation der Ergebnismatrix an:

keine Lösung, denn $0z=1 !!$

Beispiel 3: (unterbestimmtes GS)

$$\begin{aligned} 2x-y+z &= 1 \\ -4x+ y -z &= -3 \end{aligned}$$

$$\text{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösungsmenge:
 $L = \{(x/y/z) \mid x=1 \text{ und } y-z=1\}$

Beispiel 4:

$$\begin{aligned} 2x-y+z &= 1 \\ -4x+ y -z &= -3 \\ y+z &= 4 \\ x+y+z &= 5 \end{aligned}$$

$$\text{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hier erkennt man die eindeutige Lösung daran, dass eine Zeile nur Nullen enthält.



Weiteres Beispiel

Das Gleichungssystem darf auch nicht-lineare Gleichungen enthalten:

The screenshot shows the ClassPad software interface with a menu bar (Datei, Edit, Einf., Aktion) and a toolbar. The main workspace contains the following text:

```

b) Exponentieller Ansatz
define B(x)=Bo*x*e^(v*x-w*x^2)
done
{
  B(0)=375
  B(7)=705
  diff(B(x), x, 1, 45)=0
} Bo, v, w
{Bo=375, v=0.09778736646, w=1.086526294E-3}
define bneu(x)=B(x) | {Bo=375, v=0.09778736646, w=1.086526294E-3}
done
bneu(x)
375 * e^(-461941 * x^2 / 425154000 + 320405 * x / 3276548)
  
```

At the bottom of the window, it says "Alge Standard Real Bog".





Vektoren

Ein Vektor kann am einfachsten über die 2D-Tastatur (CALC) mit dem Icon  als Spaltenvektor oder mit  als Zeilenvektor eingegeben werden. Für einen dreidimensionalen Vektor muss man zweimal auf das Icon klicken.

Die wichtigsten Befehle sind:

norm(Vektor)

berechnet die **Länge** des Vektors

angle(Vektor1,Vektor2)

berechnet den **Winkel** zwischen zwei Vektoren

vektor1 +/- vektor2

bildet die **Summe**, die **Differenz** zweier Vektoren

dotP(Vektor1,Vektor2)

berechnet das **Skalarprodukt** zweier Vektoren

crossP(Vektor1,Vektor2)

berechnet das **Vektorprodukt** zweier Vektoren

UnitV(Vektor)

berechnet den **Einheitsvektor**

Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow b$$

norm(a) $\sqrt{5}$

angle(a,b) 107.3663915

3*a $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

dotp(a,b) -7

crossp(a,b) $\begin{bmatrix} -14 \\ -7 \\ 16 \end{bmatrix}$

unitv(a) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-2 \cdot \sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$



Überprüfen auf lineare Unabhängigkeit

Überprüfen auf lineare (Unabhängigkeit)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ni c$$

Lösen des Gleichungssystems
 $r \cdot a + s \cdot b + t \cdot c$

$$\begin{cases} r+5 \cdot s+t=0 \\ -2 \cdot r+6 \cdot s+t=0 \\ 7 \cdot s+t=0 \end{cases} \quad r, s, t$$

$$\begin{cases} r+5 \cdot s+t \\ -2 \cdot r+6 \cdot s+t \\ 7 \cdot s+t \end{cases} \quad \{r=0, s=0, t=0\}$$

Umwandeln in der entsprechenden Matrix
 augment(a,b) $\ni m$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

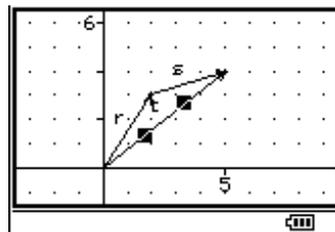
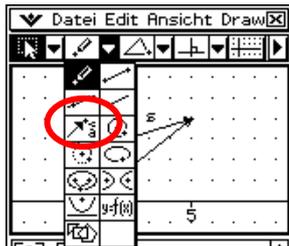
augment(m,c) $\ni m$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

rref(m)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Darstellung von Vektoren im \mathbb{R}^2



(Geometrische) Addition
 zweier Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Geraden

Geraden kann man zum Beispiel über den Stütz- und den Richtungsvektor eingeben.

Schnittpunkte von Geraden beispielsweise kann man über ein lineares

Gleichungssystem (Keyboard \rightarrow 2D) ermitteln, zur Berechnung des Abstands von P zu g verwendet man das Skalarprodukt.

▼ Datei Edit Einf. Aktion

$a+s \cdot b \rightarrow g_1$
 $a+t \cdot c \rightarrow g_2$

$$\begin{cases} 5 \cdot s + 1 \\ 6 \cdot s - 2 \\ 7 \cdot s \end{cases}$$

$$\begin{cases} t+1 \\ t-2 \\ t \end{cases}$$

Da die Anzhl der Variablen mit der Zahl der Gleichungen übereinstimmen muss, wählt man eine dritte, nicht vorkommende Variable.

$$\begin{cases} 5 \cdot s + 1 = t + 1 \\ 6 \cdot s - 2 = t - 2 \\ 7 \cdot s = t \end{cases} \quad s, t, z$$

{s=0, t=0, z=z}

Ermittlung des Schnittpunktes
 $g_1 | \{s=0, t=0, z=z\}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alge Standard Real Gra

▼ Datei Edit Einf. Aktion

Abstand Punkt - Gerade
 Vektor PQ bilden (Q auf g1)
 $g_1 - c$

$$\begin{bmatrix} 5 \cdot s \\ 6 \cdot s - 3 \\ 7 \cdot s - 1 \end{bmatrix}$$

muss zum Richtungsvektor senkrecht stehen:

$$\text{solve}(\text{dotp}(\begin{bmatrix} 5 \cdot s \\ 6 \cdot s - 3 \\ 7 \cdot s - 1 \end{bmatrix}, b) = 0, s)$$

$$\left\{ s = \frac{5}{22} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \cdot s \\ 6 \cdot s - 3 \\ 7 \cdot s - 1 \end{bmatrix} \Big|_{\left\{ s = \frac{5}{22} \right\}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{25}{22} \\ -\frac{18}{11} \\ \frac{13}{22} \end{bmatrix}$$

$\text{norm}(\text{ans})$

$$\sqrt{2090}$$

Alge Standard Real Gra

Ebenen

Ebenen in der Parameterform gibt man mit Hilfe des Stützvektors und der beiden Richtungsvektoren ein.

The screenshot shows the ClassPad interface with the following content:

▼ Datei Edit Einf. Aktion

22

Ebenen
 $a+s*b+t*c \rightarrow E$

$$\begin{bmatrix} 5 \cdot s+t+1 \\ 6 \cdot s+t-2 \\ 7 \cdot s+t \end{bmatrix}$$

Berechnung des Normalenvektors
 $\text{crossp}(b,c)$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zugriff auf die 2. Zeile (1. Spalte)
 $E[2,1]$

$$6 \cdot s+t-2$$

Punkt bestimmen
 $E|s=-2 \quad |t=1$

$$\begin{bmatrix} -8 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Alge Standard Real Gra



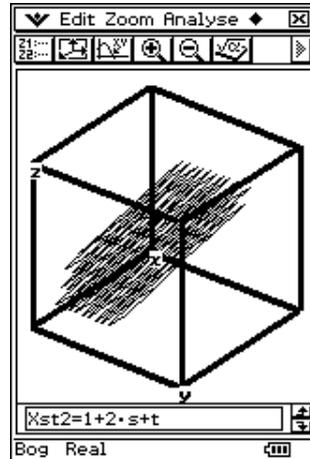


Darstellung in der 3D-Anwendung

Zur Eingabe in der 3D-Anwendung kann entweder die Koordinaten- oder die Parametergleichung dienen. Zum Umschalten verwendet man das Icon $Z=$ bzw. Xst .



Zum
Umschalten

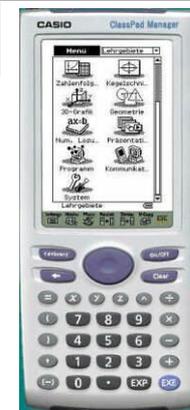


Koordinatengleichung der Ebene:

$$E: -2x+z=1, \text{ da } z = 2x + 1$$

bzw. Parametergleichung der Ebene:

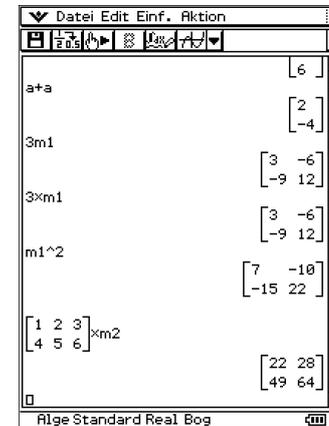
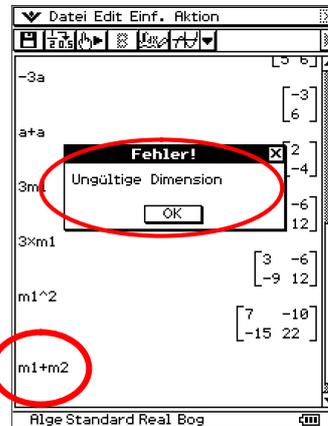
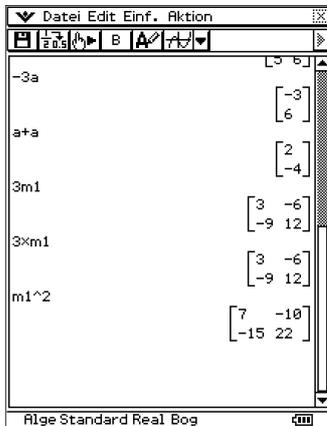
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Zur **Addition von zwei Matrizen** benutzt man das normale Additionszeichen, ebenso bei der **Matrizenmultiplikation** das Multiplikationszeichen. Dies gelingt natürlich nur dann, wenn die entsprechenden Rechenoperationen auch definiert sind.

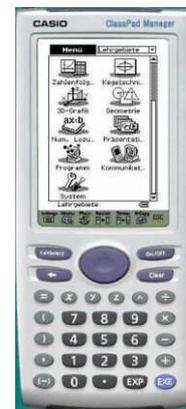
Das **Vervielfachen einer Matrix** (= skalare Multiplikation) geht mit und ohne Multiplikationszeichen.

Potenzen quadratischer Matrizen werden natürlich mit dem Zeichen \wedge berechnet.



Matrizen können auch erstellt und bearbeitet werden mit Befehlen im Aktions- und Interaktiv-Menü unter *Matrix-Erstellen* und *Matrix Berechnung*. Die wichtigsten Befehle:

- *trn* : Bildung der transponierten Matrix
- *ident(n)*: Erstellt eine Einheitsmatrix vom Typ $n \times n$
- *dim*: Liefert die Dimension einer Matrix und gibt die Anzahl der Zeilen und Spalten an.
- *det*: Berechnet die Determinante zu einer quadratischen Matrix



Screenshot of the ClassPad Manager interface showing the 'Matrixrechnung' (Matrix Calculation) menu. The menu is open, displaying various matrix-related functions. The 'Matrixrechnung' option is highlighted.

a+a		
3m1	dim	
	det	
	norm	
	rank	
3xm1	ref	
	rref	
m1^2	eigV1	3 -6
	eigVc	-9 12
	LU	
	QR	7 -10
	swap	-15 22
	mRow	
	mRowAdd	
	rowAdd	
	rowDim	
	rowNorm	
	colDim	22 28
	colNorm	49 64

Alge Standard Real Bog

Screenshot of the ClassPad Manager interface showing the results of matrix calculations. The results are displayed in a list format.

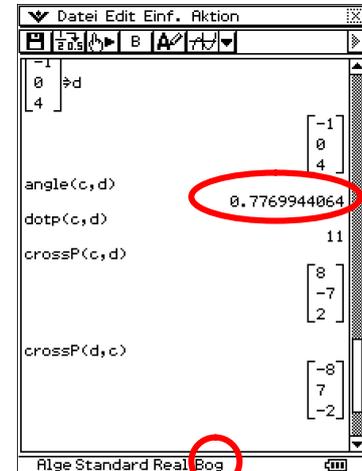
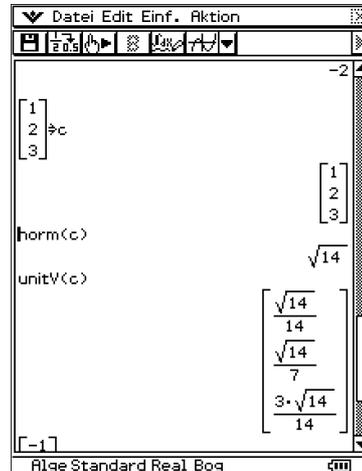
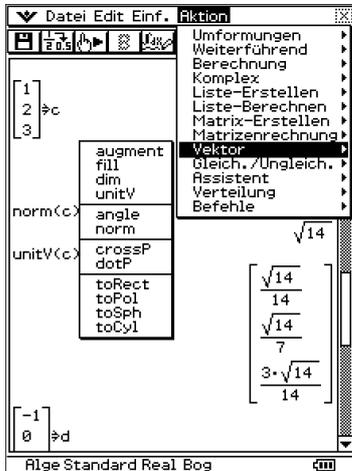
trn(m1)	$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$
trn(m2)	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
dim(m1)	{2,2}
dim(m2)	{3,2}
ident(3)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
det(m1)	-2

Alge Standard Real Bog



Folgende Befehle, die im Aktions- und Interaktiv-Menü unter **Vektor** zu finden sind, können nützlich sein:

- **dotP**: Berechnet das **Skalarprodukt** zweier Vektoren
- **norm**: Berechnet den **Betrag** bzw. die euklidische Norm eines Vektors
- **unitV**: bestimmt den zugehörigen **Normaleneinheitsvektor**
- **angle**: bestimmt den **Winkel** zwischen zwei Vektoren (bzw. das Bogenmaß bei Einstellung *Bog*)
- **crossP**: berechnet das **Vektorprodukt** unter Beachtung der Reihenfolge



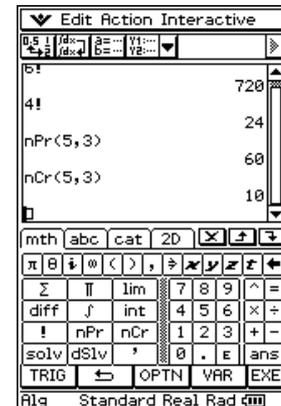
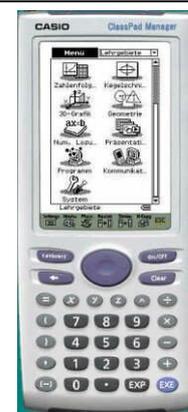
- Hat man n unterscheidbare Gegenstände, so kann man diese auf $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten anordnen oder es gibt $n!$ mögliche Ziehungen, wenn man nacheinander die Gegenstände auswählt. Im ClassPad gibt man einfach $n!$ ein.
- Wählt man aus n verschiedenen Gegenständen (z.B. Kugeln) genau k -mal nacheinander einen und legt den gezogenen Gegenstand nicht zurück, so gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ verschiedene Möglichkeiten.

Beispiel: Der Befehl wird aufgerufen über **Keyboard** \rightarrow *math* \rightarrow *CALC* oder über die abc-Tastatur. $nPr(n,k)$ berechnet also die Gesamtzahl der k -elementigen Permutationen in einer n -elementigen Menge.

- Zieht man aus n unterscheidbaren Gegenständen genau k und ordnet diese, so gibt es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Möglichkeiten. Dieser Quotient heißt

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ und wird mit dem Befehl

$nCr(n,k)$ (**Keyboard**) \rightarrow *math* \rightarrow *CALC*) berechnet. $nCr(n,k)$ berechnet die Gesamtzahl der k -elementigen Kombinationen in einer n -elementigen Menge.





Simulationen

Zum Erzeugen von Zufallszahlen gibt es den Befehl *rand*, er erzeugt eine ganze Zahl zwischen a und b: *rand(a,b)*

Zur Erzeugung von n Zufallszahlen verwendet man: *randlist(n,a,b)*

Wenn man der Liste gleich einen Variablennamen zuweist, kann man sie z.B. in der Statistikanwendung weiter verwenden:

randlist(n,a,b) → list1

```

Erzeuge eine Zufallszahl zwischen 1 und 6
rand(-2,6)
-2

Erzeuge 100 Zufallszahlen zwischen 1 und 6
randlist(100,1,6)
{4,1,2,5,3,3,4,5,3,3,6,2,2,6,4,1,6,3,1,1,1,4,5,4,1,4,
Dieser kann man natürlich auch gleich einen Variablennamen
zuweisen ...
randlist(100,1,6)→list1
{6,4,4,5,6,2,3,1,1,5,3,5,5,1,6,1,2,3,2,6,6,2,2,1,5,4,
... und die Liste dann im Editor weiter benutzen z.B. um
die Verteilung darzustellen

Listeneditor

Natürlich kann man die Listen auch aufsummieren:
sum(list1)
346
  
```



Beispiel: Das Ziegenproblem

Du stehst in einer Fernsehschau vor drei Türen, hinter einem befindet sich ein Auto, hinter den beiden anderen eine Ziege.

Der Moderator bitte um deine Wahl und öffnet dann eine der beiden anderen Türen, hinter der sich eine Ziege befindet.

Die abschließende Frage lautet: Möchtest du deine Wahl ändern oder behältst du sie bei?

Beispielsimulation:

- Zunächst simuliert man nun 1000 Spieldurchgänge mit jeweils einer Erstwahl und speichert alles in einer Liste mit Namen "wahl"
 $randlist(1000,1,3) \rightarrow wahl$
- Dann simuliert man, hinter welcher Tür sich das Auto befindet:
 $randlist(1000,1,3) \rightarrow auto$
- Im Listeneditor lassen Sie unter "list3" die Differenz wahl-auto berechnen.

Aufgaben:

- a) In wie vielen Fällen lohnt sich ein Wechsel?
- b) Vergleiche mit den Ergebnissen der anderen Schülerinnen und Schüler.

(Bilder siehe Karte 3)



Simulation:
 Zunächst simulieren wir nun 1000 Spieldurchgänge mit jeweils einer Erstwahl und speichern alles in einer Liste mit Namen "wahl"
`randlist(1000,1,3)→wahl`
`{2,1,2,1,2,3,2,2,2,3,2,2,3,3,3,2,2,3,1,2,3,2,1,3,1,2,}`
 Nun simulieren wir, hinter welcher Tür sich das Auto befindet:
`randlist(1000,1,3)→auto`
`{1,2,2,1,3,2,3,1,3,2,3,1,1,1,2,2,2,3,1,1,2,1,3,2,2,1,2,}`
`0`
 In der nachfolgenden Liste wird unter "list3" die Differenz `wahl - auto` berechnet. Die Verteilung der Zahlen `-2` bis `2` lässt sich graphisch darstellen. Klicke auf das Grafik-Symbol und stelle als Schrittweite 1 ein:
 Listen und Grafik

Auswertung:

Stat-Gratik einst.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Zeich.: Ein O RUS

Typ: Histogramm

X-List: list3

Häuf-k: 1

In der nachfolgenden Liste wird unter "list3" die Differenz `wahl - auto` berechnet. Die Verteilung der Zahlen `-2` bis `2` lässt sich graphisch darstellen. Klicke auf das Grafik-Symbol und stelle als Schrittweite 1 ein:

list3

list6

wahl

12	
21	
32	
41	
52	
63	

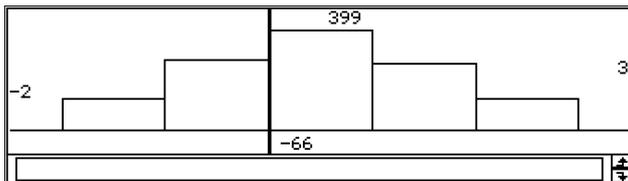
Cal=

11=2

Bog Auto Standard

	wahl	auto	list3	list4	list5	list6	
2	1	2	-1				
3	2	2	0				
4	1	1	0				
5	2	3	-1				
6	3	2	1				

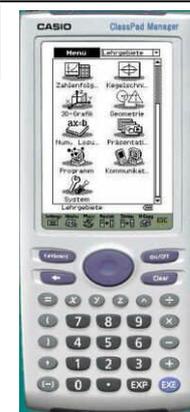
Cal= wahl-auto



Zur Anzeige der Grafik muss unter *Grafik einst* Histogramm eingestellt sein.

Im nachfolgenden Fenster wird als Schrittweite 1 eingestellt.

Mit dem Icon kann man dann die Höhe der Säulen feststellen.



Einzelwahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit von k Erfolgen bei einem n -stufigen Bernoulli- Experiment

mit Erfolgswahrscheinlichkeit p ist $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Diese Wahrscheinlichkeit kann im ClassPad mit **BinomialPDF**(k,n,p) berechnet werden.

Die Funktion findet man unter *Aktion* \rightarrow *Verteilungen* oder unter **Keyboard** \rightarrow **cat**, man kann sie auch über das *abc*-Keyboard eingeben

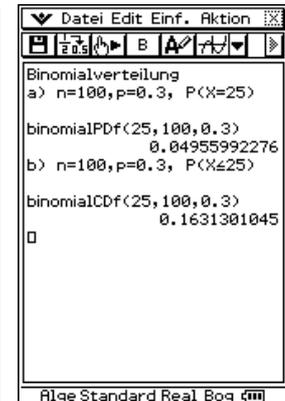
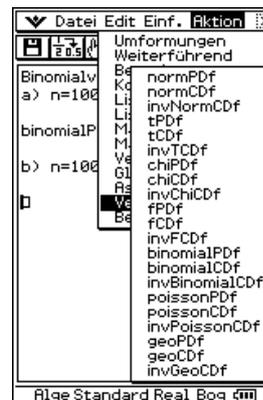
Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Unter der kumulierten Wahrscheinlichkeit versteht man

$$P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = k)$$

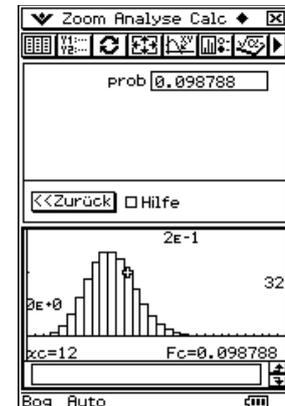
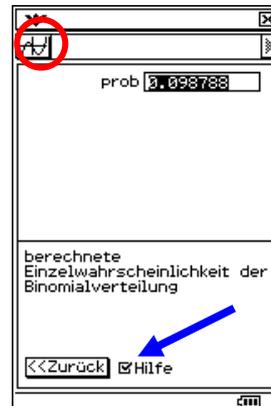
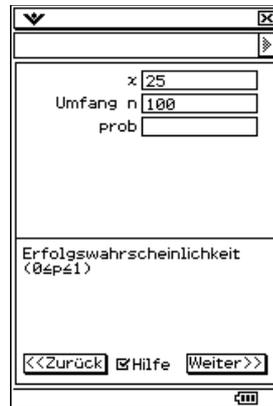
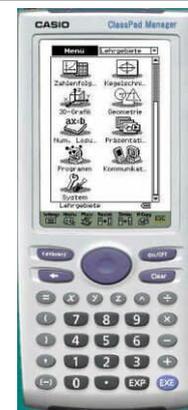
Diese Wahrscheinlichkeit kann im ClassPad über die Funktion **BinomialCDF**(k,n,p)

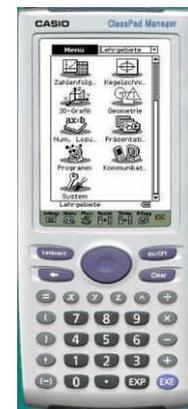
(*Aktion* \rightarrow *Verteilungen* oder **Keyboard** \rightarrow **cat**) oder *abc*-Tastatur) berechnet werden .



Verteilungen berechnen und darstellen -1

Man geht in die *Statistikanwendung* und ruft oben in der Menuleiste *Calc* auf. In dem Fenster tippt man auf *Verteilung* und wählt dann **Binom. Einzel-Wkt** aus. Die restlichen Angaben werden automatisch über ein Fenster angefordert, bei Bedarf kann man auch das Kästchen bei *Hilfe* ankreuzen. Die angeforderte Wahrscheinlichkeit wird ausgegeben. Wenn man dann oben links das Grafik-Symbol antippt, erscheint das Histogramm zur Wahrscheinlichkeit. Über *Analyse* → *Verfolgen* oder das Icon  kann man nun mit der Wippe die gesamte Verteilungsfunktion durchlaufen.

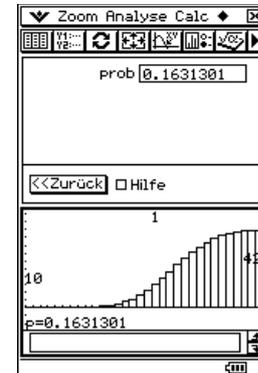
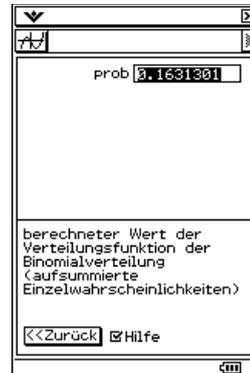
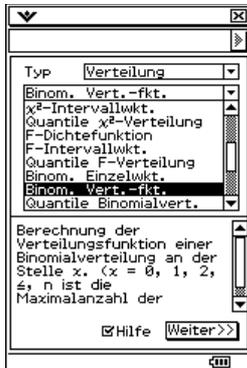


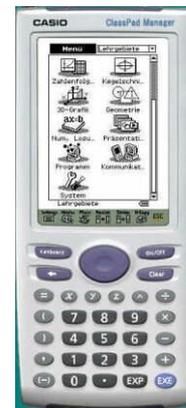


Verteilungen berechnen und darstellen -2

Wählt man über *Calc* die Verteilung **Binom. Vert.-fkt.** aus, so erhält man die gewünschte kumulierte Wahrscheinlichkeit und die grafische Darstellung dieser aufsummierten Verteilung.

Den Bildausschnitt stellt man über das Icon  ein, das „Durchblättern“ der Funktionswerte über .

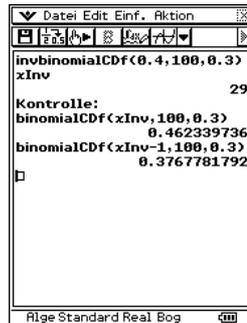
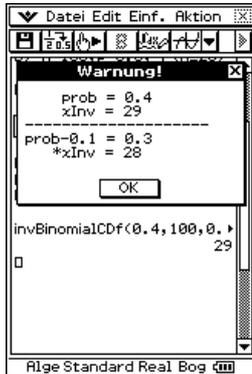




Berechnen von k bei gegebener Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$

Dies leistet die Funktion ***invBinomialCdf*** $(P(X \leq k), n, p)$, die man z.B. wieder über *Aktion* \rightarrow *Verteilungen* bekommen kann. Das Ergebnis wird in einem Extrafenster angezeigt ($k = xInv$). Der Wert wird unter der Variablen $xInv$ auch abgespeichert und kann damit zum Weiterberechnen verwendet werden.

Falls die Gefahr eines Rundungsfehlers besteht, führt der CP die Berechnung noch einmal mit einer um eine Zehnerpotenz verringerten Wahrscheinlichkeit aus (Wert wird als $xInv^*$ angezeigt). In diesem Fall lohnt sich eine Probe mit *binomialCdf*(). Das Ergebnis erhält man auch in der Statistikanwendung (*Listeneditor*): *Calc* \rightarrow *Verteilung* \rightarrow *Quantile Binomialvert.*





Einzelwahrscheinlichkeiten

Eine stetige Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ , wenn

sich ihre Dichtefunktion in der Form $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ schreiben lässt. Der

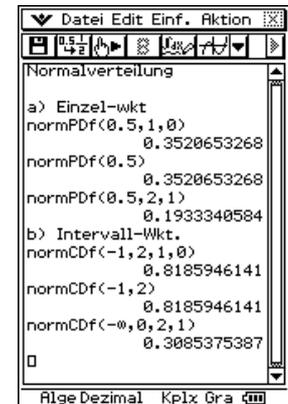
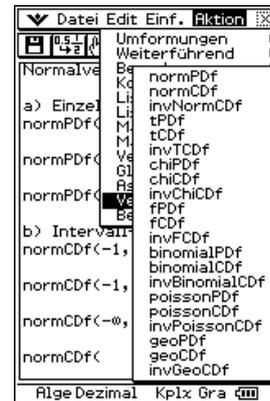
Graph dieser Verteilung hat eine Glockenform.

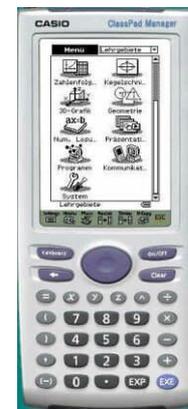
Für die Standardnormalverteilung gilt $\mu=0$ und $\sigma = 1$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte an einer Stelle x ($P(X=x)$) kann im ClassPad mit der Funktion **NormPDF**(x, σ, μ) berechnet werden. Die Funktion findet man unter *Aktion* \rightarrow *Verteilungen*.

Kumulierte Wahrscheinlichkeiten

Die Intervallwahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ einer Normalverteilung kann über die Funktion **normCDF**(a, b, σ, μ) berechnet werden. (*Aktion* \rightarrow *Verteilungen*). Für die Standardnormalverteilung können μ und σ weggelassen werden.





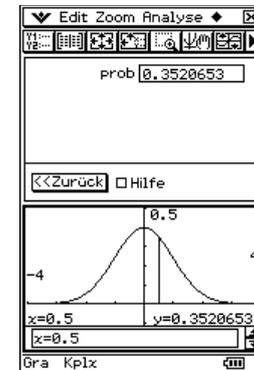
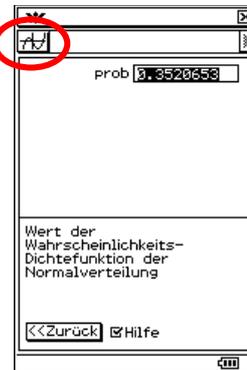
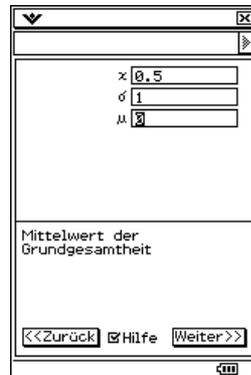
Verteilungen berechnen und darstellen - 1

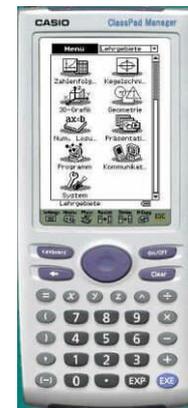
Man öffnet die Statistikanwendung (*Menu* → *Statistik*) und ruft oben in der Menuleiste *CALC* auf. In dem Fenster tippt man auf *Verteilung* und wählt dann die **NV-Dichtefunktion** aus.

Die restlichen Angaben werden per Abfragemaske angefordert, bei Bedarf kann man auch das Kästchen bei *Hilfe* ankreuzen.

Die angeforderte Wahrscheinlichkeit wird ausgegeben. Wenn man dann oben links das Grafik-Symbol antippt, erscheint der Graph der Dichtefunktion.

Über *Analyse* → *Verfolgen* oder das Icon  kann man nun mit der Wippe die gesamte Verteilungsfunktion durchlaufen.

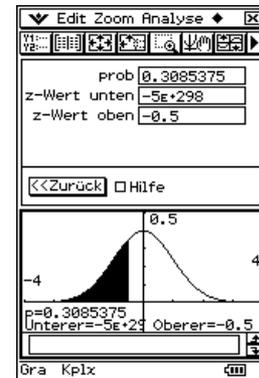
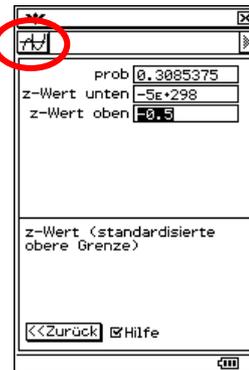
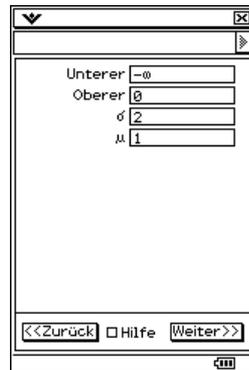


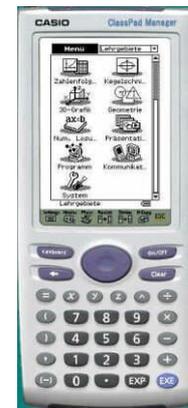


Verteilungen berechnen und darstellen - 2

Wählt man als Typ unter *Verteilung* die **NV-Intervallwkt** aus, so erhält man die gewünschte Intervallwahrscheinlichkeit einschließlich der standardisierten z-Werte und mit Hilfe des Icon  die grafische Darstellung dieser aufsummierten Verteilung.

Den Grafikausschnitt stellt man über das Icon  ein, das „Durchblättern“ der Funktionswerte über .





Berechnen der Intervallgrenze(n) bei gegebener Intervallwahrscheinlichkeit

Dies leistet die Funktion $\text{invNormCdf}(\text{Lage}, P(X \leq k), \sigma, \mu)$, die man wieder über *Aktion* \rightarrow *Verteilungen* aufruft. Für die Lage ist „L“ ($P(X \leq a)$), „R“ ($P(X \geq b)$) oder „C“ ($P(-c \leq X \leq c)$) einzusetzen. Lage, σ und μ darf man weglassen, dann wird automatisch mit „L“, 1,0 gerechnet.

Die Berechnung sowie die grafische Darstellung kann auch in der Statistikanwendung durchgeführt werden: *CALC* \rightarrow *Verteilung* \rightarrow *Quantile Normalverteilung*.

```

▼ Datei Edit Einf. Aktion
[Icons]
d) Umkehrfunktion
P(X≤b)=0.3
invNormCdf("L",0.3,1,0)
-0.5244005127
b=-0.5244005127
einfacher:
invNormCdf(0.3)
-0.5244005127
P(X≥a)=0.3
invNormCdf("R",0.3,1,0)
0.5244005127
a=0.5244005127
P(-c≤X≤c)
invNormCdf("C",0.3,1,0)
-0.3853204664
-c=-0.3853204664
Alge Dezimal Kplx Gra
  
```

```

▼
Lage Wkt. Mittelpunkt
Fläche
σ 1
μ 0
Vorgabe der Lage der
Wahrscheinlichkeit (L Links,
R Rechts, C symmetrisch
um μ)
<<Zurück [Hilfe] Weiter>>
  
```

```

▼
x1InvN -0.38532
x2InvN 0.3853204
berechnete obere
Intergationsgrenze
(Quantil) bei der
Voreinstellung L
(linksseitig) oder C
(symmetrisch),
<<Zurück [Hilfe]
  
```

Dateneingabe

Die Statistikanwendung (*Menu* → *Statistik*) kann für statistische Berechnungen und zur Darstellung von Zahlenpaaren genutzt werden.

Die vorgegebenen Listennamen *list1*, *list2*,... können (müssen aber nicht) verändert werden, statt *list1* und *list2* kann man z.B. *Zeit* und *Temp* in den Listenkopf schreiben.

Folgende Tabelle soll eingegeben werden:

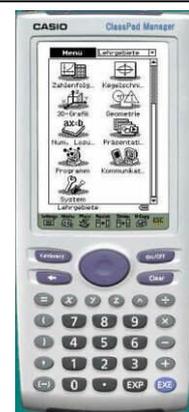
Zeit	0	1	2	3	4	5	6
Temp	58,5	56,4	54,8	53,9	53,1	52,4	51,6

(1) Gehe in die 1. Spalte und gib in jede Zelle die Zahl ein (Abschluss mit **EXE**).

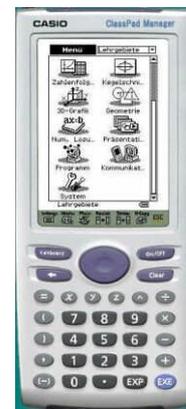
Alternative 1: Gehe in die Zelle *Cal* der 1. Liste und gib alle Werte als Zahlenmenge ein, d.h. man beginnt und schließt mit der Mengenklammer. Die beiden

Mengenklammern sind über „*math*“ im **Keyboard** zu setzen. Wichtig ist, dass zwischen zwei Werten ein Komma steht, z.B. {0,1,2,3,4,5,6}

Alternative 2: Gib in die Zelle *Cal* den Befehl *seq(x,x,Start,Ende,Schritt)* ein, wobei *Start* der Startwert ist, *Ende* der letzte Wert und *Schritt* die Differenz zwischen den Zahlen. Dieses Verfahren bietet sich nur an, wenn man viele Zahlen im gleichen Abstand hat (eine arithmetische Folge).



- (2) Gib in der 2. Spalte (List2) in der Zelle „Cal“ die Temp-Werte als Zahlenmenge oder jede einzelne Zahl in eine Zelle ein.
- (3) Um eine Grafik zu zeichnen, muss zunächst in *Grafik einst.*, der „Typ“ der Grafik (hier: *Pkte-Plot*) ausgewählt werden. Wähle für X-list *list1* oder *Zeit* aus (entsprechend dem Spaltenkopf), für Y-list *list2* oder *Temp* und für Häufigkeit *1*. Für *Mark.* kannst du eines der angebotenen Markierungssymbole auswählen.
- (4) Die Grafik wird nun nach dem Antippen des Symbols  gezeichnet.

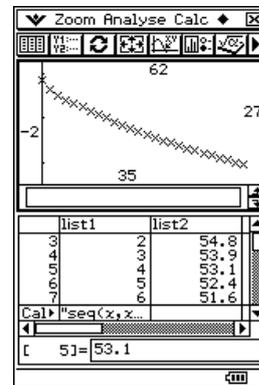


	list1	list2	list3
1	0	58.5	39.3
2	1	56.4	37.2
3	2	54.4	35.2
4	3	53.9	34.7
5	4	53.1	33.9

Cal: "seq(...)"
list2

Cal= seq(x,x,0,25,1)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stat-Grafik einst.								
Zeich.: <input checked="" type="radio"/> Ein <input type="radio"/> Aus								
Typ: Pkte-Plot								
X-List: list1								
Y-List: list2								
Häuf-k: 1								
Mark.: Kreuz								



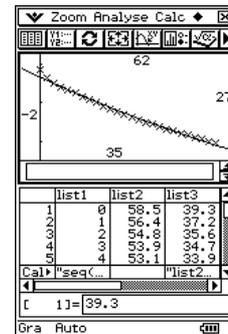
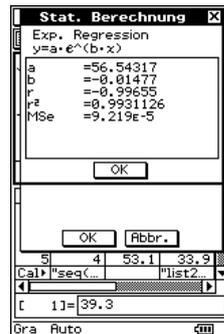
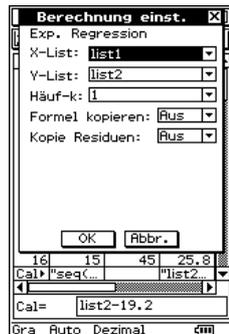
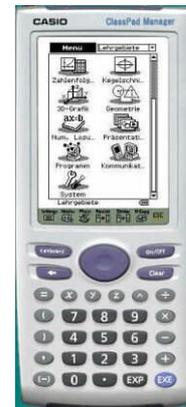
Regression

Der ClassPad bietet verschiedene Regressionen an. Beispielsweise sind für Wachstumsvorgänge die „lineare Regression“, die „exponentielle Regression“, die „allgemeine exponentielle Regression“ und die „logistische Regression“ interessant.

Um eine Regression durchzuführen, tippt man vom Listen- oder vom Grafikfenster auf „Calc“ und wählt die entsprechende Regression aus.

Im Grafikfenster erscheint dann zunächst das Fenster, um die entsprechenden Listen auszuwählen. Danach werden in einem weiteren Fenster die Parameter der entsprechenden Funktion und mit dem Korrelationskoeffizienten r ein Maß für die Güte der Regression angegeben.

Die Punktwolke und die gewählte Modellierungsfunktion werden nach dem Antippen von **OK** gezeichnet.



Wählt man bei der Auswahl der zugrunde liegenden Spalten unter *Formel kopieren* einen Funktionsnamen (z.B. $y1$), so kann man (in anderen Anwendungen) auf den Modellierungsterm zurückgreifen, z.B. um mehrere Modellierungsversuche einschließlich der Punktwolke darzustellen.

Tipt man aus dem Grafikenfenster auf das Icon für den Grafikeditor und dann auf das Symbol , so werden beide Modellierungsfunktionen dargestellt.

