

## CASIO-FORUM Ausgabe 2/2007

Aufgabenbeispiel für den FX-991ES

## Kleine Änderung – große Wirkung

Bekannt ist die folgende Aufgabe:

Um den Äquator wird ein Seil gespannt. Dieses Seil wird um 1 m verlängert und gleichmäßig angehoben, so dass ein zum Äquator konzentrischer Kreis entsteht. Kann unter das Seil nun eine Katze hindurch kriechen?

Die Antwort lautet ja, denn der Abstand beträgt  $\frac{1m}{2\pi}$  also rund 16 cm und zwar unabhängig vom Radius der umspannten Kugel.

Nun wird die Fragestellung derart abgeändert, dass das Seil nicht gleichmäßig angehoben wird sondern nur an einer Stelle von der (Erd)oberfläche entfernt wird. Bis zu welcher Höhe  $h$  kann das Seil nun angehoben werden? Kann nun ein Mensch hindurch kriechen?

Die Bedeutung der Bezeichnungen wird aus dem Bild deutlich.

Die Größe des Winkels  $\varphi$  ist im Bogenmaß angegeben.

Dann ergibt sich:

Die Länge des Kreisbogens

$$T_1T_2 = (2\pi - 2\varphi)r$$

$$\tan(\varphi) = \frac{t}{r}$$

$$(h+r)^2 = r^2 + t^2, \text{ also } r^r = h(h+2r)$$

$$\text{und } t = \sqrt{h(h+2r)}.$$

$$\text{Weiter } \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{h(h+2r)}}{r}\right).$$

Laut Aufgabenstellung sollte

$$T_1T_2 + 2t = 2\pi r + 1 \text{ (alle Längenangaben in$$

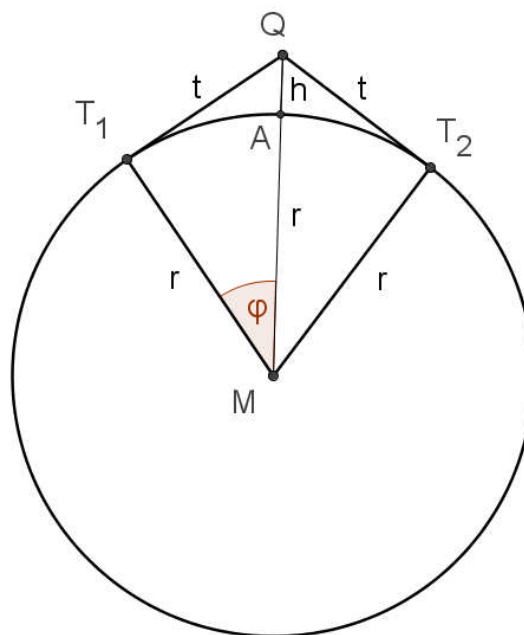
Meter) gelten.

Durch Einsetzen, ergibt sich:

$$\left(2\pi - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{h(h+2r)}}{r}\right)\right) \cdot r + 2\sqrt{h(h+2r)} = 2\pi r + 1.$$

Da das Bild eine Symmetrieachse hat, kann die Gleichung auch durch 2 dividiert werden:

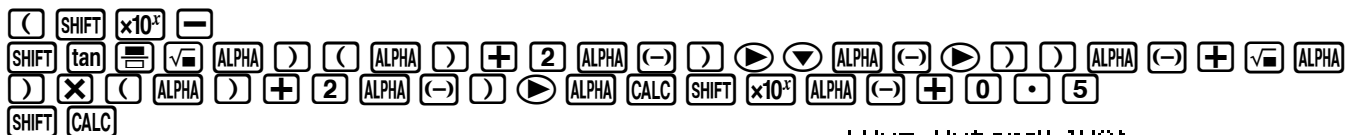
$$\left(\pi - \arctan\left(\frac{\sqrt{h(h+2r)}}{r}\right)\right) \cdot r + \sqrt{h(h+2r)} = \pi r + 0,5$$



Da die Aufgabe auch für verschiedene Kugelradien betrachtet werden kann, sollte der fünfmal benötigte Radius  $r$  in einem Speicher, z.B. A (  $\text{SHIFT}$   $\text{RCL}$   $(\leftarrow)$  ) hinterlegt werden (Erdradius: 6387000m).

Die transzendente Gleichung für  $h$  kann mit dem FX-991ES gelöst werden (als Winkelmaß muss Radiant eingestellt werden  $\text{SHIFT}$   $\text{MODE}$   $4$  )!

Tastaturfolge:



Näherungswert  $0$  eingeben;  $\text{=}$  liefert die Ausgabe

$|2 \times \pi - 2 \times \tan^{-1} \frac{h}{R}| = 0$   
 $X = 121.5051915$   
 $L-R = 0$

Folglich kann das Seil auf der Erde bis zu einer Höhe von rund 121 Meter angehoben werden. Unglaublich! Dieser Wert ist – im Gegensatz zur Eingangsaufgabe – vom Kugelradius abhängig. Durch eine Änderung des im Speicher A hinterlegten Radius kann das rasch überprüft werden, an verschiedenen Bällen ist es auch leicht nachzumessen.