Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2008

Mathematik

Aufgaben

Name, Vorname: ....

Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1-3 des Arbeitsblattes)

Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk und Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

1.2 Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung

$$h(x) = \frac{x^2 - 49}{x - 7} \text{ mit } x \in D_h.$$

Geben Sie die Nullstelle von h an.

1.3 Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = (x - 2)(x + 2) \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

- Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' von f.
- Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1.4 In den Abbildungen sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, der zugehörigen Ableitungsfunktion f′ und einer weiteren Funktion g dargestellt.

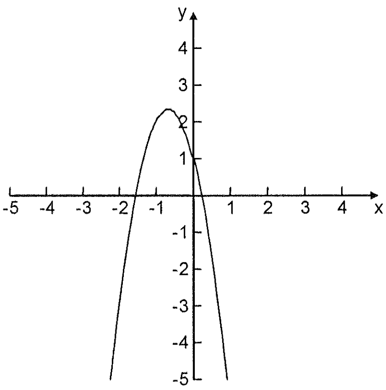


Abbildung 1

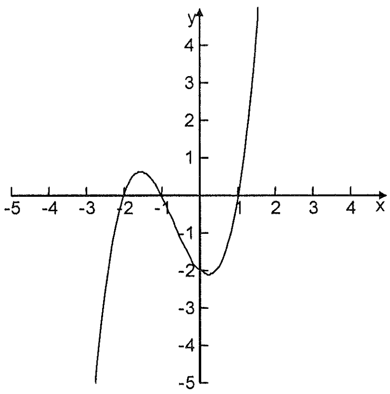


Abbildung 2

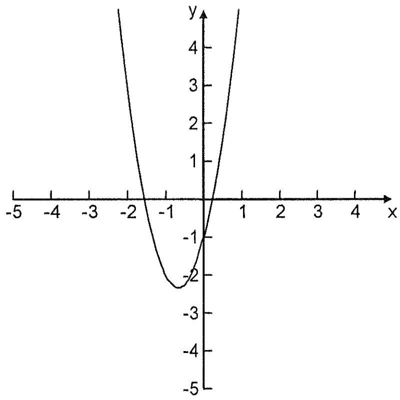


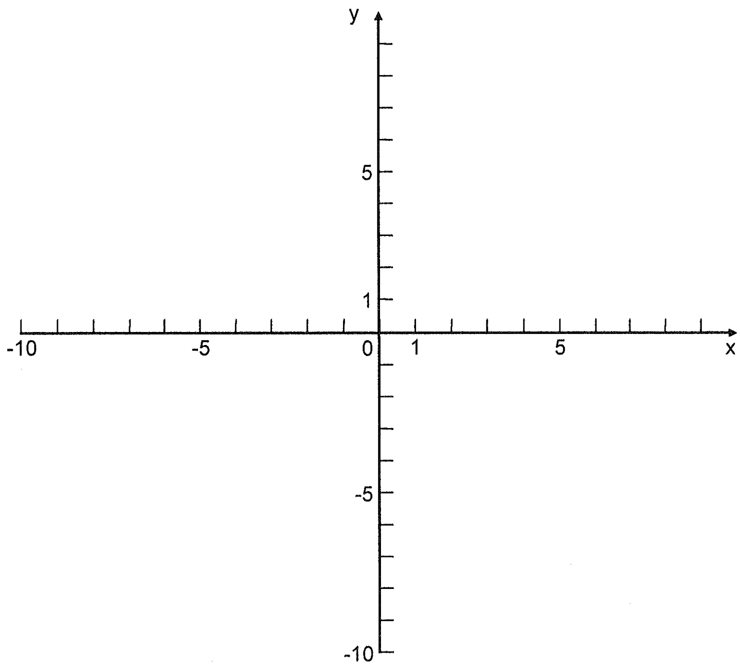
Abbildung 3

Ordnen Sie den Abbildungen die Funktionen f und f' zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.5 Gegeben ist eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- Eine Polstelle von f ist 2.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
- Eine Nullstelle von f ist −1.

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit diesen Eigenschaften.



2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD gegeben:
A(4 | 1 | 2), B(2 | 3 | 2), C(2 | 1 | 4), D(4 | −1 | 4).

2.1
- Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm handelt.
- Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist.
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes.

2.2 Gegeben ist ein weiterer Punkt E(3 | 2 | 1).
Untersuchen Sie, ob E auf der Viereckseite $\overline{AB}$ liegt.

3 Stochastik

Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her.
Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft sind.
An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5 %.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde am Montag produziert.
B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl: Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B. Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten. Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen.

Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B. Von den Aufgaben B1, B2 und B3 ist **eine** auszuwählen.

Bearbeitungszeit: Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Grundkursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 255 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Hilfsmittel: Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Hinweis: Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.
Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges: Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.

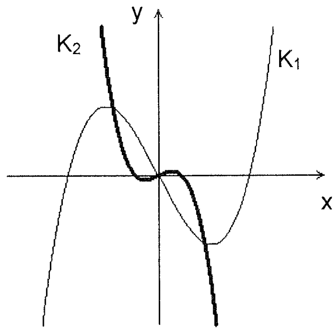
Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form werden entsprechend der geltenden Prüfungsbestimmungen gewertet.

A1 Analysis

1.1 Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{18}x^3 - 2x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 0{,}5x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$



Der Graph von f_1 ist K_1. Der Graph von f_2 ist K_2.

1.1.1 Untersuchen Sie den Graphen K_2 auf Symmetrie.

1.1.2 Die beiden Graphen K_1 und K_2 schließen für $x \geq 0$ eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.1.3 Gegeben sind die Punkte $Q(u \mid f_1(u))$ und $R(u \mid f_2(u))$ im Intervall $0 \leq u \leq 3, u \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Abstand der Punkte Q und R für u = 1.

Ermitteln Sie rechnerisch den Wert für u so, dass der Abstand zwischen den Punkten Q und R maximal wird.

1.2 Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$$f_a(x) = \frac{1}{12a}x^3 - ax \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

1.2.1 Weisen Sie nach, dass die Graphen G_2 und $G_{-\frac{1}{2}}$ im Koordinatenursprung senkrecht aufeinander stehen.

1.2.2 Für die folgenden Betrachtungen gilt a > 0.

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a und geben Sie die Art der Extrema an.

A2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4 \mid 1{,}5 \mid -3{,}5)$, $B(-1 \mid 1{,}5 \mid -3{,}5)$, $C(-1 \mid -1{,}5 \mid 0{,}5)$ und $D(4 \mid -1{,}5 \mid 0{,}5)$ gegeben.

2.1 Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen.

2.2 Stellen Sie das Viereck ABCD in einem kartesischen Koordinatensystem dar. Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein Quadrat ist.

2.3 ABCD sei die gemeinsame Grundfläche zweier gerader quadratischer Pyramiden mit den Spitzen S_1 und S_2 und der Höhe von je 5 LE.

2.3.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2.

2.3.2 Eine der beiden Spitzen hat nur positive Koordinaten.

Ergänzen Sie die grafische Darstellung der Grundfläche zu der Pyramide mit dieser Spitze.

2.4 Gegeben ist eine gerade Pyramide P mit der Spitze $S(1{,}5 \mid 4 \mid 1{,}5)$ und der quadratischen Grundfläche ABCD.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide P.

2.5 Die Punkte $P_t\,(4 - 5t \mid 1{,}5 \mid -3{,}5)$ liegen auf der Geraden durch A und B.

2.5.1 Berechnen Sie die Größe des Winkels DP_2C.

2.5.2 Zeigen Sie, dass für keinen Wert von t gilt: $\sphericalangle\, DP_tC = 90°$.

A3 Analytische Geometrie / Stochastik

3.1 Die geradlinigen Kurse zweier Flugzeuge werden in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Geraden k_1 und k_2 beschrieben.

k_1 verläuft durch den Punkt P(−290 | 320 |140) in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ -50 \end{pmatrix}$.

k_2 verläuft durch die Punkte Q_1(−800 | 500 | −70) und Q_2(200 | 0 | −70).
(1 LE $\hat{=}$ 1 km)

3.1.1 Zeichnen Sie die Geraden k_1 und k_2 in ein geeignetes Koordinatensystem. Berechnen Sie die Entfernung von P nach Q_1.

3.1.2 Geben Sie für k_1 und k_2 je eine Geradengleichung an. Ermitteln Sie die Lage der beiden Geraden zueinander.

3.1.3 Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 310 \\ 620 \\ -610 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

die Geraden k_1 und k_2 senkrecht schneidet.

Ermitteln Sie den Abstand der Geraden k_1 von der Geraden k_2.

3.2 Eine Fluggesellschaft verwendet für eine bestimmte Strecke Flugzeuge mit 50 Plätzen. Die Flüge auf dieser Strecke sind vorab stets ausgebucht. Im Durchschnitt werden 10 % der gebuchten Plätze jedoch storniert und damit nicht belegt.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der nicht belegten Plätze je Flug an.
X ist annähernd binomialverteilt.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse für je einen Flug.

A: Genau 5 Plätze sind nicht belegt.

B: Höchstens 2 Plätze sind nicht belegt.

3.2.2 Um Flugzeuge auf dieser Strecke besser auszulasten, bietet eine Fluggesellschaft stets 4 % mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Damit geht das Unternehmen das Risiko der Überbuchung ein. Für ein Flugticket nimmt die Fluggesellschaft 120 €. Bei Stornierung zahlt der Fluggast 60 €. Bei Abweisung eines Fluggastes wegen Überbuchung entstehen der Fluggesellschaft Kosten von 500 €.

Berechen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fluggäste wegen Überbuchung nicht mitfliegen können.
Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft für einen Flug, wenn 51 Fluggäste den Flug antreten möchten?

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1 (Analysis):

Pflichtaufgabe 1.1

geg. Funktion y = f(x) = (1/2)*x^3 - 3x^2 + 5, x∈R.

ges. Koordinaten des Wendepunktes von f

Lösung:

zweite Ableitung auf Null setzen:
y' = (3/2)*x^2 - 3×2x, y'' = 3x - 6 = 0
ergibt
3x = 6, d.h. **x = 2**.

Die 3. Ableitung ist verschieden von 0, d.h. **W(2;f(2)) mit f(2) = -3** ist der gesuchte Wendepunkt.

Nebenrechnung: f(2) = (1/2)×2^3-3×2^2+5 = 4 - 12 + 5 = -3

Kontrolle im GTR(CAS):
Define f(x) = ((1)/(2))x^(3)-3x^(2)+5
done
diff(f(x),x,2)=0 ergibt -6+3*x=0
solve(ans,x) ergibt {x=2}
f(2) ergibt -3

Pflichtaufgabe 1.2

geg. h(x) = (x^2 - 49) / (x - 7) mit x∈D(h)

ges. Nullstelle von h

Lösung:

x=7 ist eine Definitionslücke und kommt als Nullstelle nicht in Frage.
x=-7 ist die gesuchte Nullstelle.

Kontrolle im GTR(CAS):
Define h(x) = (x^2-49)/(x-7)
done
solve(h(x)=0,x) ergibt {x=-7}

Pflichtaufgabe 1.3

geg. f(x) = (x-2)(x+2), x∈R.

ges. Ableitung f'(x) und Integral ∫(f(x),x,0,1)

Lösung:

f(x) = x^(2)-4 (3. binomische Formel)

f'(x) = 2*x

und

∫(f(x),x,0,1) = ∫((x^2-4),x,0,1)
= ((1/3)x^3-4x)|x=1 - ((1/3)x^3-4x)|x=0 = 1/3-4 = -11/3

Kontrolle im GTR(CAS):

Define f(x) = (x-2)(x+2)
done
diff(f(x),x,1) ergibt 2*x
∫(f(x),x,0,1) ergibt -11/3

Pflichtaufgabe 1.4

geg. drei Schaubilder einer ganzrationalen Funktion f,
deren Ableitung f' und eine weitere Funktion g

Graphen zu f, f' und g:

Es gilt: Nullstellen der ersten Ableitung weisen auf Extremstellen der Ausgangsfunktion hin. Der mittlere Graph hat zwei Extrempunkte, d.h. Abb. 2 beschreibt f und Abb. 1 oder Abb. 3 sind die Ableitung. Der erste Extrempunkt ist ein Minimum, links von x_{min} ist der Anstieg positiv, rechts davon negativ. Somit ist Abb. 3 die Ableitung f' und Abb. 1 damit g = –f' (f' gespiegelt).

Beispiele für f, f' und g:

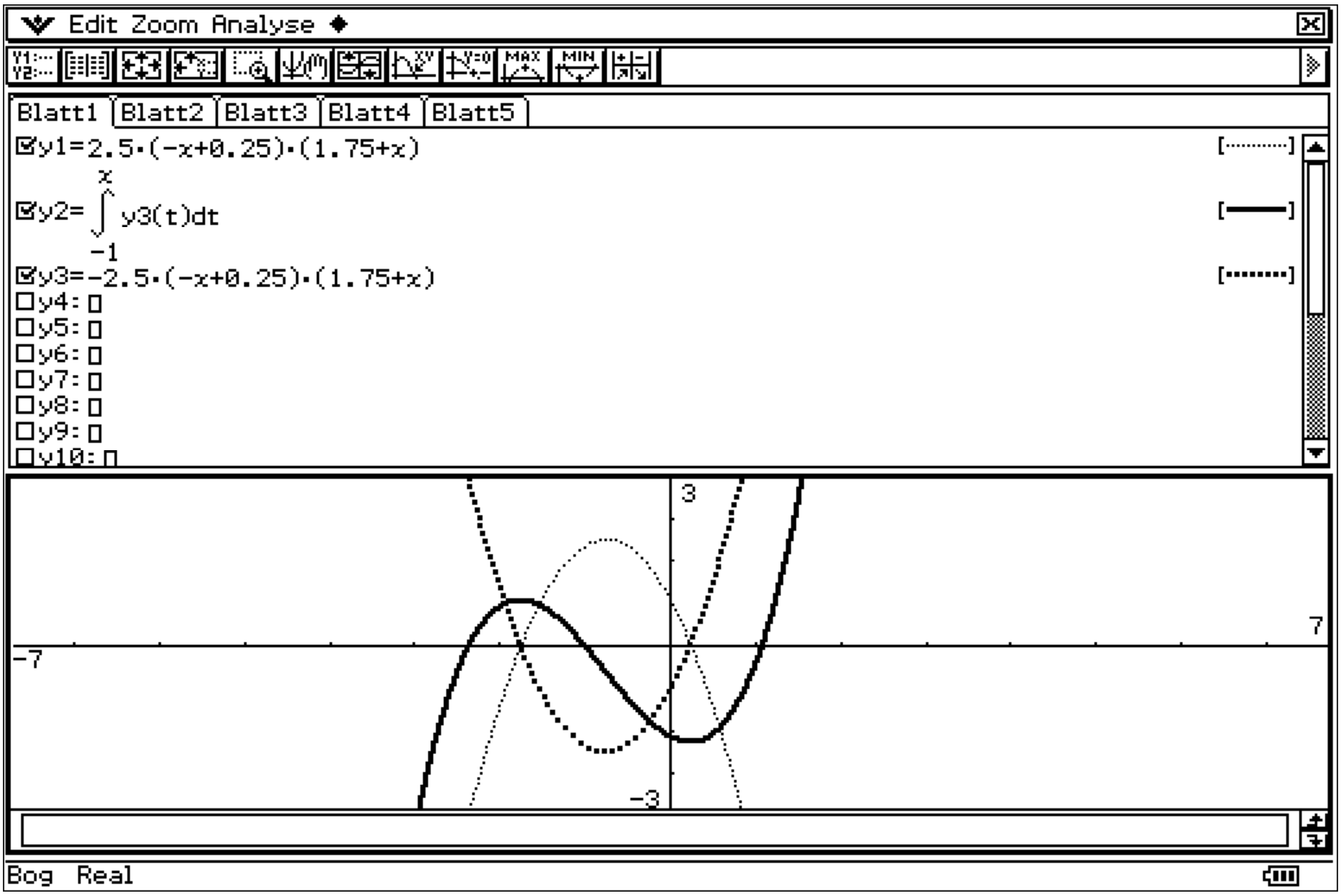


Abb. 1: g(x) = 2.5*(-x+0.25)*(1.75+x) (vgl. y1(x))

Abb. 2: f(x) = ∫(f'(x),x,-1,x) = ∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x)
= 5*x^3/6 + 15*x^2/8 - 35*x/32 - 205/96 (vgl. y2(x))

Abb. 3: f'(x) = -2.5*(-x+0.25)*(1.75+x) (vgl. y3(x))

Rechnung im GTR(CAS):

∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x) ergibt 5*x^3/6+15*x^2/8-35*x/32-205/96

Pflichtaufgabe 1.5

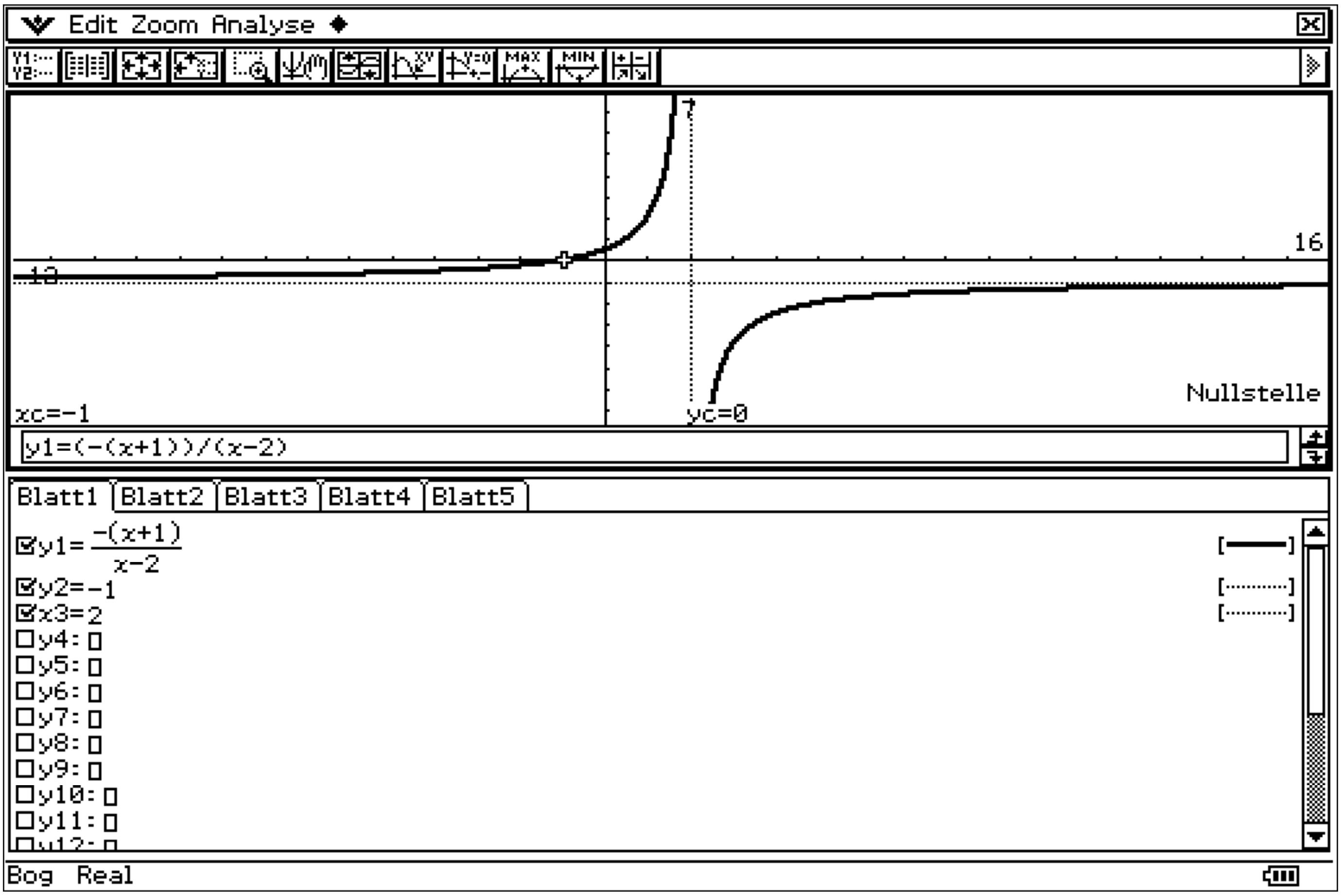
geg. Funktion f mit drei Eigenschaften:

- Polstelle ist x=2
- Nullstelle ist x=-1
- Grenzwert ist lim(f(x),x,∞)= -1

ges. Skizze zu f (eine mögliche Lösung)

Lösung:

Skizze zu f



eine analytische Lösung: f(x) = - (x+1)/(x-2)

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 2 (Analytische Geometrie):

geg. ebenes Viereck ABCD im kartesischen Koordinatensystem mit
A(4|1|2), B(2|3|2), C(2|1|4), D(4|-1|4)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Parallelogramms

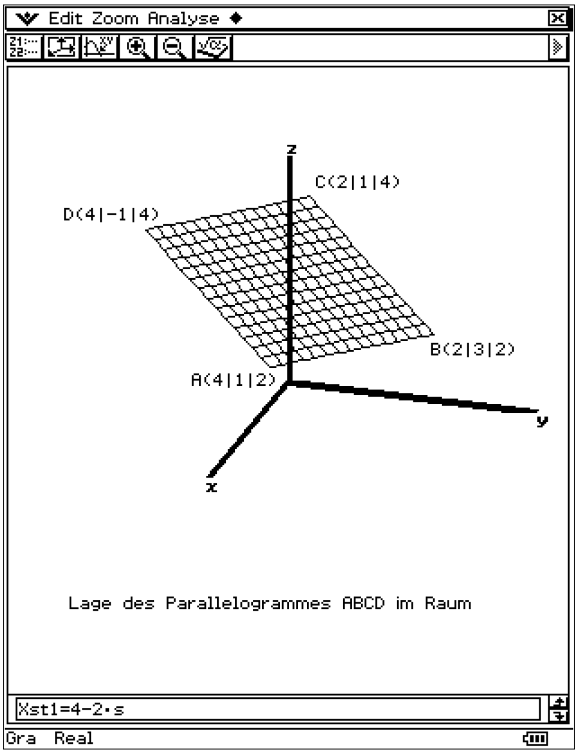
Lösung:

Seitenlängen (Normen der Vektoren zwischen zwei Punkten)
||AB|| = ||B-A|| = √((-2)^2+2^2+0^2) = √(8), AB liegt in Höhe z=2,
||BC|| = ||C-B|| = √(0^2+(-2)^2+2^2) = √(8),
||CD|| = ||D-C|| = √(2^2+(-2)^2+0^2) = √(8), CD liegt in Höhe z=4,
||DA|| = ||A-D|| = √(0^2+2^2+(-2)^2) = √(8).

AB und CD sind parallel und von gleicher Länge, damit sind es wegen der gleichen Seitenlängen auch BC und DA.

Es liegt ein Parallelogramm vor.

(Die Untersuchung zweier paralleler Seiten ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)



ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Rechteckes

Lösung:

Winkel: Skalarprodukte der normierten Vektoren betrachten

cos(∡DAB) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[0],[-2],[2]]▫[[-2],[2],[0]] = ((-4)/(8)) = ((-1)/(2)) ≠ 0

cos(∡ABC) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[2],[-2],[0]]▫[[0],[-2],[2]] = ((4)/(8)) = ((1)/(2)) ≠ 0

cos(∡BCD) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[0],[2],[-2]]▫[[2],[-2],[0]] = ((-4)/(8)) = ((-1)/(2)) ≠ 0

cos(∡CDA) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[-2],[2],[0]]▫[[0],[2],[-2]] = ((4)/(8)) = ((1)/(2)) ≠ 0

Damit liegen keine rechten Winkel vor.
(Die Untersuchung eines Winkels ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)

Kontrolle im GTR(CAS):

[[4,1,2]] ⇒ A [[2,3,2]] ⇒ B [[2,1,4]] ⇒ C [[4,-1,4]] ⇒ D

norm(B-A)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(C-B)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(D-C)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(A-D)	ergibt	2*2^(1/2)
dotP(D-A,B-A)/8	ergibt	-1/2
dotP(A-B,C-B)/8	ergibt	1/2
dotP(B-C,D-C)/8	ergibt	-1/2
dotP(C-D,A-D)/8	ergibt	1/2

ges. Koordinaten des Diagonalschnittpunktes S:

Lösung:

S = A + AC/2 = A + (C-A)/2 = [[4],[1],[2]] + (1/2) × [[-2],[0],[2]] = [[3],[1],[3]]

Kontrolle im GTR(CAS):

A+(C-A)/2 ergibt [[3,1,3]]

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Lage des Punktes E(3|2|1) zur Seite AB

Lösung:

Geradengleichung für Seite AB ist x(t) = A + t×(B-A), 0≤t>1,

Untersuchung der Gleichung E = A + t×(B-A) bzw. E - A = t×(B-A), d.h.

[[3-4],[2-1],[1-2]] = t×[[2-4],[3-1],[2-2]] und zusammengefasst [[-1],[1],[-1]] = t×[[2],[2],[0]] .

Es gibt keine Lösung für t (Die Vektoren AB und AE sind linear unabhängig.),
d.h. E liegt nicht auf AB.

Andere (anschauliche) Lösung:

Die Seite AB liegt in Höhe z=2 und Punkt E liegt tiefer: z=1. Damit kann E nicht auf AB liegen.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 3 (Stochastik):

geg. Fehlerquote in der Produktion bei gleichem Produktionsumfang an allen Wochentagen (Mo bis Fr):

M_k = {Produkt am k-ten Wochentag hergestellt} mit $P(M_k) = 1/5 = 0{,}2$ für k=1,2,3,4,5.

C = {Produkt fehlerhaft}

$P(C|M_k) = 0{,}10$ und $P(C|M_k) = 0{,}05$ für k>1.

ges. Wahrscheinlichkeiten für

$A = M_k \cap \text{nicht}C$ sowie $B = \text{nicht}C$

Lösung:

Es gilt: $P(M_k) = P(M_k \cap \text{nicht}C) + P(M_k \cap C)$, d.h.

$P(A) = P(M_k \cap \text{nicht}C) = P(M_k) - P(M_k \cap C) = P(M_k) - P(C|M_k)\times P(M_k)$, d.h.

P(A) $= 0{,}20 - 0{,}10\times 0{,}20 = 0{,}20 - 0{,}02 =$ **0,18** $= 9/50$.

Weiter:

$P(C) = \sum(P(C|M_k)\times P(M_k),k,1,5)$ (Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)
$= (1/5)\times(0{,}10 + 4\times 0{,}05) = (1/5)\times 0{,}30 = 0{,}06$.

Hieraus folgt **P(B) = P(nichtC) = 0,94** = 47/50 .

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A1 (Analysis):

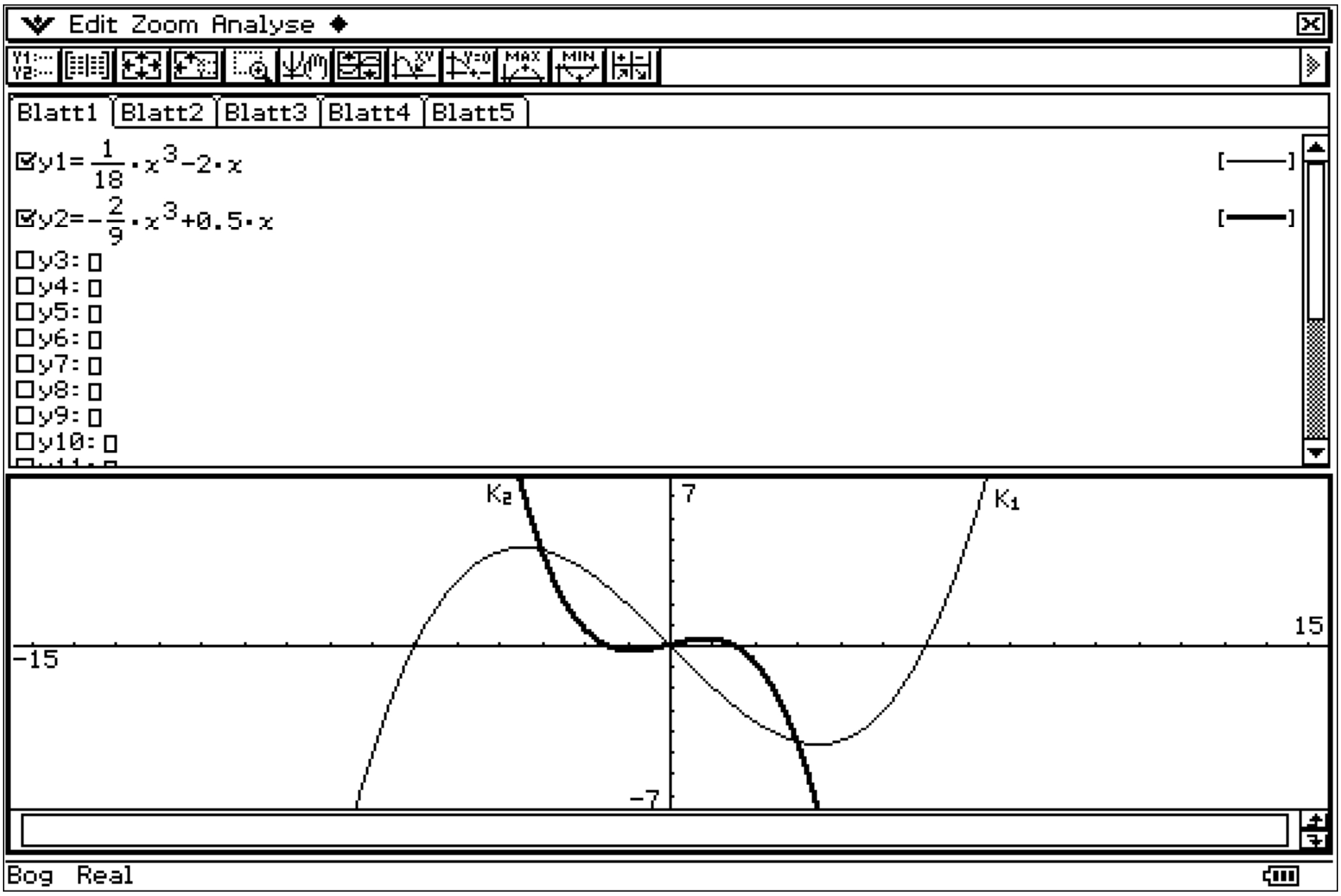
Pflichtaufgabe 1.1

geg. zwei Funktionen f_1 und f_2:

$f_1(x) = (1/18)x^3 - 2x$, $x \in R$, $f_2(x) = -(2/9)x^3 + 0,5x$, $x \in R$,

K_1 ist der Graph von f_1, K_2 ist der Graph von f_2

Schaubilder der Funktionen:



Teilaufgabe 1.1.1

ges. Symmetrieeigenschaft von K_2

Lösung:

f_2 enthält nur ungerade Potenzen und ist damit eine ungerade Funktion, d.h.

$f_2(x) = -f_2(-x)$ bzw. -(2/9)x^3 + 0,5x = -(-(2/9)(-x)^3 + 0,5(-x))

Der Graph spiegelt sich am Koordinatenursprung.

Kontrolle im GTR(CAS):

judge(-2/9*x^3+0.5*x = -(-2/9*(-x)^3 + 0.5*(-x)))

TRUE

Teilaufgabe 1.1.2

geg. Fläche zwischen K_1 und K_2 für x≥0

ges. Flächeninhalt

Lösung:

Integralansatz:

$\int((f_2(x)-f_1(x)),x,0,x_s)$, wobei $x_s>0$ die Schnittstelle der Graphen bezeichnet:

$f_2(x_s)-f_1(x_s) = 0$, d.h. $-(2/9)x_s$^3+0,5x_s - ((1/18)x_s^3-2x_s) = 0.

Hieraus: -(5/18)x_s^3 + 2,5x_s = 0 | :x_s (x_s>0)

und

-(5/18)x_s^2 + 2,5 = 0, d.h. x_s^2 = (5/2)×(18/5) = 9 und somit $x_s = 3$

Integration:

∫((-(5/18)x^3 + 2,5x),x,0,3)

= (-(5/(18×4))x^4 + (5/4)x^2))|x=3 - (- (5/(18×4))x^4 + (5/4)x^2)|x=0

= -(5/(18×4))3^4 + (5/4)3^2 = (45/4)×(-(1/2)+1) = 45/8

Der Flächeninhalt beträgt 45/8 Flächeneinheiten.

Kontrolle im GTR(CAS):

solve(-2/9*xs^3+0.5*xs-(1/18*xs^3-2*xs)=0,xs)	ergibt	{xs=-3,xs=0,xs=3}
simplify(-2/9*x^3+0.5*x-(1/18*x^3-2*x))	ergibt	(-5*(x^3-9*x))/18
∫((-5*(x^3-9*x))/18,x,0,3)	ergibt	45/8

Teilaufgabe 1.1.3

geg. Punkte Q(u | f_1(u)), R(u | f_2(u)) mit 0≤u≤3, u∈R.

ges. Abstand QR für u=1

Lösung:

$\|QR\|$ = f_2(u)-f_1(u) = ((-5/18)u^3 + 2,5u)|u=1 = -5/18 + 5/2 = 20/9

Kontrolle im GTR(CAS):

-5/18*u^3+2.5*u|u=1 ergibt 20/9

ges. Maximalabstand

Lösung:

Ansatz: f(u) = -(5/18)u^3 + 2.5u → max

f'(u) = -(5/6)u^2 + 2.5 = 0 ergibt u^2 = 3 bzw. u_m = √(3) in betrachteten Intervall.

um ist Maximumstelle, da f'(u_m)>0 für u<u_m und f'(u_m)<0 für u>u_m gilt.

(bzw. f''(u)<0 für u=u_m, d.h. f ist konkav)

Die Maximumstelle hat den Wert u_m = √(3).

Kontrolle im GTR(CAS):

fMax(-5/18*u^3+2.5*u,u,0,3) ergibt {MaxValue=5*3^(1/2)/3,u=3^(1/2)}

Pflichtaufgabe 1.2

geg. Funktionenschar f_a(x) = (1/(12a))x^3 - ax, x∈R, a∈R.

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a .

Teilaufgabe 1.2.1

ges. Nachweis, dass G_2 und $G_{-1/2}$ in O(0|0) senkrecht aufeinander stehen.

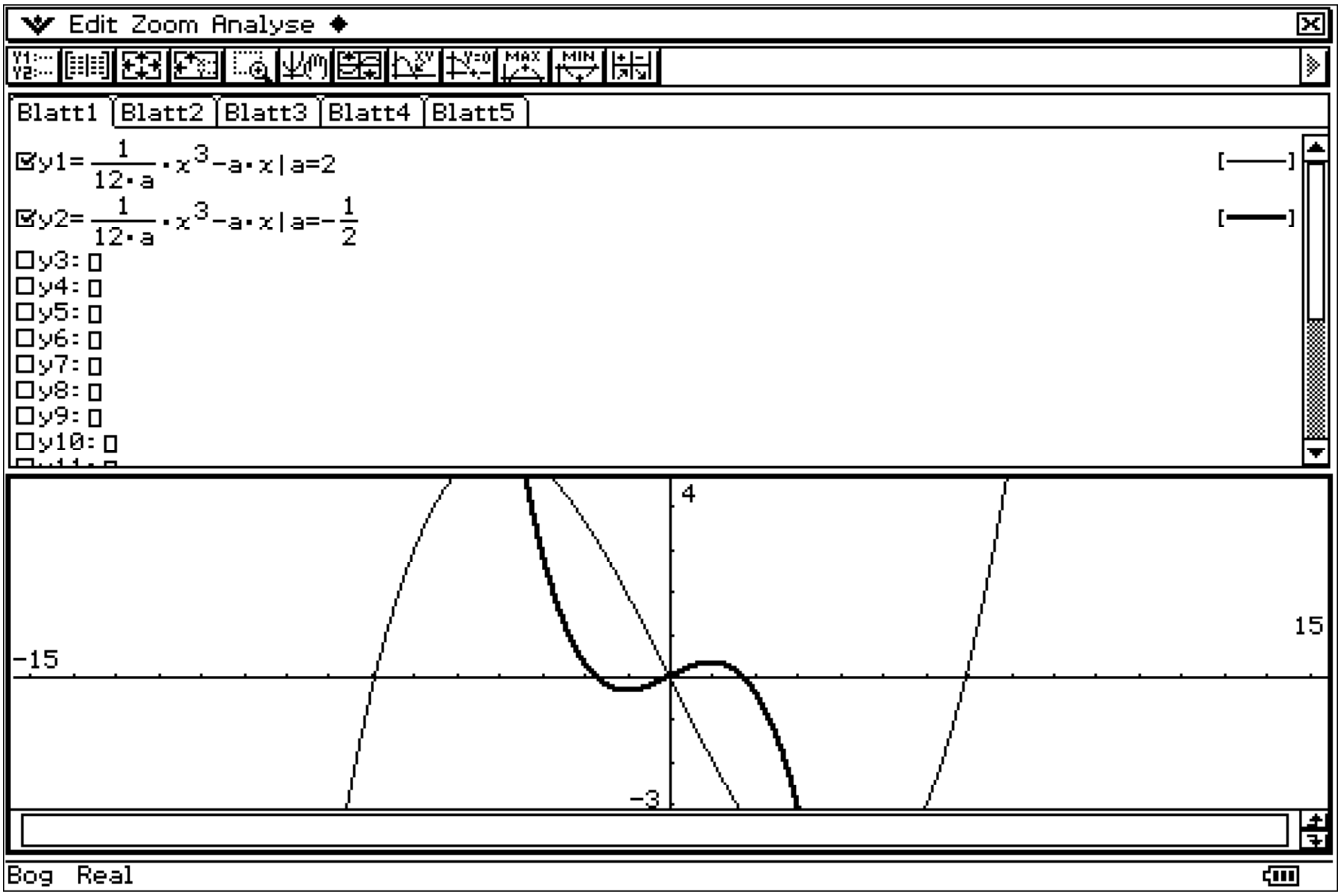
Lösung:

Wir zeigen, dass $f_a'(0)|a=2 = -1/(f_a'(0)|a=-1/2)$ gilt:

$f_a'(x) = (1/(4a))x^2-a = -2$ für a=2 und x=0
und
$f_a'(x) = (1/(4a))x^2-a = (1/2)$ für a=-1/2 und x=0

Die Ableitungen beschreiben die Anstiege -2 und 1/2 (negativer Kehrwert von 2) der Tangenten, die sich damit senkrecht schneiden.
Damit trifft dies auch für die Kurven G_2 und $G_{-1/2}$ zu.

Orthogonaler Schnitt der Kurven G_2 und $G_{-1/2}$



Teilaufgabe 1.2.2

geg. a>0

ges. lokale Extrempunkte von G_a und Art der Extrema

Lösung:

$f_a'(x) = (1/(4a))x^2-a = 0$ ergibt $(1/4)x^2 = a^2$, d.h. $x_m = \pm 2a$

Wegen $f_a'(x)>0$ für $x>2a$ und $f_a'(x)<0$ für $x<2a$
handelt es sich im Fall $x_m = +2a$ um eine Minimumstelle:

P_{min}(2a | f_a(2a)) mit f_a(2a) = (1/(12a)x^3-ax)|x=2a = (2/3)a^2-2a^2 = **(-4/3)a^2**

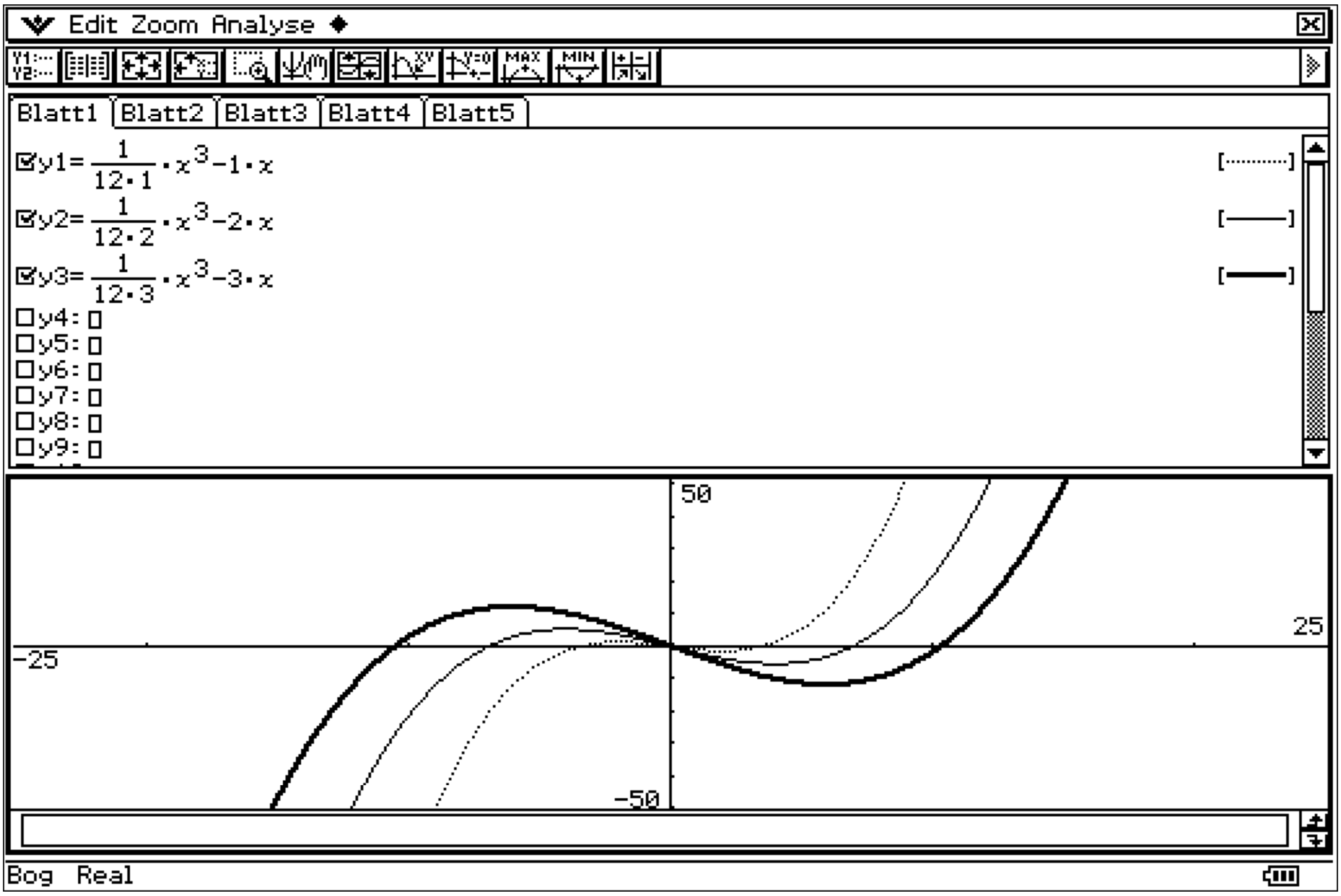
Wegen $f_a'(x)>0$ für $x<-2a$ und $f_a'(x)<0$ für $x>-2a$
handelt es sich im Fall $x_m = -2a$ um eine Maximumstelle:

P_{max}(-2a | f_a(-2a)) mit f_a (-2a) = ((1/(12a)x^3-ax)|x=-2a = -(2/3)a^2+2a^2 = **(4/3)a^2**

Kontrolle im GTR(CAS):

diff(1/(12*a)*x^3-a*x,x,1)=0	ergibt	(x^2-4*a^2)/(4*a)=0
solve(ans,x)	ergibt	{x=-2*a,x=2*a}
1/(12*a)*x^3-ax|x=2*a	ergibt	2*a^2/3-ax

Kurvenschar für a=1,2,3



Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A2 (Analytische Geometrie):

geg. Punkte im kartesischen Koordinatensystem:
A(4|1,5|-3,5), B(-1|1,5|-3,5), C(-1|-1,5|0,5), D(4|-1,5|0,5)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Nachweis der Lage aller Punkte in einer Ebene

Lösung:

Eine Ebenengleichung mit A,B,C lautet:

x(s,t) = A +s*AB + t*AC, s,t∈R, wobei AB und AC die Richtungsvektoren bezeichnen.

Gilt nun D = A +s*AB + t*AC mit passenden s,t, dann liegen alle Punkte in einer Ebene,

d.h., das Gleichungssystem s*AB + t*AC = D-A ist lösbar.

Andere Interpretation:
Die Vektoren AB, AC und AD spannen ein Spatvolumen auf mit dem Volumen 0

Rechnung im GTR(CAS):

[[4,1.5,-3.5]]⇒A [[-1,1.5,-3.5]]⇒B [[-1,-1.5,0.5]]⇒C [[4,-1.5,0.5]]⇒D

trn(B-A)	ergibt	[[-5],[0],[0]]
trn(C-A)	ergibt	[[-5],[-3],[4]]
trn(D-A)	ergibt	[[0],[-3],[4]]
rref([[-5,-5,0],[0,-3,-3],[0,4,4]])	ergibt	[[1,0,-1],[0,1,1],[0,0,0]]

Lösung:
s = -1 und t = 1, d.h. das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar
und D liegt damit in der durch A, B, C aufgespannten Ebene.

Probe:

-[[-5],[0],[0]]+[[-5],[-3],[4]]   ergibt   [[0],[-3],[4]]

Anderer Weg: Spatvolumen:

dotP(crossP([[-5],[0],[0]],[[-5],[-3],[4]]),[[0],[-3],[4]])   ergibt 0

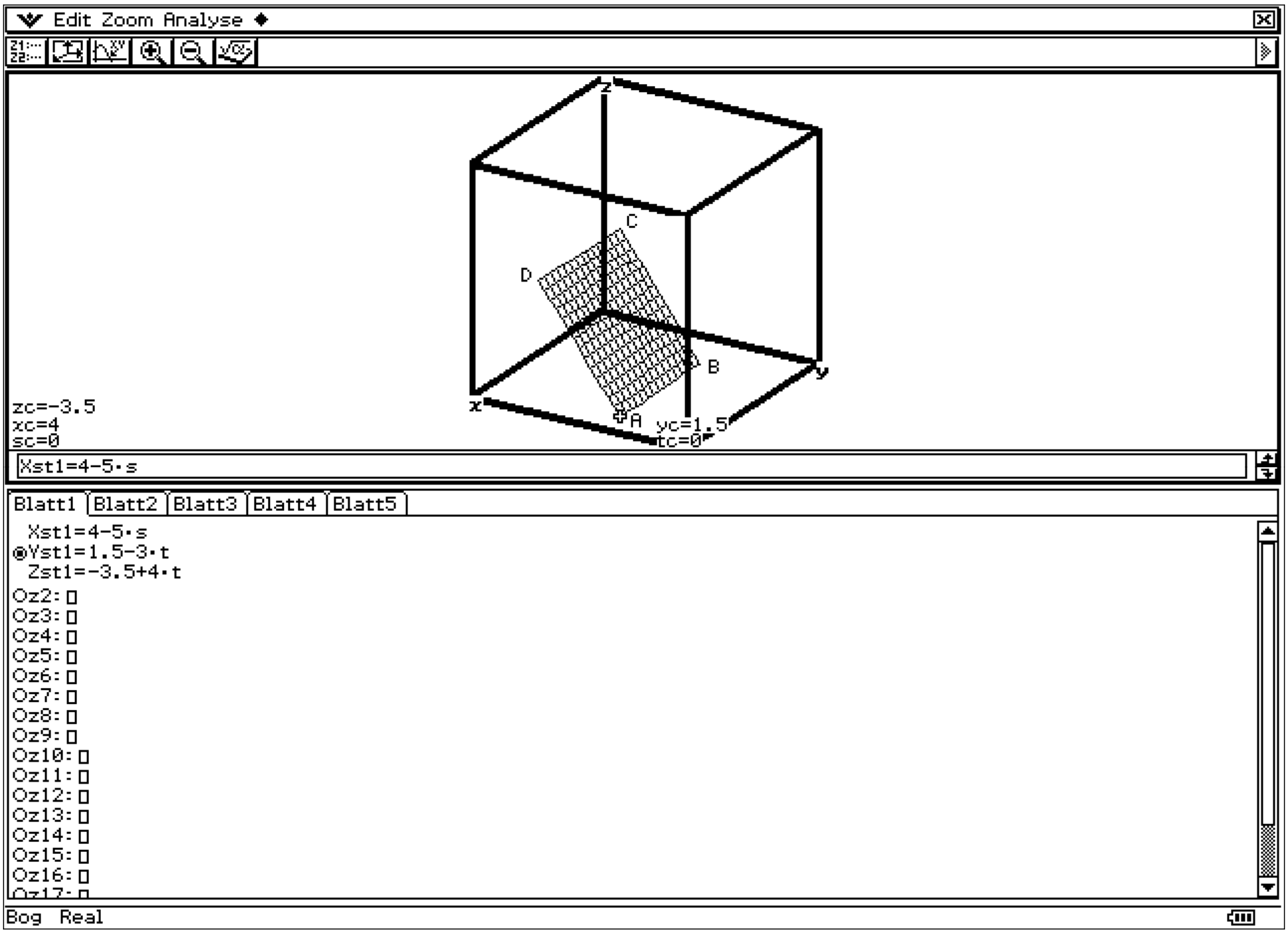
Da kein von Null verschiedenes Spatvolumen entsteht, liegen A, B, C, D in einer Ebene.

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Darstellung des Vierecks in einem kartesischen Koordinatensystem,
Nachweis, dass es ein Quadrat ist.

Lösung:

3D-Darstellung des Vierecks in einem Betrachtungsquader:



Ansatz für die Graphik:
x(s,t) = A+s×(B-A)+t×(D-A), 0≤s≤1, 0≤t≤1.

Rechnung im GTR(CAS):

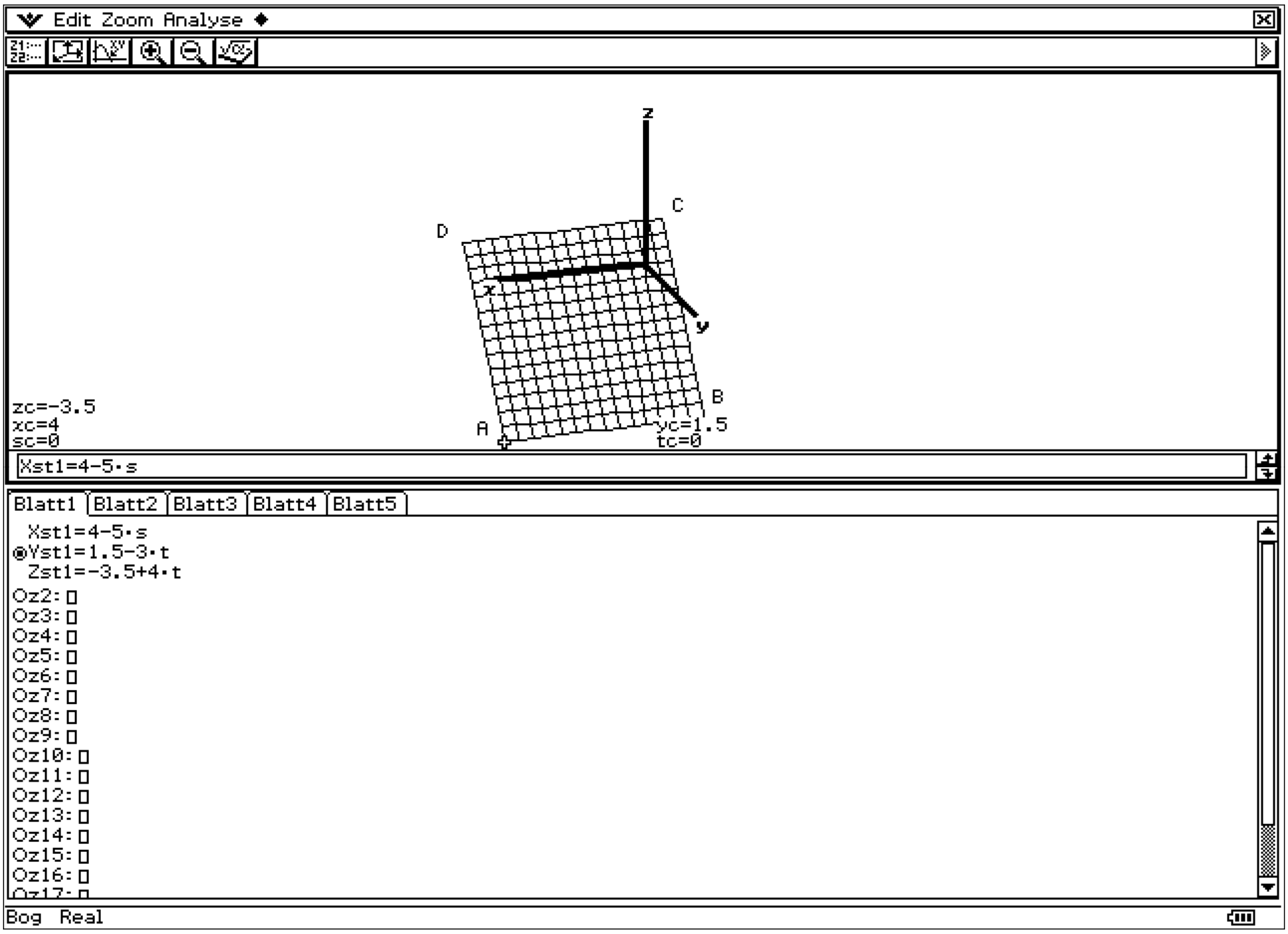
trn(A+s*(B-A)+t*(D-A))   ergibt   [[-5*s+4],[-3*t+1.5],[4*t-3.5]]

Die Parameterdarstellung des Vierecks für die 3D-Grafik erfolgte im Betrachtungsquader $-4 \leq x, y, z \leq 4$.

Berechnung der konstanten Seitenlängen und der rechten Winkel (Skalarprodukt gleich 0)**:**

norm(B-A)	ergibt	5
norm(C-B)	ergibt	5
norm(D-C)	ergibt	5
norm(A-D)	ergibt	5
dotP(B-A,D-A)	ergibt	0
dotP(C-B,A-B)	ergibt	0
dotP(D-C,B-C)	ergibt	0
dotP(A-D,C-D)	ergibt	0

Zum Nachweis des Quadrates ist es ausreichend, die Parallelität von AB (z-Höhe -3,5) und CD (z-Höhe 0,5) und deren Seitenlängen 5 (Differenz der x-Koordinaten) zu erkennen, sowie einen Winkel, z.B. $\measuredangle$DAB =90°, über das Skalarprodukt 0 nachzuweisen.



Pflichtaufgabe 2.3

geg. ABCD als Grundfläche zweier quadratischer Pyramiden mit den Spitzen S_1 und S_2 (Höhe jeweils 5 LE)

Teilaufgabe 2.3.1

ges. Koordinaten von S_1 und S_2

Lösung:

Mittelpunkt M von ABCD finden: M = A + AC/2 = A + (C-A)/2 = (A+C)/2

hieraus erhält man: **M(1,5|0|-1,5)**

In M mit Normalenvektor der Ebene (mit ABCD) eine Gerde bilden und S_1 und S_2 darstellen:

Ein Normalenvektor ist AB×AC = crossP(B-A,C-A) = [[0],[20],[15]]

Rechnung im GTR(CAS):

crossP(B-A,C-A) ⇒ N	ergibt	[[0,20,15]]
(A+C)/2 ⇒ M	ergibt	[[1.5,0,-1.5]]
M + 5*N/norm(N) ⇒ S1	ergibt	[[1.5,4,1.5]]
M - 5*N/norm(N) ⇒ S2	ergibt	[[1.5,-4,-4.5]]

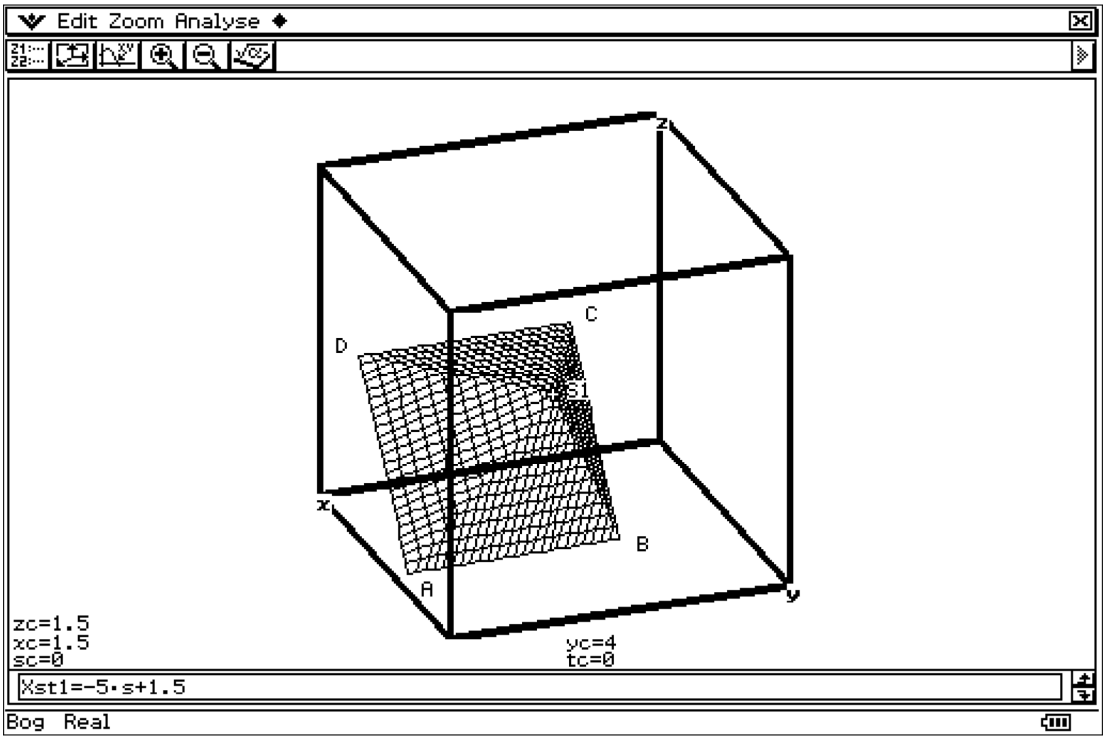
Damit liegen die Spitzen in S_1(1,5|4|1,5) und S_2(1,5|-4|-4,5).

Teilaufgabe 2.3.2

ges. Darstellung der Pyramide ABCDS, wobei S die Spitze mit nur positiven Koordinaten ist

Lösung:

3D-Darstellung der Pyramide ABCDS$_1$ in einem Betrachtungsquader:



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

Zusatzüberlegung zur Pyramidenformel in der 3D-Grafik:

x(s,t) = M + s*(B-A) + t*(D-A) + (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S1-M), $-1/2 \le s,t \le 1/2$,

ist eine Parameterdarstellung der Pyramidenoberfläche.

Der Anteil M+s*(B-A)+t*(D-A) beschreibt zunächst die Grundfläche, das Quadrat ABCD.
Der Anteil (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S1-M) addiert zur Grundfläche einen Vektor in Richtung MS_1. Die Beträge garantieren die gewünschte Symmetrie der regelmäßigen Pyramide.

Rechnung im GTR(CAS):

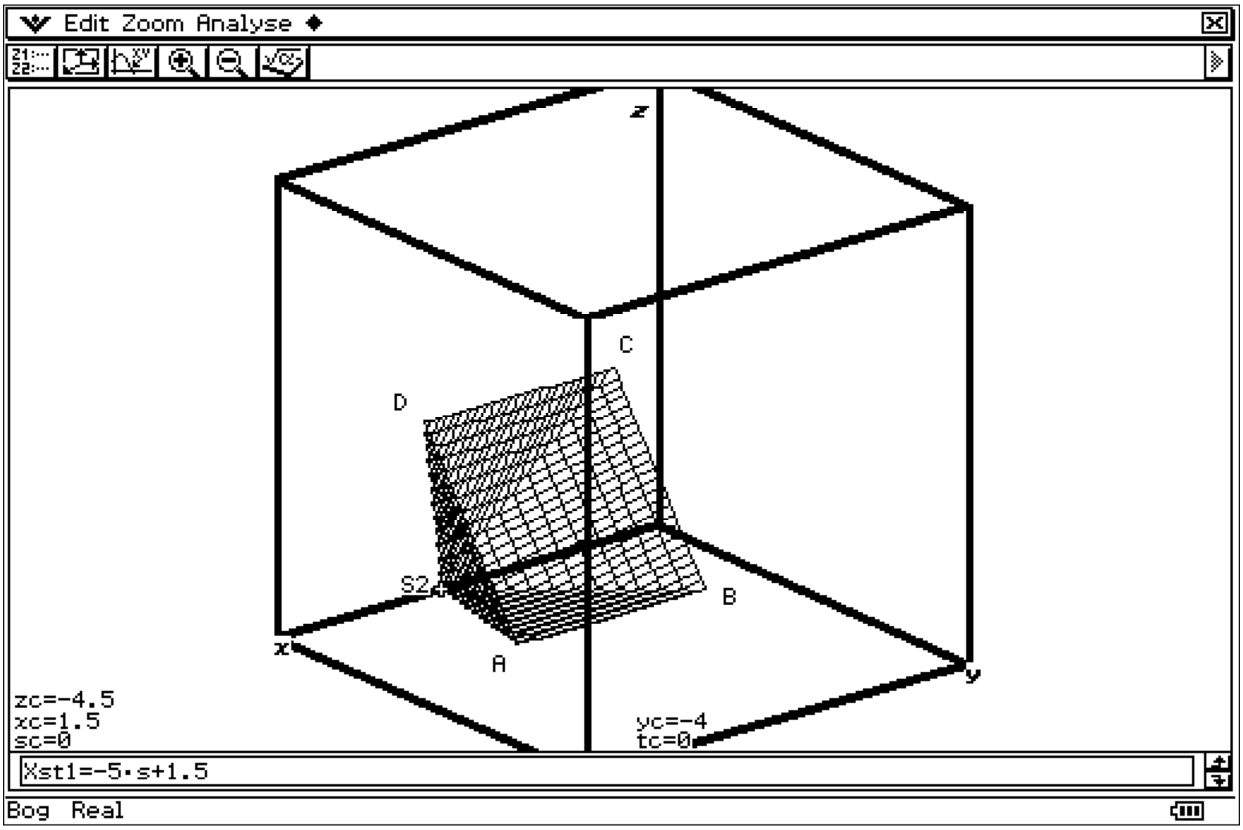
M + s*(B-A) + t*(D-A) + (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S1-M) ergibt
[[-5*s+1.5, -4*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)-3*t, -3*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)+4*t-1.5]]

Der zuletzt bereitgestellte Term dient der 3D-Grafik.

Kontrolle der Pyramide $ABCDS_2$:

M + s*(B-A) + t*(D-A) + (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S2-M) ergibt
[[-5*s+1.5, 4*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)-3*t, 3*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)+4*t-1.5]]

3D-Grafik der Pyramide $ABCDS_2$



Pflichtaufgabe 2.4

geg. Pyramide P mit Grundfläche ABCD und Spitze S(1,5|4|1,5)
ges. Volumen der Pyramide P

Lösung:
Das Pyramidenvolumen beträgt 1/3 des Spatvolumens.

Rechnung im GTR(CAS):
V = dotP(crossP(B-A,D-A),S1-A)/3   ergibt   V=125/3

Elementare Rechnung: V = (1/3) * "Grundfläche" * "Höhe" = (1/3) * 5^2 * 5 = 125/3

Pflichtaufgabe 2.5

geg. Punkte P_t(4-5t|1,5|-3,5) auf der Geraden durch A und B

Teilaufgabe 2.5.1
ges. Größe des Winkels ∠ DP C

Lösung:
[[4-5*t,1.5,-3.5]]|t=2 ⇒ P2   ergibt   [[-6,3/2,-7/2]]

Es gilt:
cos(∠ DP_2C) = dotP(D-P2,C-P2) / (norm(D-P2)×norm(C-P2)), d.h.

dotP(D-P2,C-P2) / (norm(D-P2)*norm(C-P2))   ergibt   3*10^(1/2)/10
$\cos^{-1}$(ans)   ergibt   18.43494882

Für den gesuchten Winkel gilt: ∠ **DP C ≈ 18,4°.**

Teilaufgabe 2.5.2

ges. Nachweis   ∠ $DP_tC \neq 90°$ für alle t∈R

Lösung:

[[4-5*t,1.5,-3.5]]®Pt	ergibt	[[-5*t+4,3/2,-7/2]]
dotP(D-Pt,C-Pt)	ergibt	5*t*(5*t-5)+25
rFactor(ans)	ergibt	25 * (t-1/2+3^(1/2)***i**/2) * (t-1/2-3^(1/2)***i**/2)

Das Skalarprodukt ist für alle t verschieden von 0 (nur komplexe Nullstellen),
d.h. der Winkel ∠ DP_tC kann nicht 90° sein.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A3 (Analytische Geometrie, Stochastik):

Pflichtaufgabe 3.1 (Analytische Geometrie)

geg. Geraden k_1 und k_2 im kartesischen Koordinatensystem (Kurse zweier Flugzeuge)

Angaben zu k_1: Punkt P(-290|320|140), Richtungsvektor a =[[100],[-100],[-50]]

Angaben zu k_2: Punkte Q_1(-800|500|-70) und Q_2(200|0|-70)

(1LE = 1km)

Teilaufgabe 3.1.1

ges. Zeichnen der Geraden k_1 und k_2 in ein geeignetes Koordinatensystem.
Berechnung der Entfernung von P nach Q_1: $\|Q_1\text{-}P\|$

Lösung:

Entfernung von P nach Q_1 (Norm des Vektors PQ_1):

Rechnung im GTR(CAS):

[[-290,320,140]] ⇒ P   [[-800,500,-70]] ⇒ Q1

norm(Q1-P) ergibt 580.1723882

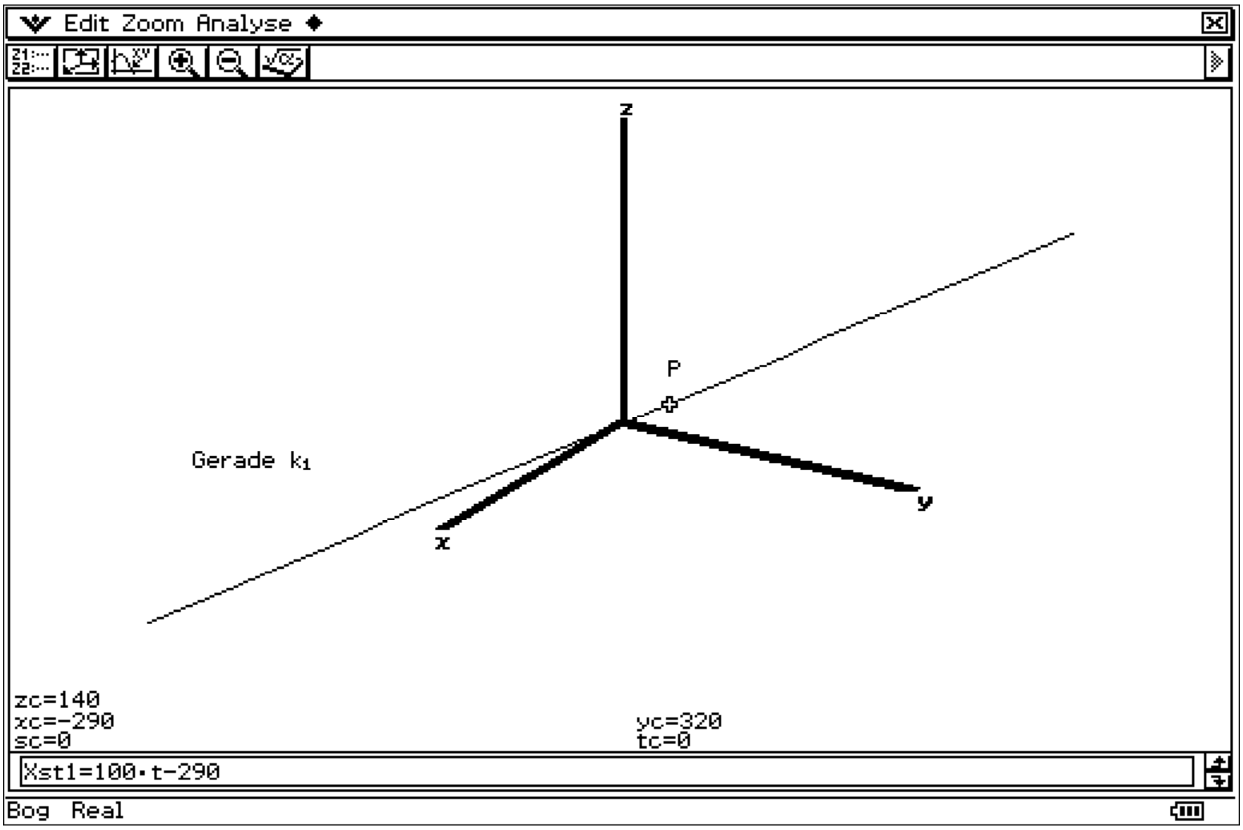
Die Entfernung beträgt 580km.

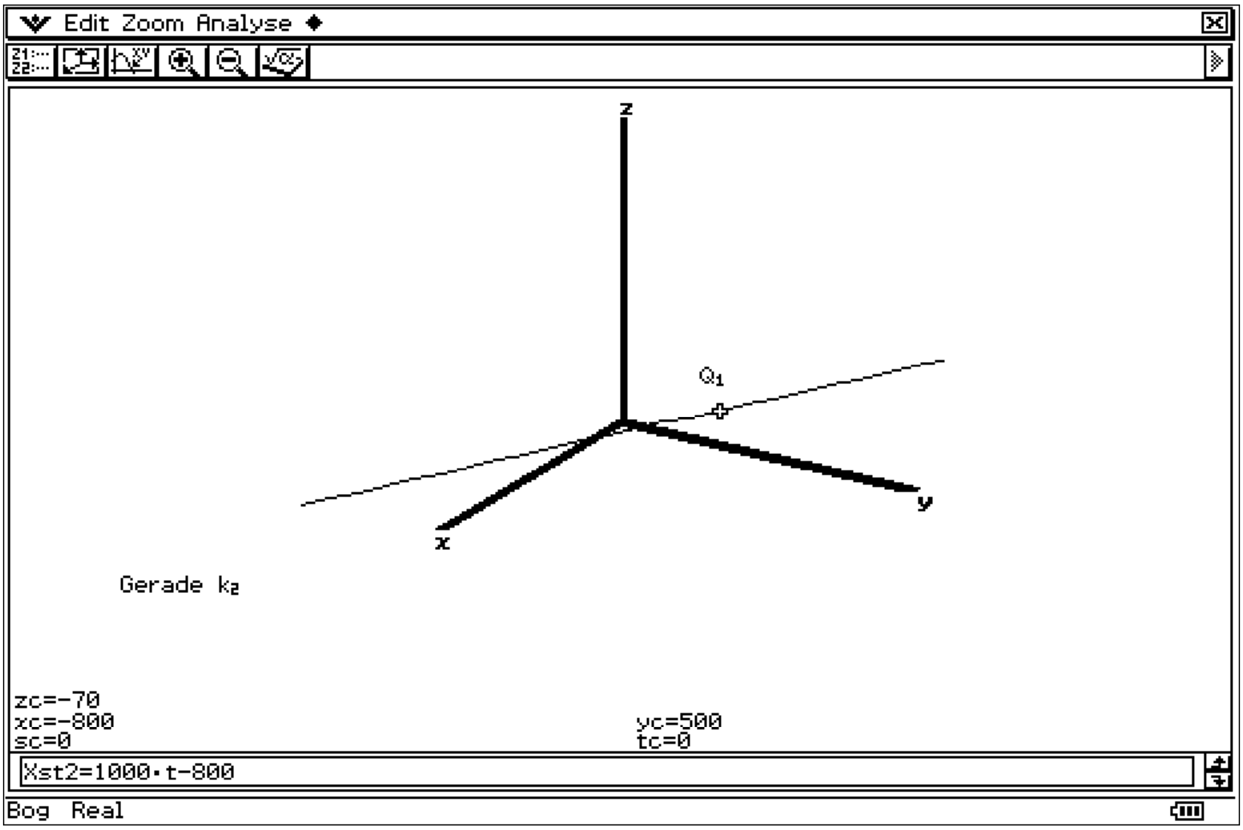
Betrachtung der Geradengleichungen:

für k_1: **x**(t) = P + t*a = [[-290],[320],[140]] + t*[[100],[-100],[-50]], t∈R,

für k_2: **x**(t) = Q_1 + t*(Q_2-Q_1) = [[-800],[500],[-70]] + t*[[1000],[-500],[0]], t∈R,

Einzeldarstellungen als 3D-Grafik





Die Gerade k_2 verläuft parallel zur x-y-Ebene in der Höhe $z = -70$.

Vereinfachungen der Vektorterme für die Geraden:

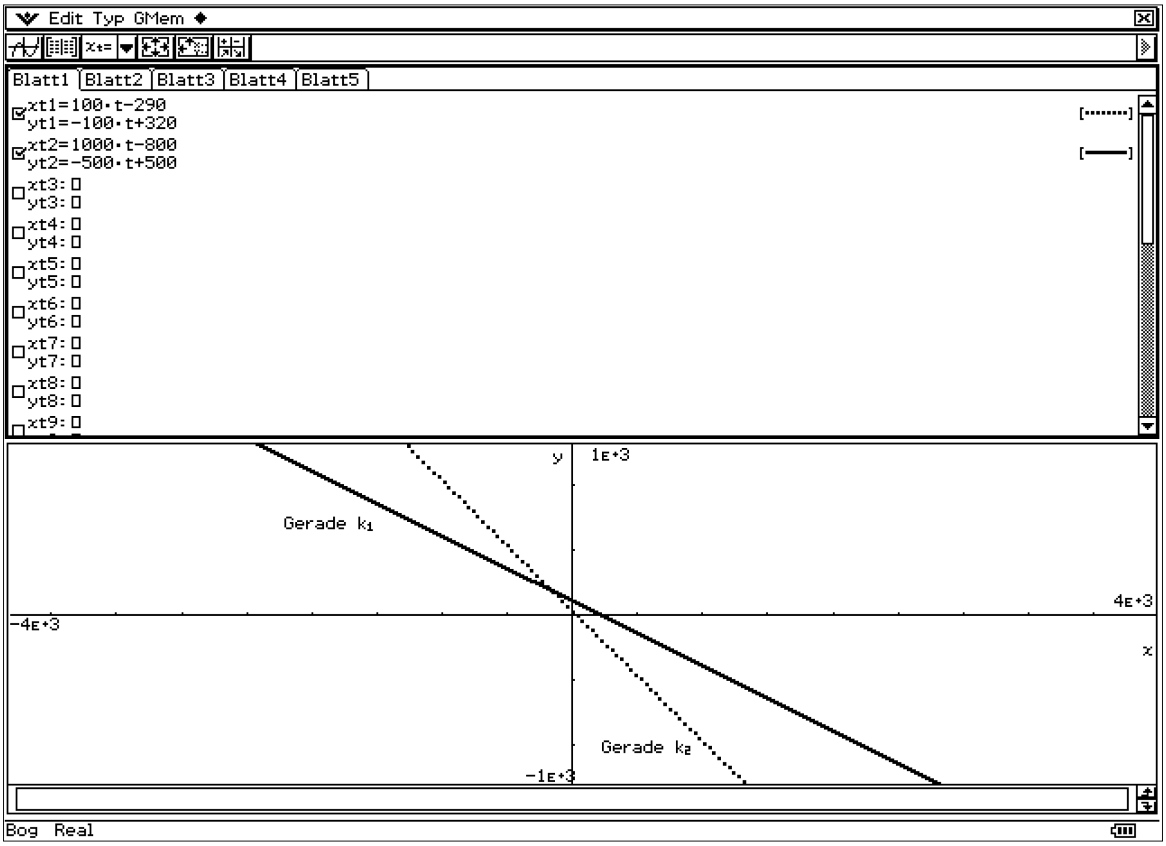
[[-290],[320],[140]]+t*[[100],[-100],[-50]] ergibt [[100*t-290],[-100*t+320],[-50*t+140]]

[[-800],[500],[-70]]+t*[[1000],[-500],[0]] ergibt [[1000*t-800],[-500*t+500],[-70]]

Betrachtungsquadereinstellungen: $-3000 \leq x,y,z \leq 3000$
Parameterbereich: $-100 \leq t \leq 100$ für k_1 bzw. $-10 \leq t \leq 10$ für k_2 $(-1 \leq s \leq 1)$
Betrachtungswinkel: $\theta = 32°$, $\varphi = 68°$

Die gleichzeitige Darstellung mehrerer Objekte im 3D-Menü ist nicht möglich.

Darstellung beider Geraden als Projektion in die x-y-Ebene (z=-70), 2D-Grafik:



Teilaufgabe 3.1.2

ges. Geradengleichungen und Lagebeziehungen

Lösung:

Betrachtung der Geradengleichungen:

für k_1: $\mathbf{x}(t) = P + t*a$ = [[-290],[320],[140]] + t*[[100],[-100],[-50]], $t \in R$,

für k_2: $\mathbf{x}(t) = Q_1 + t*(Q_2-Q_1)$ = [[-800],[500],[-70]] + t*[[1000],[-500],[0]], $t \in R$,

Vereinfachungen der Vektorterme für die Geraden (für die 3D-Graphik):

[[-290],[320],[140]]+t*[[100],[-100],[-50]] ist [[100*t-290],[-100*t+320],[-50*t+140]]

[[-800],[500],[-70]]+t*[[1000],[-500],[0]] ist [[1000*t-800],[-500*t+500],[-70]]

Betrachtungsquadereinstellungen: $-3000 \le x,y,z \le 3000$
Parameterbereich: $-100 \le t \le 100$ für k_1 bzw. $-10 \le t \le 10$ für k_2 $(-1 \le s \le 1)$
Betrachtungswinkel: $\theta = 32°$, $\varphi = 68°$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, d.h. die Geraden sind nicht parallel.

[[100],[-100],[-50]] ≠ t*[[1000],[-500],[0]] für alle t∈R (Richtungsvektoren)

Schnittpunkt existiert, sofern die Gleichung erfüllbar ist:

[[-290],[320],[140]] + t_1*[[100],[-100],[-50]] = [[-800],[500],[-70]] + t_2*[[1000],[-500],[0]]

Umformung im GTR(CAS):

t_1*[[100],[-100],[-50]] - t_2*[[1000],[-500],[0]] + [[-290],[320],[140]] - [[-800],[500],[-70]]
ergibt [[100*t_1-1000*t_2+510],[-100*t_1+500*t_2-180],[-50*t_1+210]]

solve({100*t_1-1000*t_2+510=0, -100*t_1+500*t_2-180=0, -50*t_1+210=0},{t_2,t_1,s})
No Solution

Damit sind die Geraden windschief.

Teilaufgabe 3.1.3

ges. Abstand der Geraden k_1 und k_2

Lösung:

Der Abstand beträgt:
dotP(crossP([[100],[-100],[-50]], [[1000],[-500],[0]]),
[[-290],[320],[140]]-[[-800],[500],[-70]]) / (norm([[100],[-100],[-50]]) × norm([[1000],[-500],[0]]))
= 40km.

Rechnung im GTR(CAS):

dotP(crossP([[100],[-100],[-50]], [[1000],[-500],[0]]),[[-290],[320],
[140]]-[[-800],[500],[-70]])/(norm([[100],[-100],[-50]])*norm([[1000],[-500],[0]])) ergibt
40.2492236

ges. Nachweis, dass sich die Gerade
x(t) = [[310],[620],[-610]] + t*[[15],[30],[-30]], t∈R, mit k_1 und k_2 senkrecht schneidet.

Lösung:

zwei Teilaufgaben: Nachweis der Schnittpunkte und Nachweis der Orthogonalität

Orthogonalität der Richtungsvektoren:

dotP([[100],[-100],[-50]],[[15],[30],[-30]]) ergibt 0
dotP([[1000],[-500],[0]],[[15],[30],[-30]]) ergibt 0

Schnittpunkte:

Berechnung des Abstandes der Geraden zu k_1:

dotP(crossP([[100],[-100],[-50]],[[15],[30],[-30]]),
[[310],[620],[-610]]-[[-290],[320],[140]])/(norm([[100],[-100],[-50]])*norm([[15],[30],[-30]]))
ergibt 0

Berechnung des Abstandes der Geraden zu k_2:

dotP(crossP([[1000],[-500],[0]],[[15],[30],[-30]]),
[[310],[620],[-610]]-[[-800],[500],[-70]])/(norm([[1000],[-500],[0]])*norm([[15],[30],[-30]]))
ergibt 0

Die Gerade hat von beiden Geraden k_1 und k_2 den Abstand 0, d.h. es sind Schnittpunkte vorhanden.

Pflichtaufgabe 3.2 (Stochastik)

geg. Flugzeug mit 50 Plätzen, Flüge zunächst ausgebucht, jedoch im Durchschnitt 10% beim Abflug nicht belegt.
Zufallsgröße X bezeichnet die nicht belegten Plätze beim Abflug,
X ist binomialverteilt (näherungsweise)

Teilaufgabe 3.2.1

ges. Wahrscheinlichkeiten für
A := {genau 5 Plätze nicht belegt} = {genau 5 von 50 (10%) Plätzen nicht belegt}, d.h. $P(X=5)$
B := {höchstens 2 Plätze nicht belegt}, d.h. $P(X\le 2)$

Lösung:

Binomialverteilung für X mit $p = 0{,}1$ und $n = 50$, d.h. $n\times p = 5$

$P(X=5)$ = binomialPDf(5,n,p) ≈ 0.185
$P(X\le 2)$ = binomialCDf(2,n,p) ≈ 0.112

Rechnung im GTR(CAS):

50⇒n 0.1⇒p

binomialPDf(5,n,p) ergibt 0.1849246009
binomialCDf(2,n,p) ergibt 0.1117287563

Teilaufgabe 3.2.2

geg. 4% mehr Plätze werden zum Verkauf angeboten, d.h. 52 Plätze (Risiko der Überbuchung)

Kosten:
120€ für 1 Ticket (Einnahme der Fluggesellschaft),

Stornierung 60€ (Ausgabe der Fluggesellschaft, 60€ Rückerstattung),
Abweisung wegen Überbuchung 500€ (Ausgabe der Fluggesellschaft)

ges. Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Fluggäste zum Abflug erscheinen
(Abweisung wegen Überbuchung)

Lösung:

Zufallsgröße X bezeichnet wieder die nicht belegten Plätze beim Abflug,
X ist binomialverteilt (näherungsweise) mit $p = 0{,}10$ und $n = 52 = 1{,}04 \times 50$

$P(X \leq 1) = \text{binomialCDf}(1,n,p) \approx 0.028$

Rechnung im GTR(CAS):

52⇒n 0.1⇒p

binomialCDf(1,n,p) ergibt 0.02829422589

ges. Einnahmen für Fluggesellschaft, wenn 51 Fluggäste zum Abflug erscheinen

Lösung:

Wenn alle Plätze ausgebucht sind, dann gibt es 52 verkaufte Tickets, eine Stornierung und eine Überbuchung:

$52 \times 120 - 1 \times 60 - 1 \times 500 = 5680$€

Rechnung im GTR(CAS):

52*120 - 1*60 - 1*500 ergibt 5680

Die Gesellschaft hat für den genannten Flug eine Einnahme in Höhe von **5680€**.