Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2008

Mathematik

Aufgaben

Name, Vorname: ....

Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1-3 des Arbeitsblattes)

Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk und Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

1	**Analysis**
1.1	Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+5$ mit $x\in\mathbb{R}$. Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.
1.2	Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung $h(x)=\frac{x^2-49}{x-7}$ mit $x\in D_h$. Geben Sie die Nullstelle von h an.
1.3	Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = (x-2)(x+2)$ mit $x\in\mathbb{R}$. - Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' von f. - Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1.4 In den Abbildungen sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, der zugehörigen Ableitungsfunktion f′ und einer weiteren Funktion g dargestellt.

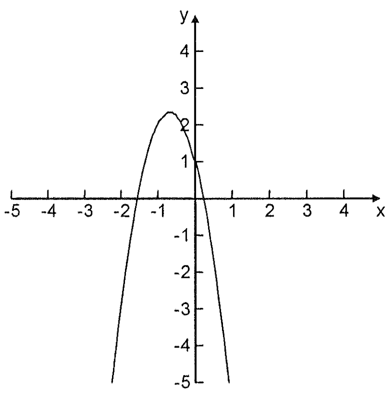


Abbildung 1

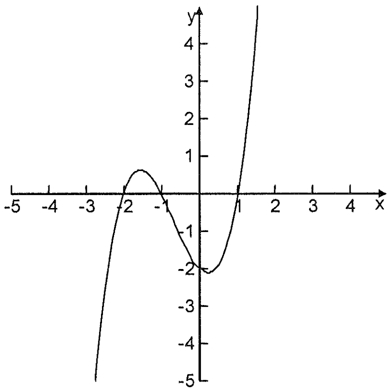


Abbildung 2

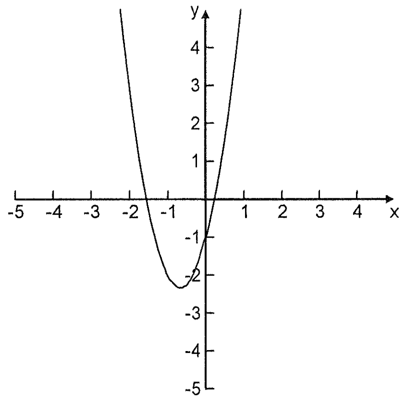


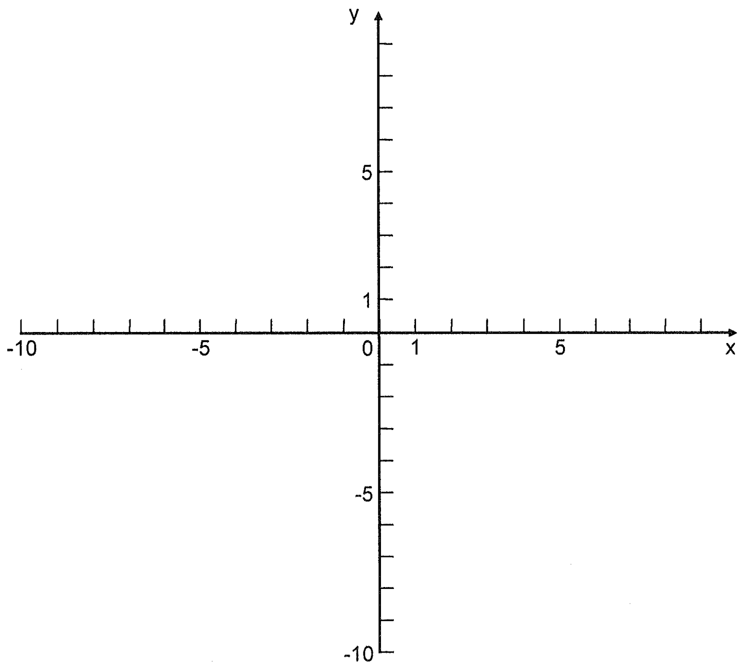
Abbildung 3

Ordnen Sie den Abbildungen die Funktionen f und f' zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.5 Gegeben ist eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- Eine Polstelle von f ist 2.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
- Eine Nullstelle von f ist -1.

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit diesen Eigenschaften.



2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD gegeben:
$A(4 \mid 1 \mid 2)$, $B(2 \mid 3 \mid 2)$, $C(2 \mid 1 \mid 4)$, $D(4 \mid -1 \mid 4)$.

2.1
- Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm handelt.
- Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist.
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes.

2.2 Gegeben ist ein weiterer Punkt $E(3 \mid 2 \mid 1)$.
Untersuchen Sie, ob E auf der Viereckseite $\overline{AB}$ liegt.

3 Stochastik

Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her.
Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft sind.
An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5 %.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde am Montag produziert.
B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl: Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.
Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten.
Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen.

Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B. Von den Aufgaben B1, B2 und B3 ist **eine** auszuwählen.

Bearbeitungszeit: Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Grundkursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 255 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Hilfsmittel: Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner und das an der Schule zugelassene CAS,
- Zeichengeräte
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Hinweis: Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.
Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges: Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.

Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form werden entsprechend der geltenden Prüfungsbestimmungen gewertet.

A1 Analysis

1.1 Geben Sie die maximale Anzahl der Extremstellen an, die eine ganzrationale Funktion 3. Grades haben kann.
Begründen Sie ihre Entscheidung.

1.2 Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph ist G.

1.2.1 Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion an.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch G und die x-Achse vollständig begrenzt wird.

Eine weitere Fläche befindet sich vollständig im ersten Quadranten.
Sie wird durch G, die Koordinatenachsen und eine senkrechte Gerade $x = k$ begrenzt.
Ihr Flächeninhalt beträgt 30 FE.
Berechnen Sie k.

1.2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente und die Gleichung der Normalen, die durch den Wendepunkt verläuft.

1.2.3 Ein Dreieck OAB entsteht durch den Koordinatenursprung O, den Schnittpunkt A des Graphen mit dem positiven Teil der x-Achse und den Punkt B.
Der Punkt B liegt im ersten Quadranten auf G.
Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

1.3 Gegeben ist eine Funktionenschar g_a durch die Gleichung

$$g_a(x) = \frac{a}{30}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \ \text{ mit } \ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten der Graphen dieser Schar.

A2 Analytische Geometrie

Zur Herstellung von Modeschmuck werden pyramidenförmige Körper benötigt. Eine solche Pyramide ABCDS besitzt die Grundfläche ABCD mit den Eckpunkten $A(4 \mid -3 \mid 2)$, $B(7 \mid 1 \mid 0)$, $C(4 \mid 3 \mid -1)$, $D(1 \mid 1 \mid 0)$ und die Spitze $S(4 \mid 4 \mid 11)$. Die Koordinatenangaben beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem.

2.1 Zeichnen Sie den Körper ABCDS.
Bestätigen Sie die Tatsache, dass die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD die Form eines Drachenvierecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABS.
Weisen Sie nach, dass der Punkt $L(4 \mid -1 \mid 1)$ der Höhenfußpunkt der Pyramide ABCDS ist.
Berechnen Sie das Volumen des Schmuckstücks, wenn 1 LE $\hat{=}$ 1 mm gilt.

2.3 Ein ebener Schnitt durch die Punkte B, D und $R(1{,}5 \mid 0{,}75 \mid 3{,}25)$ schneidet die Kante $\overline{AS}$ in einem Punkt P und zerlegt das Schmuckstück in zwei Teilkörper.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.
Untersuchen Sie, welche besondere Form das Dreieck BDP aufweist.

2.4 Es gibt Ebenen, die den Körper ABCDS in zwei volumengleiche Teile zerlegen.
Beschreiben Sie die Lage einer solchen Ebene und begründen Sie Ihre Entscheidung.

A3 Stochastik und Analysis

3.1 Zur Herstellung von Taschenlampen werden unter anderem je acht Leuchtdioden (LED) und eine Batterie pro Lampe gebraucht. Erfahrungsgemäß sind von den zu verwendenden LED 1 % defekt. Von den Batterien funktionieren etwa 2 % nicht. Andere Fehler treten beim Bau der Lampen nicht auf.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig der laufenden Produktion entnommene Taschenlampe fehlerfrei ist.

3.2 Ein Großmarkt bekommt eine Sendung von 1000 Taschenlampen, von denen man weiß, dass etwa 7 % davon nicht fehlerfrei sind.

3.2.1 Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Lampen in der gesamten Lieferung.

3.2.2 Der Lieferung werden 10 Lampen zufällig entnommen.
Berechnen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.
A: Genau eine geprüfte Lampe ist fehlerhaft.
B: Höchstens zwei geprüfte Lampen sind fehlerhaft.
C: Von den geprüften Lampen sind mehr als zwei aber nicht mehr als 6 fehlerhaft.

3.2.3 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der fehlerhaften Lampen unter den 10 geprüften an.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Interpretieren Sie diese.

3.3 Der Großmarkt kann die Lampen auch von anderen Herstellern beziehen. Dabei kann der Anteil p der fehlerhaften Lampen an einer Lieferung je nach Hersteller verschieden sein.

3.3.1 Berechnen Sie für $p_1 = 0{,}2$ und für $p_2 = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 10 getesteten Lampen höchstens zwei fehlerhafte befinden.

3.3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion, die den Zusammenhang beschreibt zwischen dem Anteil fehlerhafter Lampen pro Lieferung und der Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Stichprobe vom Umfang 10 höchstens zwei fehlerhafte Lampen zu finden.

(mögliches Ergebnis: $f(p) = (p-1)^8 \cdot (36p^2 + 8p + 1)$)

Geben Sie Definitions- und Wertebereich dieser Funktion an.
Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion.
Formulieren Sie den dargestellten Zusammenhang.

B1 Analysis

1.1 Über die 8 Planeten unseres Sonnensystems sind die in der Tabelle gegebenen Daten bekannt.
Dabei ist v die Maßzahl der mittleren Bahngeschwindigkeit in $km \cdot s^{-1}$ und r die Maßzahl der mittleren Entfernung von der Sonne in 10^6 km.

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
r	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1427,0	2869,9	4496,7
v	47,80	35,03	29,79	24,13	13,06	9,64	6,81	5,43

1.1.1 Der Zusammenhang zwischen v und r kann durch Funktionen näherungsweise beschrieben werden.
Finden Sie die Gleichungen geeigneter Funktionen, indem Sie folgende Regressionen ausführen:
(1) $v = f_1(r)$ ... lineare Regressionsfunktion
(2) $v = f_2(r)$ ... exponentielle Regressionsfunktion
(3) $v = f_3(r)$ ... Potenz- bzw. Powerregression
Beurteilen Sie die ermittelten Funktionen hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit, den Sachverhalt zu beschreiben.

1.1.2 Eine mögliche Funktion zur Beschreibung des Sachverhaltes ist f mit der Gleichung

$$v = f(r) = 364 \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R},\ r > 0.$$

Bestimmen Sie die Bahngeschwindigkeit, die ein Planet hätte, der sich zwischen Mars und Jupiter befinden würde (mittlere Entfernung von der Sonne 400 Millionen km).

Pluto zählt heute nicht mehr zu den Planeten. Seine Bahngeschwindigkeit beträgt $4{,}74\ km \cdot s^{-1}$.
Berechnen Sie seinen mittleren Abstand von der Sonne.

1.2 Die Funktion f ist gegeben mit der Gleichung

$$f(x) = 364 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

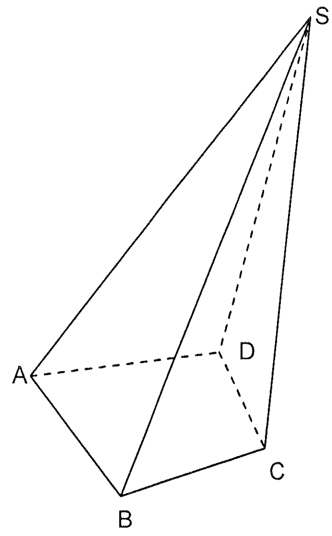
Im ersten Quadranten werden Flächen A_k durch den Graphen von f, die Koordinatenachsen und die Gerade x = 200 sowie die horizontale Gerade y = k begrenzt.

1.2.1 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_{500}.

Untersuchen Sie, ob der Inhalt der Fläche A_k größer als 20 000 Flächeneinheiten werden kann, wenn die horizontale Gerade immer weiter nach oben verschoben wird.

1.2.2 Die Fläche A_{500} rotiert um die x-Achse.
Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

B2 Analytische Geometrie



Skizze nicht maßstäblich

Betrachtet wird eine Pyramide ABCDS (siehe Skizze).
Diese Pyramide besitzt die Grundfläche ABCD mit $A(4 \mid -3 \mid 2)$, $B(7 \mid 1 \mid 0)$, $C(4 \mid 3 \mid -1)$, $D(1 \mid 1 \mid 0)$ und die Spitze $S(4 \mid 4 \mid 11)$.
Die Koordinatenangaben beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem.

2.1 Die Ebene durch die Punkte B, D und den Mittelpunkt der Kante $\overline{AS}$ zerlegt die Pyramide ABCDS in zwei Teilkörper.

Berechnen Sie das Volumen von einem der beiden Teilkörper.

2.2 Es werden alle ebenen Körperschnitte betrachtet, die durch B, D und einen Punkt der Kante $\overline{AS}$ verlaufen.

Weisen Sie nach, dass alle dabei auftretenden Schnittdreiecke gleichschenklig sind.
Prüfen Sie, ob ein gleichseitiges oder ein rechtwinkliges Dreieck als Schnittfigur auftreten kann.
Untersuchen Sie ferner, ob es Schnittdreiecke gibt, die einen Flächeninhalt von mindestens 36 FE besitzen.

2.3 Das Grundflächenviereck ABCD besitzt die Form eines Drachenvierecks.
Entscheiden Sie, ob dieses Drachenviereck einen Umkreis besitzt.

B3 Stochastik

Ein Hersteller von Flachbildschirmen hat für eines seiner Produkte folgende Ausfallwahrscheinlichkeiten ermittelt:

Alter in Monaten	0 – 6	7 – 12	13 – 18	19 – 24
Ausfallwahrscheinlichkeit in Prozent	5,0	0,5	0,5	0,8

Die Angabe bedeutet, dass ein Flachbildschirm innerhalb des ersten halben Jahres mit 5 % Wahrscheinlichkeit ausfällt; ein verbleibender fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % innerhalb des zweiten halben Jahres aus usf.

3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiges Gerät innerhalb der ersten 12 Monate nicht ausfällt.

Bestimmen Sie, wie viele defekte Geräte innerhalb des ersten Jahres zu erwarten sind, wenn insgesamt 1000 Geräte ausgeliefert wurden.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 1000 Geräten nicht mehr als 55 innerhalb des ersten Jahres ausfallen.

3.2 Innerhalb des ersten Jahres gibt es kostenlose Garantieleistungen.
Das Unternehmen hat beschlossen, interessierten Kunden nach Ablauf des ersten Jahres eine kostenpflichtige Garantieverlängerung für ein weiteres Jahr anzubieten.
Man schätzt, dass von 1000 Kunden 300 diese Garantieverlängerung kaufen würden.

3.2.1 Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Flachbildschirms innerhalb des zweiten Jahres 0,01225 ist.

3.2.2 Jeder im zweiten Jahr auftretende Garantiefall verursacht durchschnittliche Kosten in Höhe von 75,00 €.

Der Hersteller möchte die Gesamtkosten für alle im zweiten Jahr auftretenden Garantiefälle über den Preis für die Garantieverlängerung ausgleichen.

Bestimmen Sie den Preis, den ein Kunde für die Garantieverlängerung zahlen muss.

3.3 Die Gehäuse für die Flachbildschirme werden von einem Zulieferer bezogen.
Die Gehäuse können Material- oder Farbfehler aufweisen. Beide Fehler treten unabhängig voneinander auf. Andere Fehler gibt es nicht.

3.3.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für ein fehlerfreies Gehäuse, wenn Materialfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % und Farbfehler mit 2%-iger Wahrscheinlichkeit auftreten.

3.3.2 Ein anderer Zulieferer behauptet, seine Gehäuse seien mindestens zu 97 % fehlerfrei. Um dies zu prüfen, werden aus einer großen Anzahl von Gehäusen 50 zufällig ausgewählt und überprüft.
Ermitteln Sie den Erwartungswert für die Anzahl der fehlerhaften Gehäuse.

Eine Entscheidungsregel lautet: Wenn sich unter den 50 getesteten Gehäusen mehr als drei fehlerhafte Gehäuse befinden, wird die Lieferung abgelehnt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P_{Fehler} dafür, eine Lieferung fälschlicherweise als mangelhaft abzulehnen.
Erstellen Sie eine neue Entscheidungsregel, sodass gilt: $P_{Fehler} < 0,05$.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1 (Analysis):

Pflichtaufgabe 1.1

geg. Funktion y = f(x) = (1/2)*x^3 - 3x^2 + 5, x∈R.

ges. Koordinaten des Wendepunktes von f

Lösung:
zweite Ableitung auf Null setzen:
y' = (3/2)*x^2 - 3×2x, y'' = 3x - 6 = 0
ergibt
3x = 6, d.h. **x = 2**.

Die 3. Ableitung ist verschieden von 0, d.h. **W(2;f(2)) mit f(2) = -3** ist der gesuchte Wendepunkt.

Nebenrechnung: f(2) = (1/2)×2^3-3×2^2+5 = 4 - 12 + 5 = -3

Kontrolle im GTR(CAS):
Define f(x) = ((1)/(2))x^(3)-3x^(2)+5
done
diff(f(x),x,2)=0 ergibt -6+3*x=0
solve(ans,x) ergibt {x=2}
f(2) ergibt -3

Pflichtaufgabe 1.2

geg. h(x) = (x^2 - 49) / (x - 7) mit x∈D(h)

ges. Nullstelle von h

Lösung:
x=7 ist eine Definitionslücke und kommt als Nullstelle nicht in Frage.
x=-7 ist die gesuchte Nullstelle.

Kontrolle im GTR(CAS):
Define h(x) = (x^2-49)/(x-7)
done
solve(h(x)=0,x) ergibt {x=-7}

Pflichtaufgabe 1.3

geg. f(x) = (x-2)(x+2), x∈R.

ges. Ableitung f'(x) und Integral ∫(f(x),x,0,1)

Lösung:

f(x) = x^(2)-4 (3. binomische Formel)

f'(x) = 2*x

und

∫(f(x),x,0,1) = ∫((x^2-4),x,0,1)
= ((1/3)x^3-4x)|x=1 - ((1/3)x^3-4x)|x=0 = 1/3-4 = -11/3

Kontrolle im GTR(CAS):

Define f(x) = (x-2)(x+2)
done
diff(f(x),x,1) ergibt 2*x
∫(f(x),x,0,1) ergibt -11/3

Pflichtaufgabe 1.4

geg. drei Schaubilder einer ganzrationalen Funktion f,
deren Ableitung f' und eine weitere Funktion g

Graphen zu f, f' und g:

Es gilt: Nullstellen der ersten Ableitung weisen auf Extremstellen der Ausgangsfunktion hin. Der mittlere Graph hat zwei Extrempunkte, d.h. Abb. 2 beschreibt f und Abb. 1 oder Abb. 3 sind die Ableitung. Der erste Extrempunkt ist ein Minimum, links von x_{min} ist der Anstieg positiv, rechts davon negativ. Somit ist Abb. 3 die Ableitung f’ und Abb. 1 damit g = –f’ (f’ gespiegelt).

Beispiele für f, f’ und g:

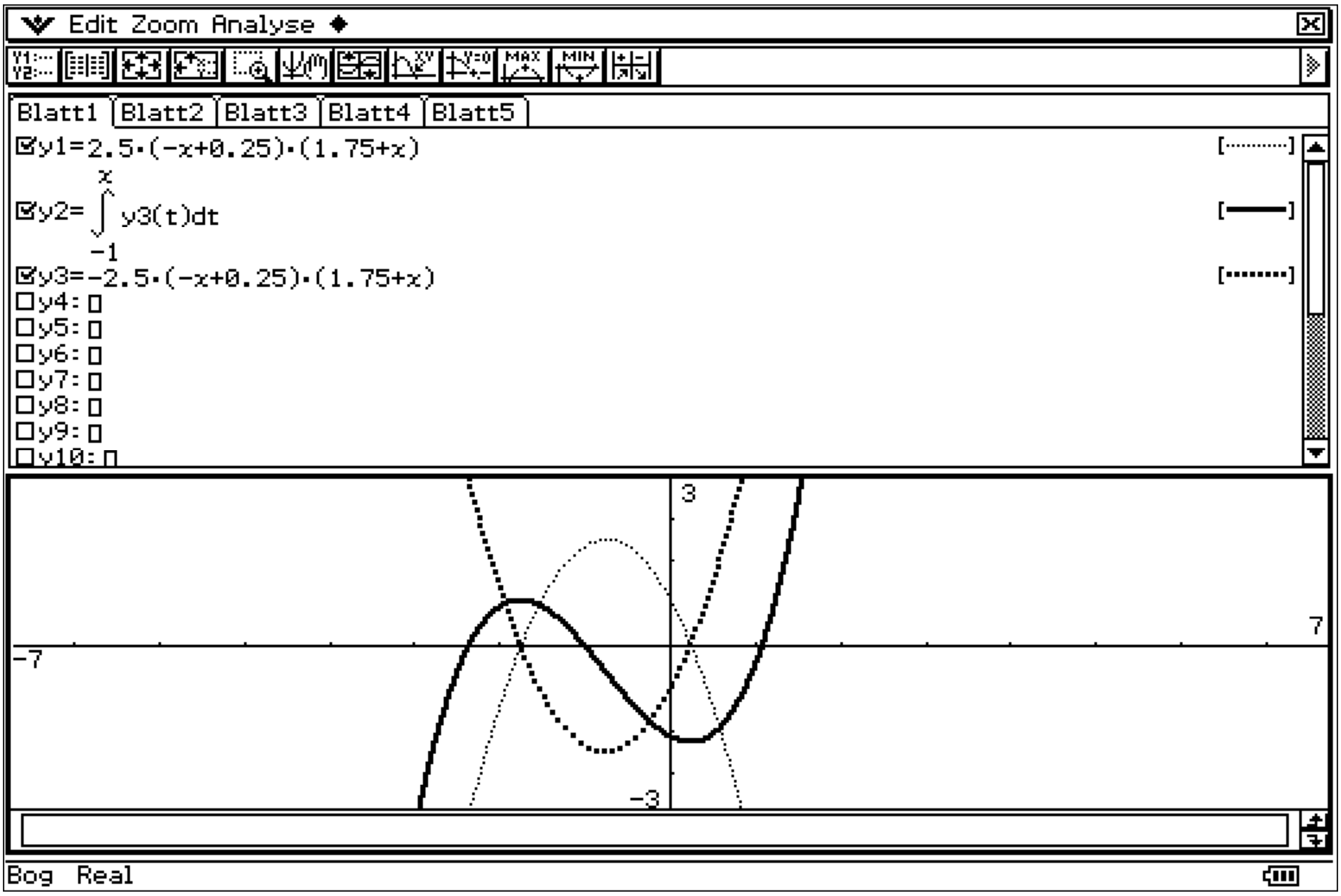


Abb. 1: g(x) = 2.5*(-x+0.25)*(1.75+x)

Abb. 2: f(x) = ∫(f'(x),x,-1,x) = ∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x)
= 5*x^3/6 + 15*x^2/8 - 35*x/32 - 205/96

Abb. 3: f'(x) = -2.5*(-x+0.25)*(1.75+x)

Rechnung im GTR(CAS):

∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x) ergibt 5*x^3/6+15*x^2/8-35*x/32-205/96

Pflichtaufgabe 1.5

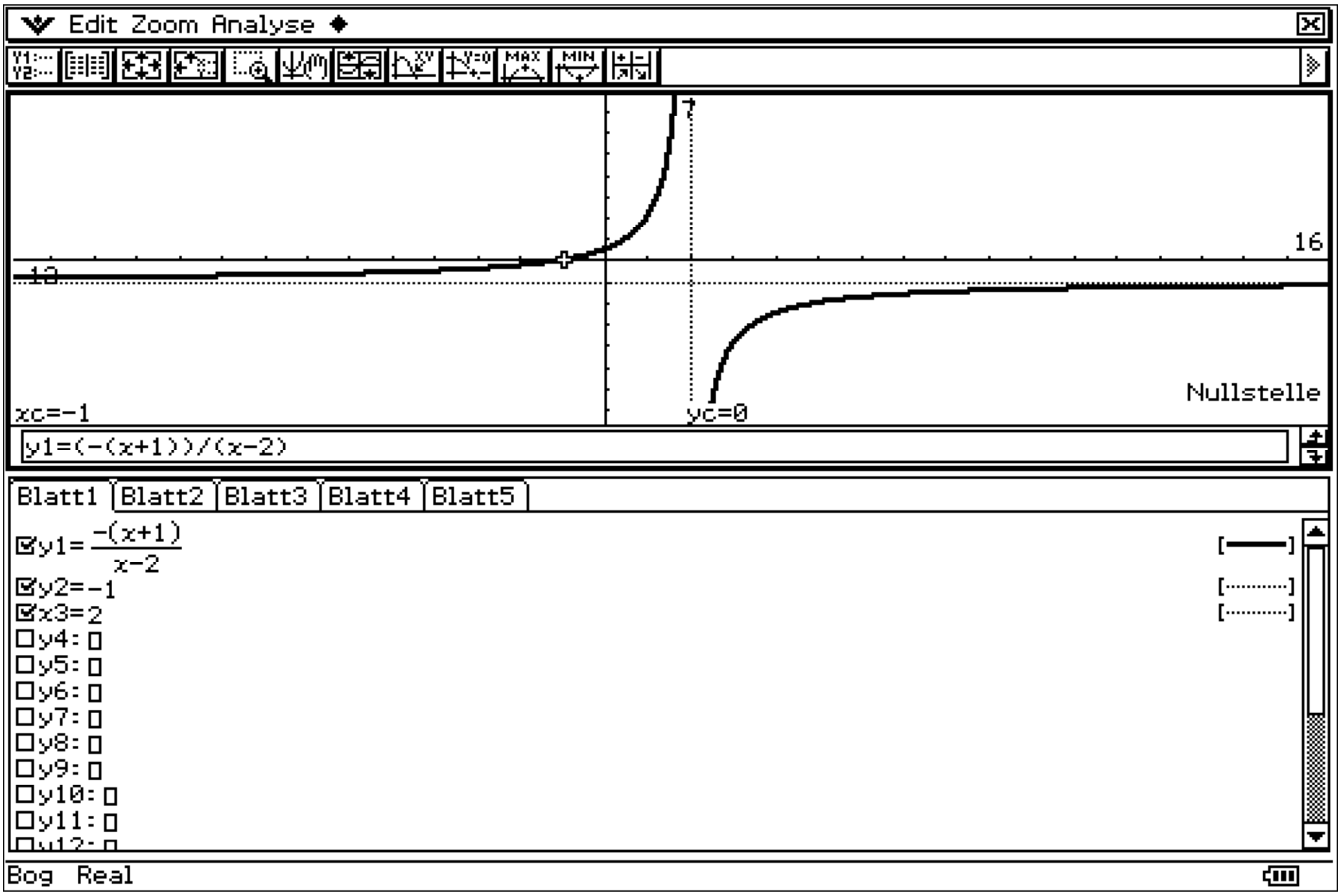
geg. Funktion f mit drei Eigenschaften:

- Polstelle ist x=2
- Nullstelle ist x=-1
- Grenzwert ist lim(f(x),x,∞)= -1

ges. Skizze zu f (eine mögliche Lösung)

Lösung:

Skizze zu f



eine analytische Lösung: f(x) = - (x+1)/(x-2)

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 2 (Analytische Geometrie):

geg. ebenes Viereck ABCD im kartesischen Koordinatensystem mit
A(4|1|2), B(2|3|2), C(2|1|4), D(4|-1|4)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Parallelogramms

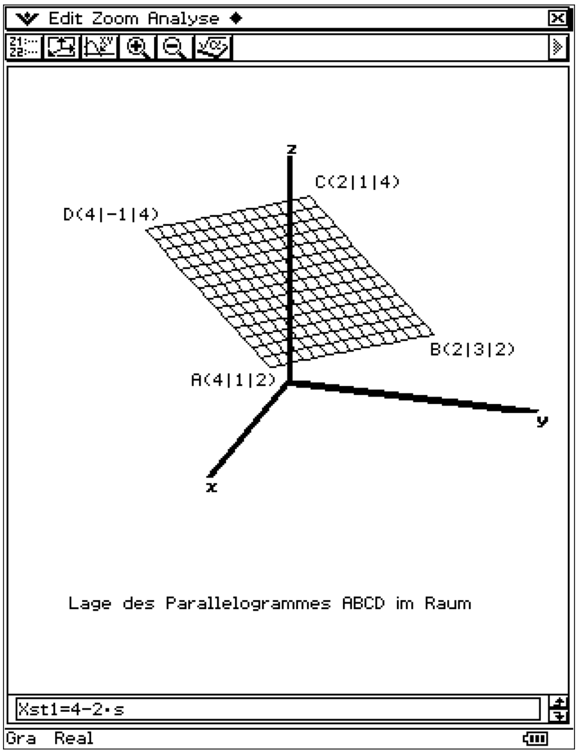
Lösung:

Seitenlängen (Normen der Vektoren zwischen zwei Punkten)
||AB|| = ||B-A|| = √((-2)^2+2^2+0^2) = √(8), AB liegt in Höhe z=2,
||BC|| = ||C-B|| = √(0^2+(-2)^2+2^2) = √(8),
||CD|| = ||D-C|| = √(2^2+(-2)^2+0^2) = √(8), CD liegt in Höhe z=4,
||DA|| = ||A-D|| = √(0^2+2^2+(-2)^2) = √(8).

AB und CD sind parallel und von gleicher Länge, damit sind es wegen der gleichen Seitenlängen auch BC und DA.

Es liegt ein Parallelogramm vor.

(Die Untersuchung zweier paralleler Seiten ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Rechteckes

Lösung:

Winkel: Skalarprodukte der normierten Vektoren betrachten

cos(∡DAB) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[0],[-2],[2]]▫[[-2],[2],[0]] = ((-4)/(8)) = ((-1)/(2)) ≠ 0

cos(∡ABC) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[2],[-2],[0]]▫[[0],[-2],[2]] = ((4)/(8)) = ((1)/(2)) ≠ 0

cos(∡BCD) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[0],[2],[-2]]▫[[2],[-2],[0]] = ((-4)/(8)) = ((-1)/(2)) ≠ 0

cos(∡CDA) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[-2],[2],[0]]▫[[0],[2],[-2]] = ((4)/(8)) = ((1)/(2)) ≠ 0

Damit liegen keine rechten Winkel vor.
(Die Untersuchung eines Winkels ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)

Kontrolle im GTR(CAS):

[[4,1,2]] ⇒ A [[2,3,2]] ⇒ B [[2,1,4]] ⇒ C [[4,-1,4]] ⇒ D

norm(B-A)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(C-B)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(D-C)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(A-D)	ergibt	2*2^(1/2)
dotP(D-A,B-A)/8	ergibt	-1/2
dotP(A-B,C-B)/8	ergibt	1/2
dotP(B-C,D-C)/8	ergibt	-1/2
dotP(C-D,A-D)/8	ergibt	1/2

ges. Koordinaten des Diagonalschnittpunktes S:

Lösung:

S = A + AC/2 = A + (C-A)/2 = [[4],[1],[2]] + (1/2) × [[-2],[0],[2]] = [[3],[1],[3]]

Kontrolle im GTR(CAS):

A+(C-A)/2 ergibt [[3,1,3]]

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Lage des Punktes E(3|2|1) zur Seite AB

Lösung:

Geradengleichung für Seite AB ist x(t) = A + t×(B-A), 0≤t>1,

Untersuchung der Gleichung E = A + t×(B-A) bzw. E - A = t×(B-A), d.h.

[[3-4],[2-1],[1-2]] = t×[[2-4],[3-1],[2-2]] und zusammengefasst [[-1],[1],[-1]] = t×[[2],[2],[0]] .

Es gibt keine Lösung für t (Die Vektoren AB und AE sind linear unabhängig.),
d.h. E liegt nicht auf AB.

Andere (anschauliche) Lösung:

Die Seite AB liegt in Höhe z=2 und Punkt E liegt tiefer: z=1. Damit kann E nicht auf AB liegen.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 3 (Stochastik):

geg. Fehlerquote in der Produktion bei gleichem Produktionsumfang an allen Wochentagen (Mo bis Fr):

M_k = {Produkt am k-ten Wochentag hergestellt} mit $P(M_k) = 1/5 = 0{,}2$ für k=1,2,3,4,5.

C = {Produkt fehlerhaft}

$P(C|M_k) = 0{,}10$ und $P(C|M_k) = 0{,}05$ für k>1.

ges. Wahrscheinlichkeiten für

$A = M_k \cap \text{nicht}C$ sowie $B = \text{nicht}C$

Lösung:

Es gilt: $P(M_k) = P(M_k \cap \text{nicht}C) + P(M_k \cap C)$, d.h.

$P(A) = P(M_k \cap \text{nicht}C) = P(M_k) - P(M_k \cap C) = P(M_k) - P(C|M_k)\times P(M_k)$, d.h.

P(A) = 0,20 - 0,10×0,20 = 0,20 - 0,02 = **0,18** = 9/50 .

Weiter:

P(C) = ∑(P(C|Mk)×P(Mk),k,1,5) (Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)
= (1/5)×(0,10 + 4×0,05) = (1/5)×0,30 = 0,06.

Hieraus folgt **P(B) = P(nichtC) = 0,94** = 47/50 .

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A1 (Analysis):

Pflichtaufgabe 1.1

geg. ganzrationale Funktion 3. Grades $y = p_3(x) = \sum(a_k*x^\wedge k,k,0,3)$

ges. maximale Anzahl der Extremstellen, Begründung

Lösung:

Notwendige Bedingung für Extremstellen:
$y' = p_3'(x) = \sum(k*a_k*x^\wedge(k-1),k,1,3) = 0$,
d.h.
$y' = 3*a_3*x^\wedge 2 + 2*a_2*x + a_1 = 0$.

Diese quadratische Nullstellengleichung hat höchstens 2 verschiedene reelle Lösungen. Damit kann es höchstens 2 Extremstellen geben, sofern zusätzlich weitere Bedingungen erfüllt sind (hinreichende Bedingung.)

Pflichtaufgabe 1.2

geg. $f(x) = -(1/60)x^\wedge 3 - (1/20)x^\wedge 2 + (3/2)x + 2$, $x \in R$, wobei G den Graphen von f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.2.1

ges. Nullstellen von f

Lösung:

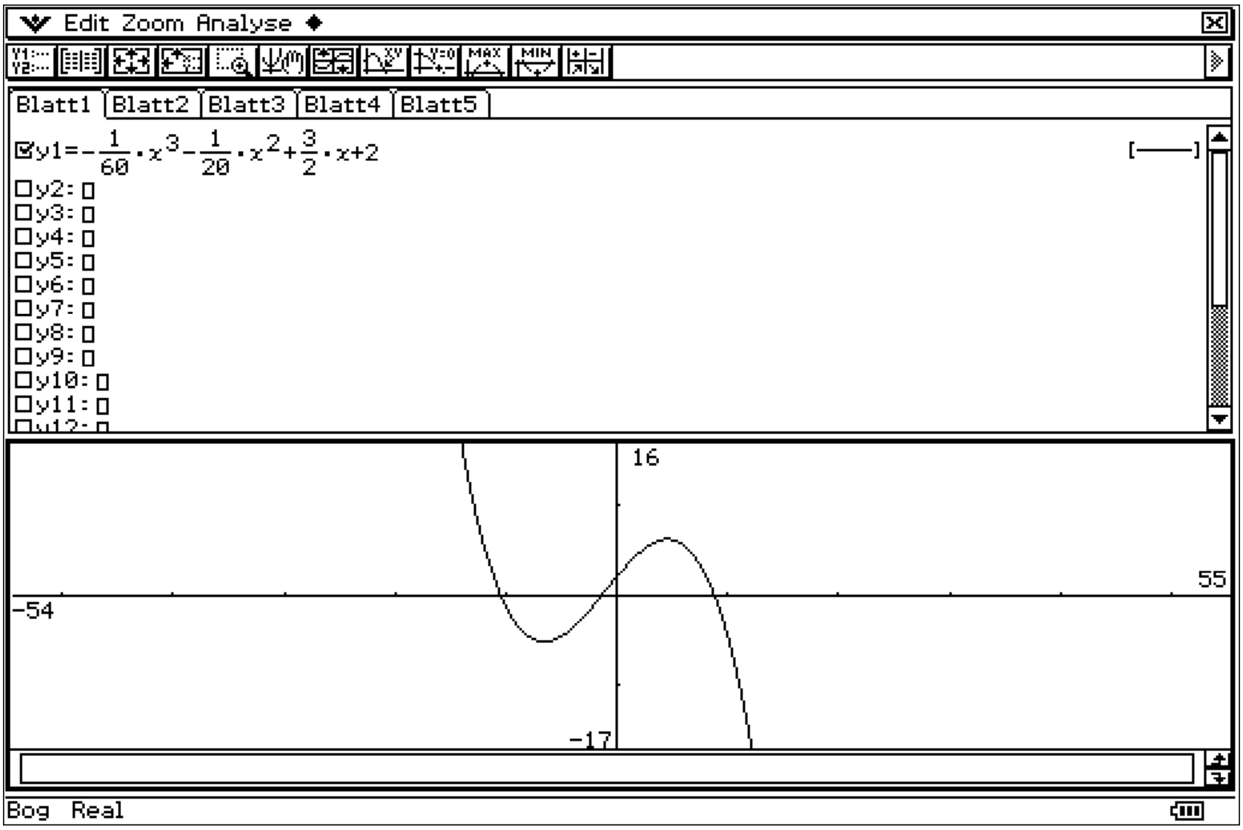
Rechnung im GTR(CAS):

Define f(x) = -(1/60)x^3 - (1/20)x^2 + (3/2)x + 2

done

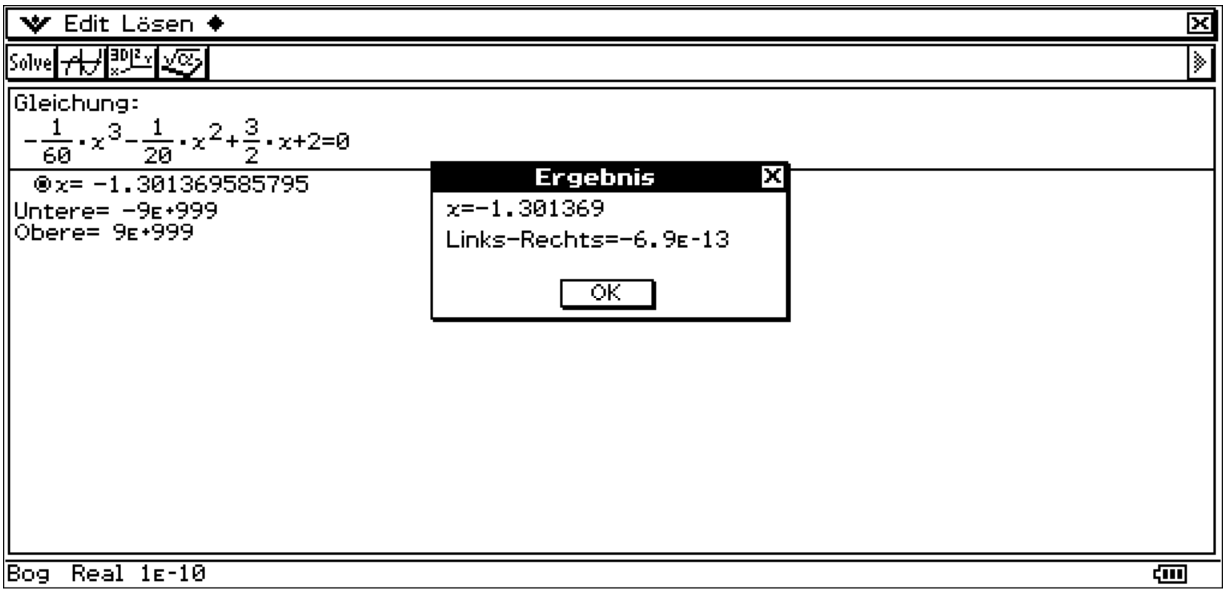
solve(f(x)=0,x) ergibt {x = -10.48943358, x = -1.301369586, x = 8.790803168}

Graph der Funktion:



Im folgenden Menü werden jeweils ein Startwert und ein Suchintervall benötigt, um die numerische Lösungssuche zu aktivieren:

Menü zur numerischen Lösung einer nichtlinearen Gleichung: (z.B. Startwert x=0)



Ergebnis:

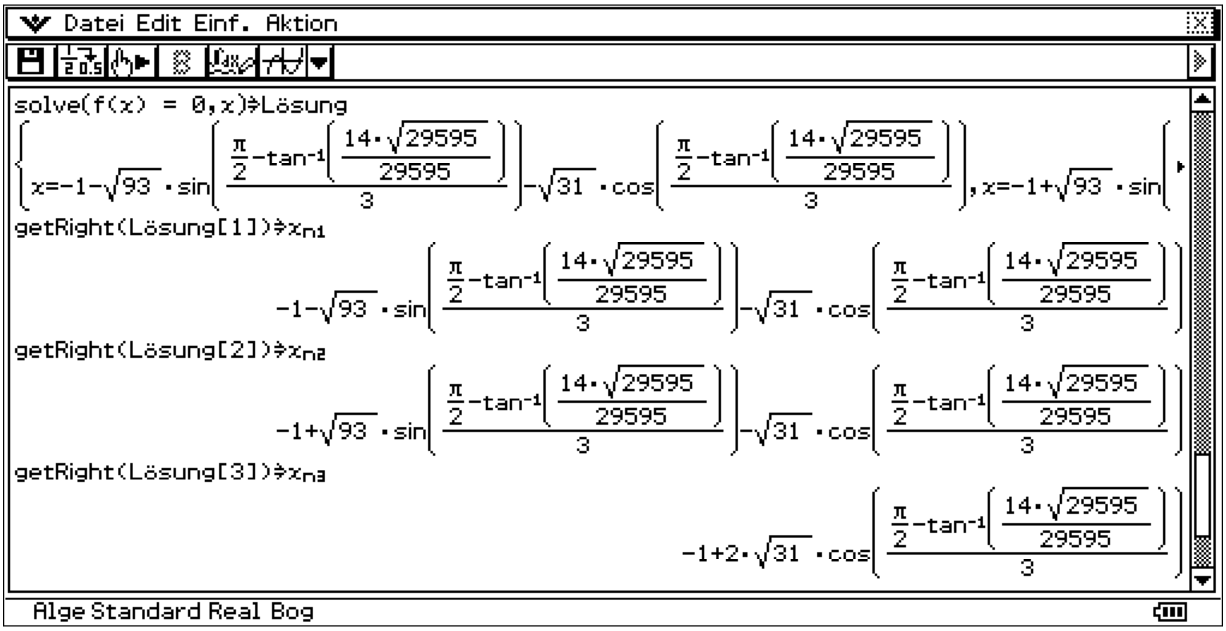
Es gibt 3 verschiedene reelle Nullstellen, wie im Schaubild erkennbar:
$x_{n1} = -10.48943358 \approx -10.49$, $x_{n2} = -1.301369586 \approx -1.30$, $x_{n3} = 8.790803168 \approx 8.79$

Da die Nullstellen nichtrational sind, handelt es sich um gerundete Werte.

Das CAS kann die exakten Lösungen angeben:

DelVar x

done



Mit den folgenden Abkürzungen erkennt man die Struktur der Zahlen:

(π/2 – $\tan^{-1}$(14 / 29595^(1/2))) / 3 ⇒ φ

31^(1/2) ⇒ r

Damit hat man die exakte Darstellung der Nullstellen:

x_{n1} = -1 - r*cos(φ) - 3^(1/2)*r*sin(φ)

x_{n2} = -1 - r*cos(φ) + 3^(1/2)*r*sin(φ)

x_{n3} = -1 + 2*r*cos(φ)

Probe: (Linearfaktoren wieder ausmultiplizieren)

DelVar x

done

(x - (-1-3^(1/2)*r*sin(φ) - r*cos(φ))) * (x - (-1+3^(1/2)*r*sin(φ) - r*cos(φ))) * (x - (-1+2*r*cos(φ)))

ergibt (x+10.48943358) * (x+1.301369586) * (x-8.790803168)

expand(ans) ergibt x^3 + 3*x^2 - 90*x - 120

expand(ans/(-60)) ergibt -0.01666666667*x^3 - 0.05*x^2 + 1.5*x+ 2

ans ergibt -x^3/60 - x^2/20 + 3*x/2 + 199999999999999/100000000000000

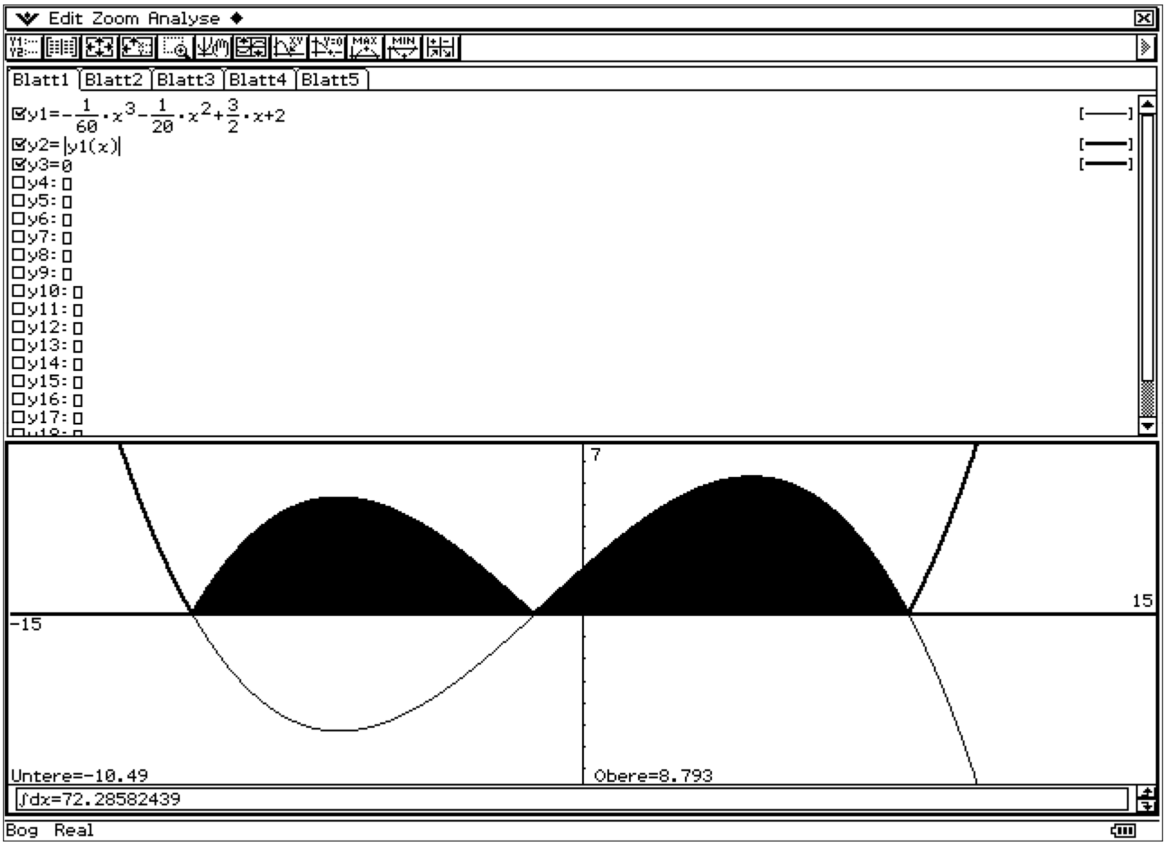
Damit ist die Probe erfüllt, wenn man

199999999999999/100000000000000 = 1.999 999 999 999 99 = 2

setzt und damit die interne Zahlendarstellung im GTR korrigiert.

ges. Flächeninhalt der Fläche, die durch G und die x-Achse vollständig begrenzt wird.

2D-Darstellung der Flächenanteile (der linke negative Anteil ist nach oben gespiegelt)



Lösung:
Ein Blick in das Schaubild zeigt, dass unterhalb der x-Achse zwischen x_{n1} und x_{n2} ein vollständig begrenztes Flächenstück liegt, ebenso oberhalb der x-Achse zwischen x_{n2} und x_{n3} (die y-Achse bleibt unbeachtet, da sie in dieser Teilaufgabe keine Erwähnung findet)

Ansatz:
A = ∫(abs(f(x)),x,x_{n1},x_{n3}) = ∫((-f(x)),x,x_{n1},x_{n2}) + ∫(f(x),x,x_{n2},x_{n3})

Rechnung im GTR(CAS):

f(x) ist (-x^3)/60-x^2/20+3*x/2+2
x_{n1} ist -10.48943358
x_{n2} ist -1.301369586
x_{n3} ist 8.790803168
∫(-f(x),x,approx(x_{n1}),approx(x_{n2})) + ∫(f(x),x,approx(x_{n2}),approx(x_{n3})) ergibt 72.2858556 ≈ 72.3

Der approx-Befehl zerstört die exakten Zahlenstrukturen, die der CAS-Rechner im Hintergrund behält. Damit wird die numerische Rechnung erheblich beschleunigt.
Die Flächenanteile sind:

∫(-f(x),x,approx(x_{n1}),approx(x_{n2})) ergibt 31.64310646

und

∫(f(x),x,approx(x_{n2}),approx(x_{n3})) ergibt 40.64274914 geg. Fläche im 1. Quadranten, begrenzt durch G, die Koordinatenachsen und x = k (senkrechte Gerade). Der Flächeninhalt beträgt 30 Flächeneinheiten.

ges. x-Wert k

Lösung:

Ansatz: ∫(f(x),x,0,k) = 30 mit k > 0 and k < x_{n3} = 8.790803168

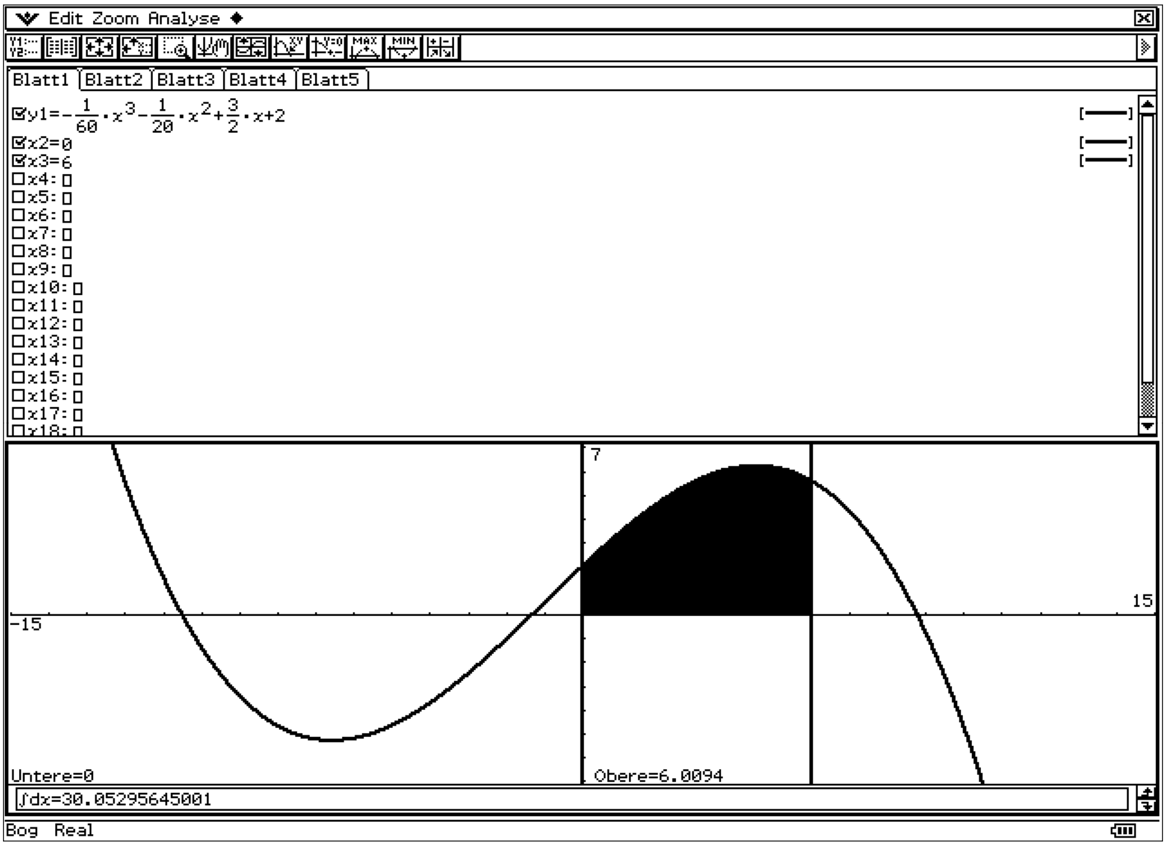
Rechnung im GTR(CAS):

∫(f(x),x,0,k)=30 ergibt (-k^4)/240-k^3/60+3*k^2/4+2*k=30
solve(ans|k>0 and k<approx(x_{n3}),k) ergibt {k=6}

Probe:

judge(∫(f(x),x,0,6)=30) ergibt TRUE

Ansicht als 2D-Grafik



Teilaufgabe 1.2.2

ges. Gleichung der Wendetangente und Gleichung der Normalen im Wendepunkt

Lösung:

Die Wendestelle ist eine Extremstelle der 1. Ableitung, d.h. (f'(x))' = f''(x) = 0 an dieser Stelle.

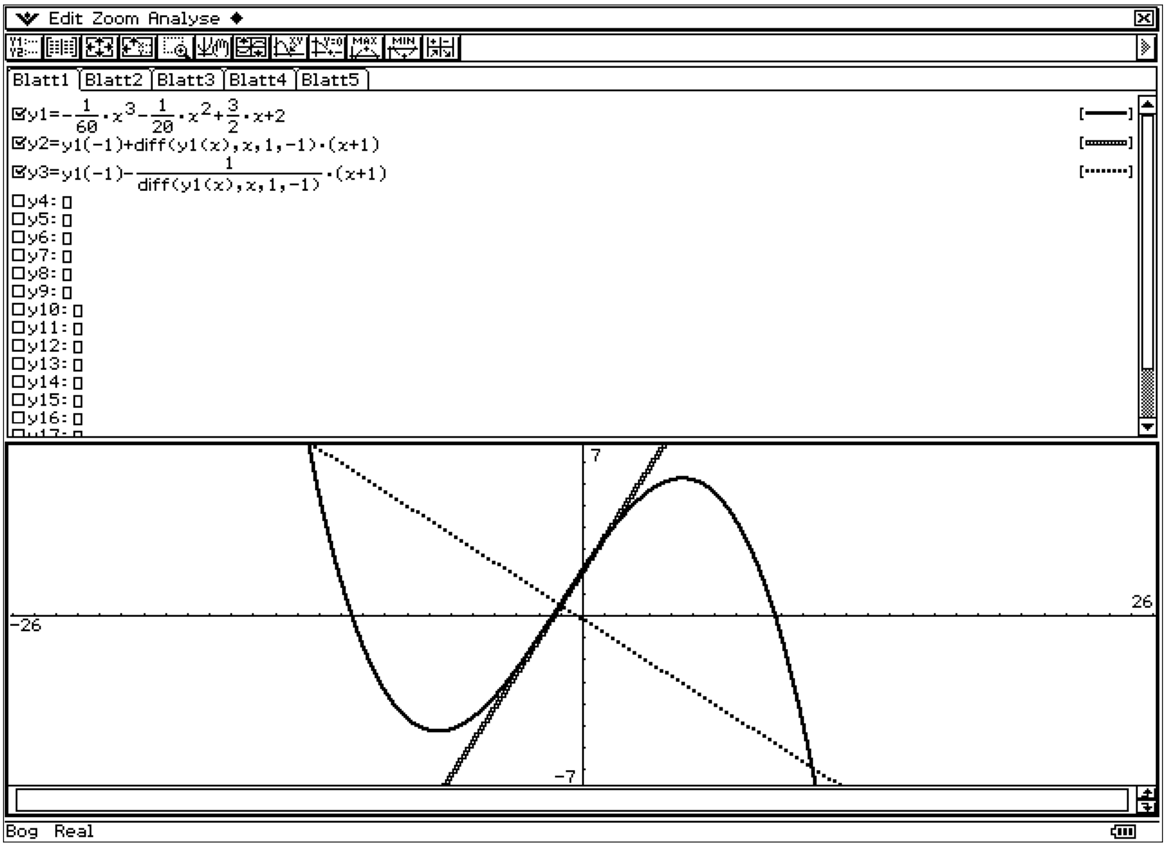
Rechnung im GTR(CAS):

diff(f(x),x,2)=0 ergibt (-(x+1))/10=0, d.h. **x = -1** und **f(-1) = 7/15**.

Gleichung der Wendetangente: y = t(x) = f(-1) + f'(-1) × (x+1) = 1.55x + 2.02

Gleichung der Normalen: y = n(x) = f(-1) - 1/(f'(-1) × (x+1) = -0.65x-0.18

2D-Darstellung der Kurven:



Teilaufgabe 1.2.3

geg. Dreieck OAB mit O=O(0|0), A=A(x_{n3}|0) und B(x,f(x)) im 1. Quadranten

ges. maximal möglicher Flächeninhalt von ∆OAB

Lösung:

Ansatz mittels Vektorrechnung
(∆-Fläche = halbe Parallelogrammfläche = Norm des Kreuzproduktvektors):

Define Inhalt(x) = (1/2)×norm(crossP([[approx(x_{n3})],[0],[0]], [[x],[f(x)],[0]]))

done

Define g(x) = (Inhalt(x))^2

done

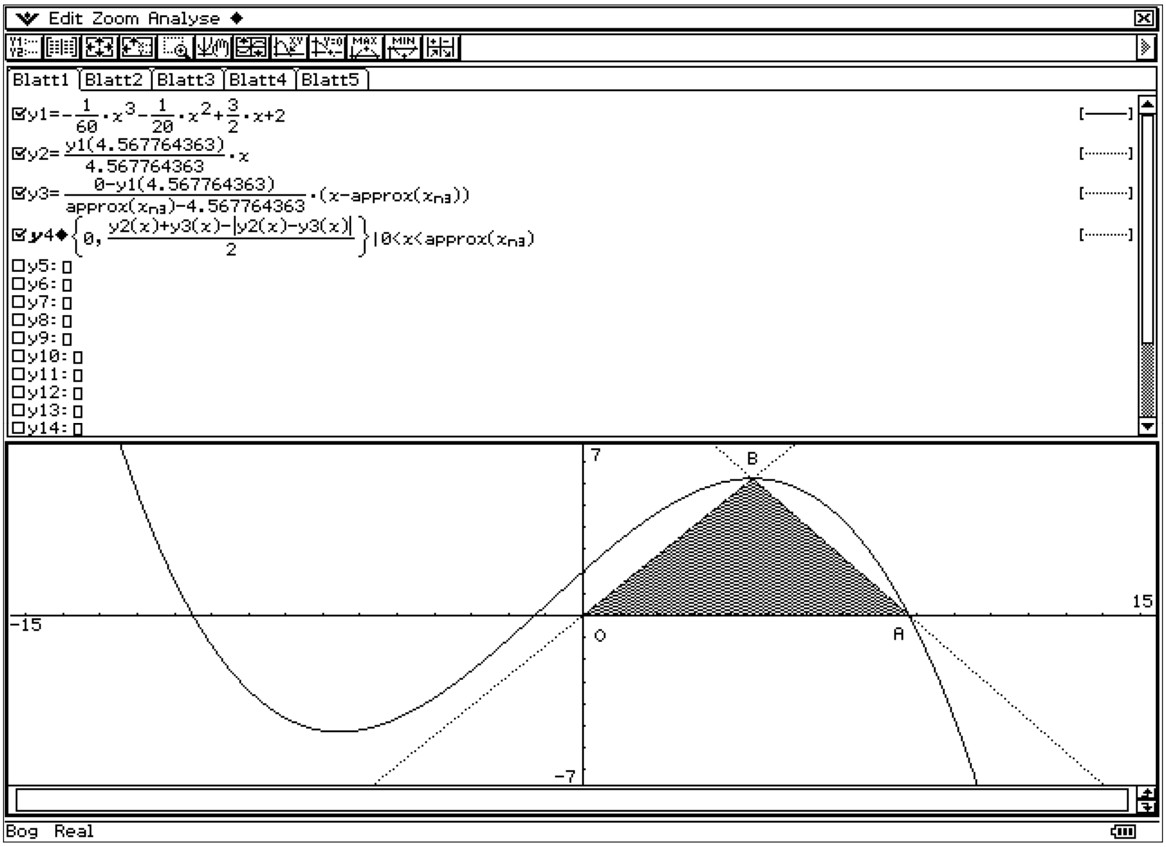
fMax(g(x),x,0,approx(x_{n3})) ergibt {MaxValue = 747.4482446, x = 4.567764363}

747.4482446^(1/2) ergibt 27.33949971
Inhalt(4.567764363) ergibt 27.33949971

Ergebnis:

An der Stelle x = 4,567764363 wird der maximale Flächeninhalt mit 27,34 Flächeneinheiten erreicht.

Darstellung der Dreiecksfläche OAB:



anderer Lösungsansatz:
elementare Formel mit Grundseite x_{n3} und Höhe f(x) im Dreieck OAB

Define Inhalt(x) = (1/2)×approx(x_{n3})×f(x)

done

fMax(Inhalt(x),x,0,approx(x_{n3})) ergibt {MaxValue = 27.33949971,x = 31^(1/2)-1}
approx(31^(1/2)-1) ergibt 4.567764363

Pflichtaufgabe 1.3

geg. Funktionenschar g_a(x) = (a/60)x^3 - (1/20)x^2 + (3/2)x + 2, a,x∈R, a>0
ges. Beschreibung des Krümmungsverhaltens

Lösung:

Es gilt:
$g_a''(x) \geq 0 \Rightarrow$ konvexe Krümmung
$g_a''(x) \leq 0 \Rightarrow$ konkave Krümmung

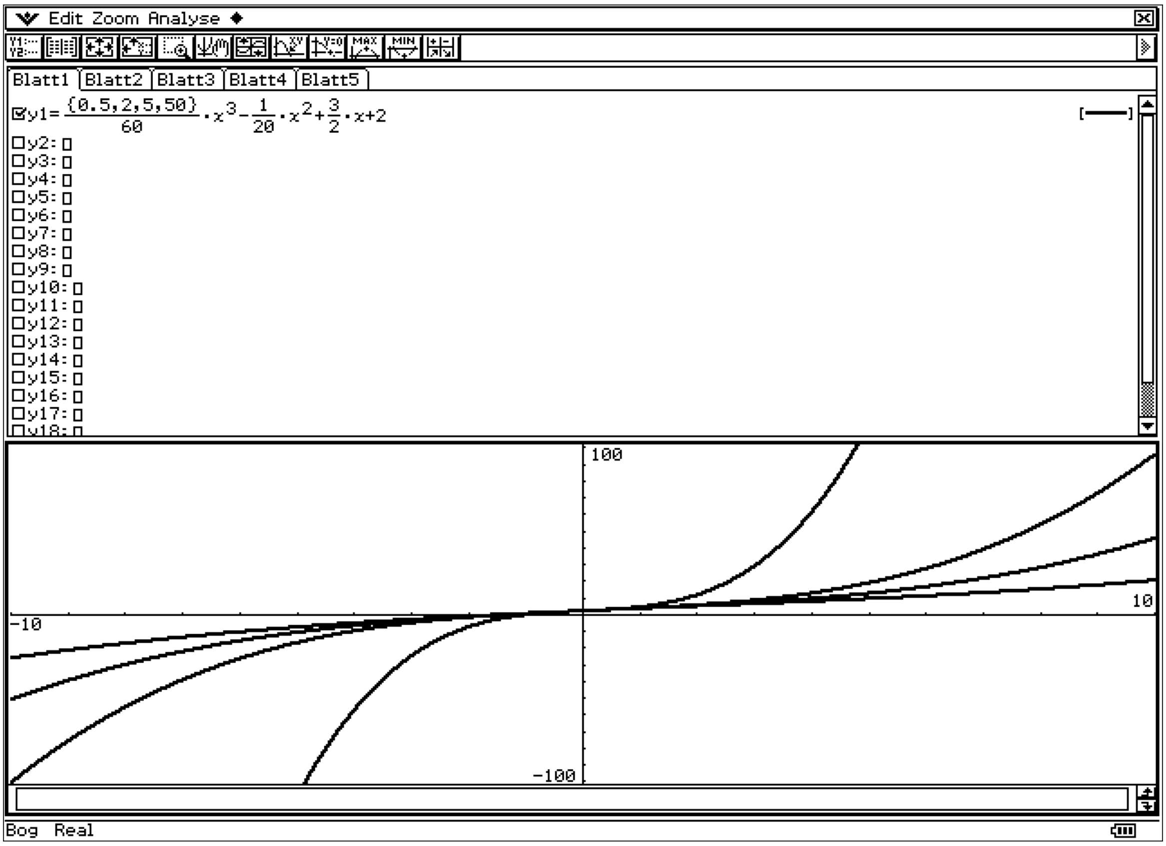
Rechnung im GTR(CAS):

Define g(a,x) = (a/60)x^3 - (1/20)x^2 + (3/2)x + 2
done

diff(g(a,x),x,2)	ergibt	(a*x - 1)/10
solve((a*x-1)/10≥0,x)	ergibt	{a*x ≥ 1}

Wegen a>0 folgt: **konvexe Krümmung (Linkskrümmung) für x ≥ 1/a,**
konkave Krümmung (Rechtskrümmung) für x ≤ 1/a.
x = 1/a ist die Wendestelle.

Darstellung der Kurvenschar:



Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A2 (Analytische Geometrie):

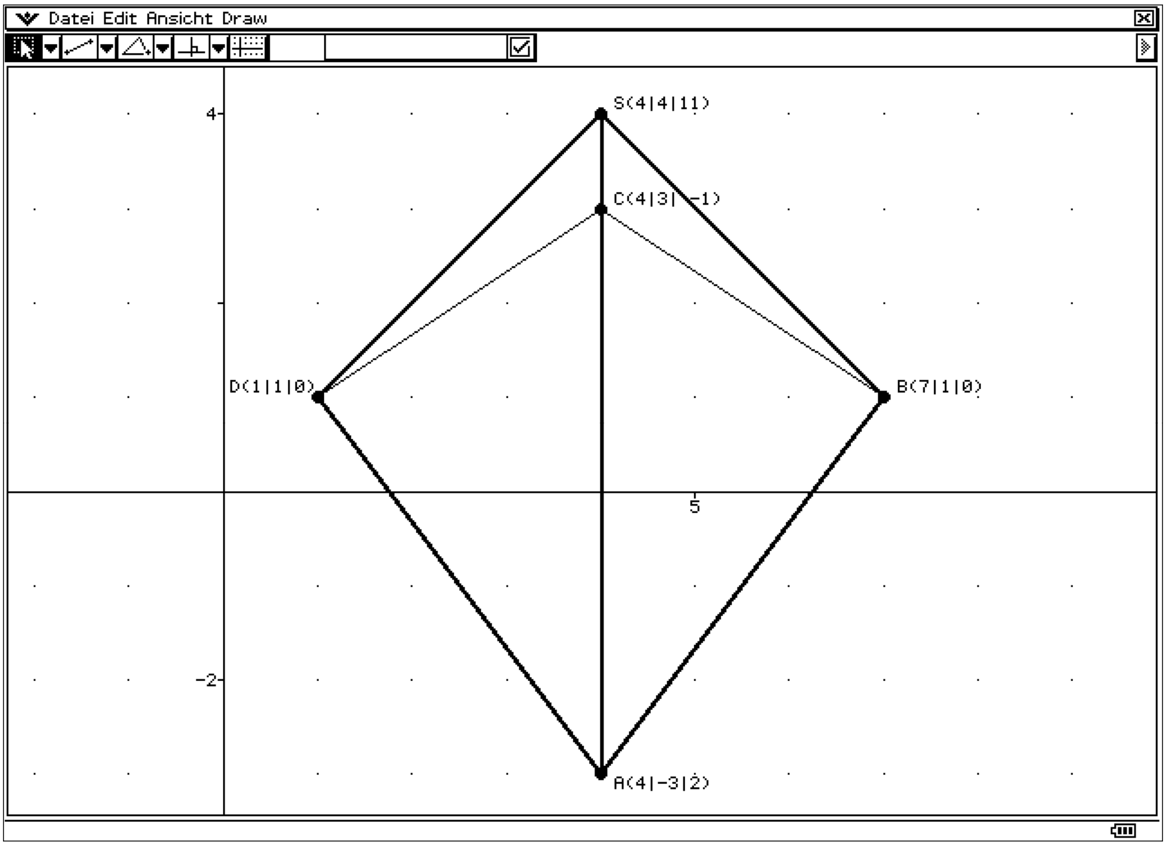
geg. pyramidenförmiger Körper ABCDS mit Grundfläche ABCD und Spitze S:
A(4| -3| 2), B(7| 1| 0), C(4| 3| -1), D(1| 1| 0) und S(4| 4| 11)
(kartesisches Koordinatensystem)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Zeichnung des Körpers ABCDS

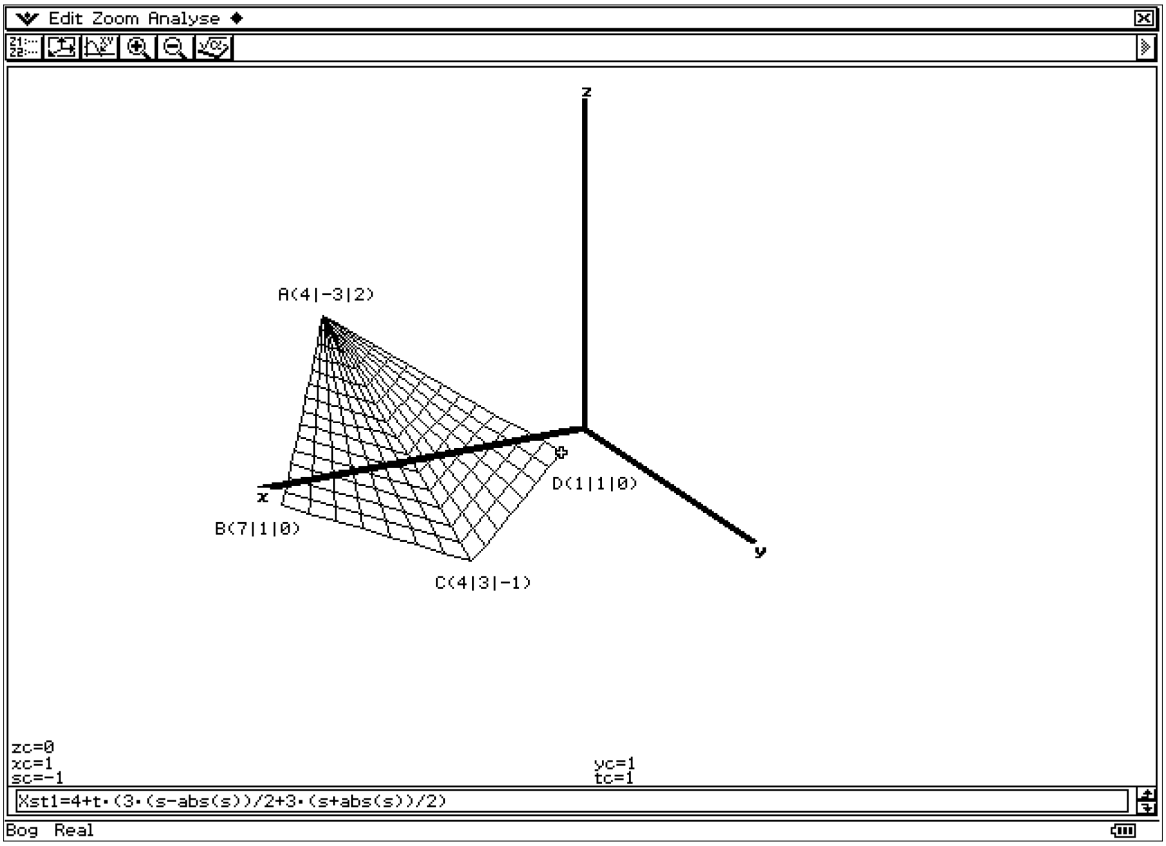
Lösung:

Grafik im Geometrie-Menü, Grundfläche und S in x-y-Ebene projiziert:

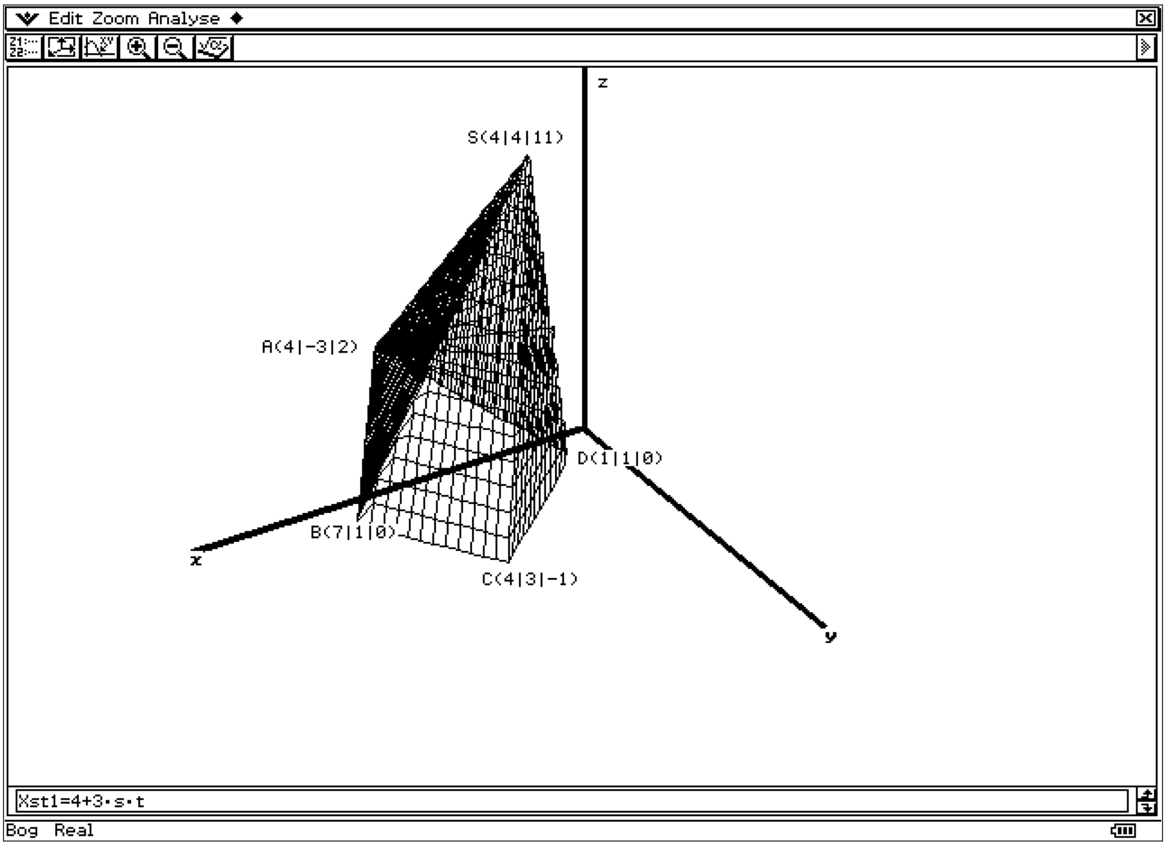


Man erkennt die Grundfläche als Drachenviereck.

Grafik im 3D-Menü, Darstellung der Grundfläche ABCD:

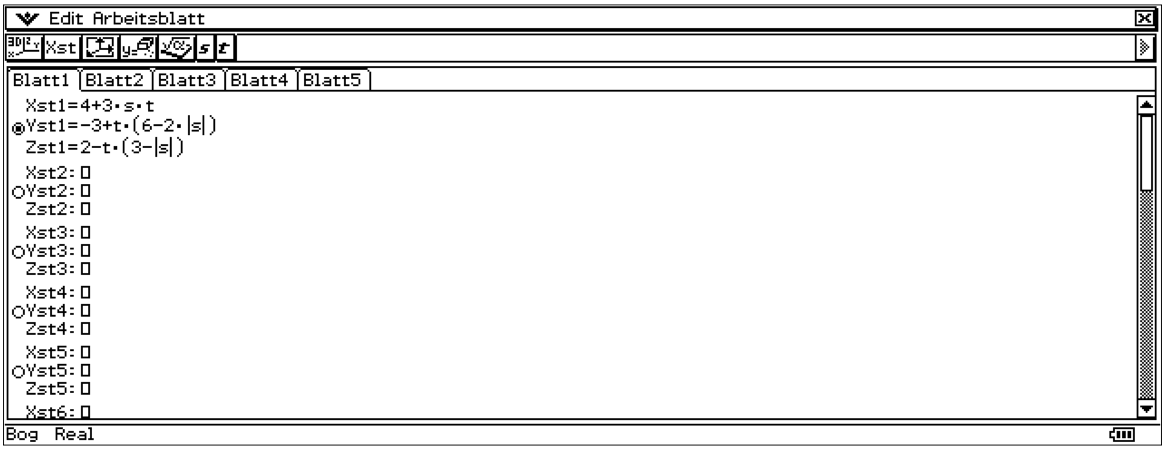


Grafik im 3D-Menü, Darstellung der Pyramide ABCDS:

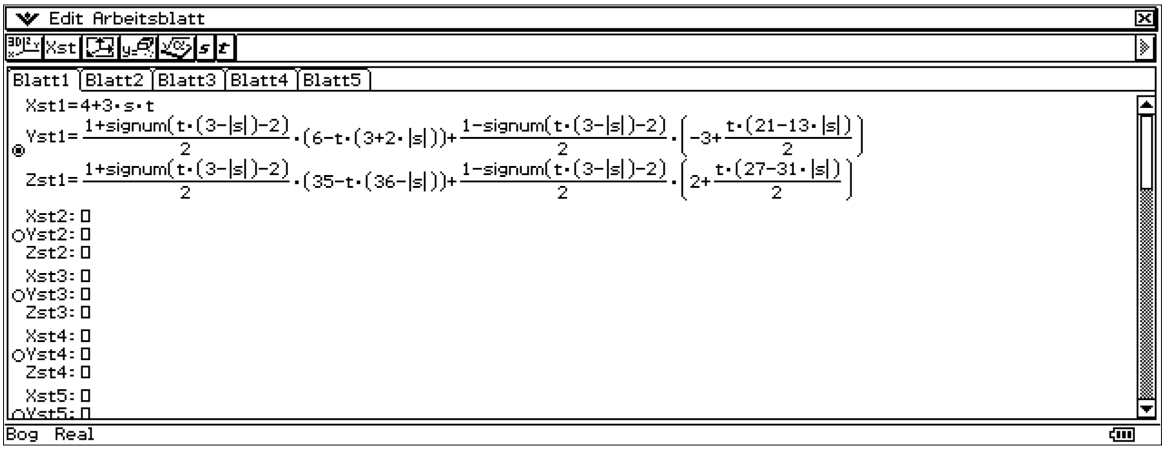


Ein Blick in die benutzten Formeln (Parameterdarstellungen):

3D-Grafik der Grundfläche ABCD:



3D-Grafik der Pyramidenoberfläche ABCDS:



Hinweise zur Herleitung der Parameterdarstellungen im 3D-Menü:

Rechnung im GTR(CAS):

[[4,-3,2]] ⇒ A [[7,1,0]] ⇒ B [[4,3,-1]] ⇒ C [[1,1,0]] ⇒ D

algebraische Beschreibung des Drachenvierecks mittels Vektorrechnung:

X(s,t) = A + t×((|s|+s)/2)×(B-A) + ((|s|-s)/2)×(D-A) + (1- |s|)×(C-A)), -1 ≤ s ≤ 1, 0 ≤ t ≤ 1.

Rechnung im GTR(CAS):

A + t*((|s|+s)/2*(B-A) + (|s|-s)/2*(D-A) + (1-|s|)*(C-A)) ergibt
[[4+t*(3*(s-abs(s))/2+3*(s+|s|)/2),-3+t*(6*(1-|s|)-2*(s-abs(s))+2*(s+|s|)),2-t*(3*(1-|s|)+2*|s|)]]
simplify(trn(ans)) ⇒ X ergibt [[4+3*s*t], [-3+6*t-2*t*|s|], [2-t*(3-|s|)]]

Der Punkt X durchläuft alle Flächenpunkte des Drachenvierecks.

algebraische Beschreibung der Pyramidenoberfläche mittels Vektorrechnung:

Es sei M der Mittelpunkt der Grundfläche (Schnittpunkt der Diagonalen):

(B+D)/2 ⇒ M ergibt [[4, 1, 0]]
[[4,4,11]] ⇒ S ergibt [[4, 4, 11]]

Die Grundfläche ABCD der Pyramide wird von A ausgehend über die gewonnene Parameterdarstellung

X(s,t) = [[4+3*s*t], [-3+6*t-2*t* |s|], [2-t*(3- |s|)]], -1≤s≤1, 0≤t≤1,

beschrieben und besteht aus vier Dreiecken ABM, BCM, CDM und DAM, über denen jeweils die Seitenflächen hin zur Spitze S liegen.

Schnittpunkt T der Geraden durch B und D mit der Geraden durch A und X:

Der Ansatz T = B+u*(D-B) = A + v*(X-A) ergibt: u*(D-B)-v*(X-A) = A-B

Rechnung im GTR(CAS):

trn([[4+3*s*t], [-3+6*t-2*t*|s|], [2-t*(3-|s|)]]) ⇒ X

u*(D-B)-v*(X-A)-(A-B) ergibt [[3-6*u-3*s*t*v,4-v*(6*t-2*t*|s|),-2+t*v*(3-|s|)]]

solve({3-6*u-3*s*t*v=0,4-v*(6*t-2*t*|s|)=0,-2+t*v*(3-|s|)=0},{u,v,w}) ergibt
{u=(3-2*s-|s|)/(2*(3-|s|)),v=2/(t*(3-|s|)),w=w}

(norm(X-A))^2 ergibt t^2*(45-30*|s|+14*s^2)

(norm(B+u*(D-B)-A|u=(3-2*s-|s|)/(2*(3-|s|))))^2 ergibt
4*(45-30*|s|+14*s^2)/(9-6*|s|+s^2)

Hieraus folgt für X auf der Strecke BD:

t^2*(9-6* |s|+s^2) = 4 und t = 2/√(9-6* |s|+s^2) = 2/(3- |s|)

Damit kann über die Parameter s,t das Dreieck ABM, BCM, CDM oder DAM identifiziert werden:

t*(3- |s|)-2 < 0 und s > 0: ∆ABM

t*(3- |s|)-2 < 0 und s ≤ 0: ∆DAM

t*(3- |s|)-2 ≥ 0 und s > 0: ∆BCM

t*(3- |s|)-2 ≥ 0 und s ≤ 0: ∆CDM

Mit dem Richtungsvektor MS wird nun die jeweilige Seitenfläche im Punkt Y durchstoßen.

Durchstoßpunkt Y auf ∆ABS (s>0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(A-S) + v×(B-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(A-S) + v*(B-S) - w*(S-M) + S-X ergibt
[[3*v-3*s*t, 7-3*w-3*v-7*u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-11*v-9*u+t*(3-|s|)]]

solve({3*v-3*s*t=0, 7-3*w-3*v-7*u-6*t+2*t*|s|=0, 9-11*w-11*v-9*u+t*(3-|s|)=0}, {u,v,w})
ergibt {u=(2-t*(3-|s|))/2, v=s*t, w=t*(3-2*s-|s|)/2}

Y(s,t) = X + w×(S-M) = X + (t*(3-2*s- |s|)/2)×(S-M)

simplify(X + t*(3-2*s-|s|)/2*(S-M)) ergibt [[4+3*s*t, -3+t*(21-6*s-7*|s|)/2, 2+t*(27-22*s-9*|s|)/2]]

Somit Y = [[4+3*s*t, -3+(t*(21-13* |s|)/2, 2+t*(27-31* |s|)/2]]

Durchstoßpunkt Y auf △ADS (s<0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(D-S) + v×(A-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(D-S) + v*(A-S) - w*(S-M) + S-X ergibt
[[-3*u-3*s*t, 7-3*w-7*v-3*u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-9*v-11*u+t*(3-|s|)]]

solve({-3*v-3*s*t=0, 7-3*w-3*v-7*u-6*t+2*t*|s|=0, 9-11*w-11*v-9*u+t*(3-|s|)=0}, {u,v,w})
ergibt {u=(2-t*(3-|s|))/2, v=-s*t, w=t*(3+2*s-|s|)/2}

Y(s,t) = X + w×(S-M) = X + (t*(3+2*s- |s|)/2)×(S-M)

simplify(X+t*(3+2*s-|s|)/2*(S-M)) ergibt [[4+3*s*t, -3+t*(21+6*s-7*|s|)/2, 2+t*(27+22*s-9*|s|)/2]]

Somit Y = [[4 + 3*s*t, -3 + t*(21-13* |s|)/2, 2 + t*(27-31* |s|)/2]]

Durchstoßpunkt Y auf △BCS (s>0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(B-S) + v×(C-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(B-S) + v*(C-S) - w*(S-M) + S-X ergibt
[[3*u-3*s*t, 7-3*w-v-3*u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-12*v-11*u+t*(3-|s|)]]

solve({3*v-3*s*t=0,7-3*w-3*v-u-6*t+2*t*|s|=0,9-11*w-11*v-12*u+t*(3-|s|)=0},{u,v,w})
ergibt {u=-2+3*t-t*|s|, v=s*t, w=3-t*(3+s-|s|)}

Y(s,t) = X+w×(S-M) = X + (3-t*(3+s- |s|))×(S-M)

simplify(X+(3-t*(3+s-|s|))*(S-M)) ergibt [[4+3*s*t, 6-t*(3+3*s-|s|), 35-t*(36+11*s-12*|s|)]]

Somit Y = [[4+3*s*t, 6-t*(3+2* |s|), 35-t*(36- |s|)]]

Durchstoßpunkt Y auf △CDS (s<0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(C-S) + v×(D-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(C-S) + v*(D-S) - w*(S-M) + S-X ergibt
[[-3*v-3*s*t, 7-3*w-3*v-u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-11*v-12*u+t*(3-|s|)]]

solve({-3*v-3*s*t=0, 7-3*w-3*v-u-6*t+2*t*|s|=0, 9-11*w-11*v-12*u+t*(3-|s|)=0}, {u,v,w})
ergibt {u=-2+3*t-t*|s|, v=-s*t, w=3-t*(3-s-|s|)}

Y(s,t) = X+w×(S-M) = X + (3-t*(3-s- |s|))×(S-M)

simplify(X+(3-t*(3-s-|s|))*(S-M)) ergibt [[4+3*s*t, 6-t*(3-3*s-|s|), 35-t*(36-11*s-12*|s|)]]

Somit Y = [[4+3*s*t, 6-t*(3+2* |s|), 35-t*(36- |s|)]]

Zusammenfassend:

t*(3- |s|)-2 < 0: Y = [[4+3*s*t, -3+t*(21-13* |s|)/2, 2+t*(27-31* |s|)/2]]

t*(3- |s|)-2 ≥ 0: Y = [[4+3*s*t, 6-t*(3+2* |s|), 35-t*(36- |s|)]]

Die Fallunterscheidung wird im 3D-Formeleditor über die signum-Funktion realisiert.

ges. Nachweis, dass A, B, C und D in einer Ebene liegen

Lösung:

Wir berechnen das Spatvolumen, aufgespannt durch die Vektoren AB, AC und AD:

dotP(crossP(B-A,C-A),D-A) ergibt 0

Damit liegen die Vektoren AB, AC und AD in einer Ebene und somit auch die Punkte A, B, C und D.

ges. Nachweis, dass ABCD ein Drachenviereck ist

Lösung:

Aus den vorangehenden Betrachtungen folgt, dass ein ebenes konvexes Viereck vorliegt.
Wir betrachten die Seitenlängen und zeigen ‖AB‖ = ‖AD‖ und ‖BC‖ = ‖CD‖:

norm(B-A) ergibt 29^(1/2)
norm(D-A) ergibt 29^(1/2)
norm(B-C) ergibt 14^(1/2)
norm(D-C) ergibt 14^(1/2)

Damit haben die in A anliegenden Seiten die Länge √(14) und die in C anliegenden Seiten die Länge √(29). Somit liegt ein Drachenviereck vor.

ges. Flächeninhalt des Vierecks ABCD

Lösung:

Die Dreiecke ABC und ADC sind symmetrisch und haben jeweils den Flächeninhalt

1/2*norm(crossP(B-A,C-A)) ergibt 9*5^(1/2)/2
approx(9*5^(1/2)) ergibt 20.1246118

Damit beträgt der Flächeninhalt 9*√(5) = **20,1246 ≈ 20,1 Flächeneinheiten**.

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Flächeninhalt ∆ABS

Lösung:

1/2*norm(crossP(S-A,S-B)) ergibt 3670^(1/2)/2
approx(ans) ergibt 30.29026246

Der Flächeninhalt beträgt **30,29 Flächeneinheiten**.

ges. Nachweis, dass L(4|-1|1) der Höhenfußpunkt der Pyramide ABCDS ist

Lösung:

L liegt in der Ebene ABCD:

[[4,-1,1]] ⇒ L
dotP(crossP(B-A,C-A),L-A) ergibt 0

Damit liegt L in der Ebene ABCD.

Richtungsvektor LS und Normalenvektor zur Ebene ABCD sind parallel:

(S-L)/5 ergibt [[0,1,2]]
crossP(B-A,C-A)/9 ergibt [[0,1,2]]

Damit ist L der Fußpunkt von S in Richtung des Normalenvektors der Ebene ABCD.

ges. Volumen der Pyramide (1 Längeneinheit = 1mm)

Lösung:

V = (1/3) * Grundfläche * Höhe = (1/3)*9*√(5)*norm(S-L)

Rechnung im GTR(CAS):

1/3*9*5^(1/2)*norm(S-L) ergibt 75

Ergebnis: V = 75 mm^3

Kontrolle über das doppelte Tetraedervolumen = (1/6)*Spatvolumen*2
1/6*dotP(crossP(B-A,C-A),S-A)*2 ergibt 75

Pflichtaufgabe 2.3

geg. (Schnitt-)Ebene BDR mit R(1,5|0,75|3,25) und Kante AS schneiden sich in P

ges. Durchstoßpunkt P

Lösung:

Ebenengleichung X(s,t) = B + s*(R-B) + t*(D-B), s,t∈R,
Geradengleichung X(u) = A + u*(S-A), u∈R,

Ansatz für Schnittpunkt:

B+s*(R-B)+t*(D-B)=A+u*(S-A)

Lösung der Vektorgleichung:

s*(R-B) + t*(D-B) - u*(S-A) +(B-A) = Nullvektor

Rechnung im GTR(CAS):

[[1.5,0.75,3.25]] ⇒ R ergibt [[3/2,3/4,13/4]] s*(R-B) + t*(D-B) - u*(S-A) + B-A ergibt [[3-6*t-11*s/2, 4-7*u-s/4, -2-9*u+13*s/4]]

solve({3-6*t-11*s/2=0, 4-7*u-s/4=0, -2-9*u+13*s/4=0}, {s,t,u}) ergibt {s=2, t=-4/3, u=1/2}

A + u*(S-A)|u=1/2 ⇒ P ergibt [[4,1/2,13/2]]

P hat die Koordinaten **P(4|0,5|6,5).**

ges. Untersuchung der Form des Dreiecks BDP

Lösung:

norm(P-B) ergibt 206^(1/2)/2
norm(P-D) ergibt 206^(1/2)/2
norm(B-D) ergibt 6

Damit ist das Dreieck **gleichschenklig**: ‖BP‖ = ‖DP‖

Pflichtaufgabe 2.4

geg. Existenz von Schnittebenen, die das Volumen ABCDS halbieren.

ges. Beschreibung einer solchen Schnittebene (Begründung)

Lösung:

Die Ebene ACS halbiert das Pyramidenvolumen in zwei volumengleiche Tetraeder.
Beide Tetraeder haben die gleichen Grundflächen: ∆ABC bzw. ∆ADC
und die gleiche Höhe zum Punkt S.

Volumenkontrolle:

dotP(crossP(B-A,C-A),S-A)/6 ergibt 75/2
dotP(crossP(C-A,D-A),S-A)/6 ergibt 75/2

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A3 (Stochastik):

Pflichtaufgabe 3.1

geg. Erzeugnis (Taschenlampe) mit 8 LED und 1 Batterie ausgestattet.
Ereignisse:
A_k := {k-te LED ist defekt}, $P(A_k) = 0{,}01$, k = 1, 2, ..., 8,
B := {Batterie ist defekt}, P(B) = 0,02
C := {Erzeugnis fehlerfrei}

ges. P(C)

Lösung:

C = nichtA_1 ∩ nichtA_2 ∩ ... ∩ nichtA_8 ∩ nichtB
ergibt (Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse)
P(C) = 0,99^8×0,98 = 0.9043

Rechnung im GTR(CAS):

0.99^8*0.98 ergibt 0.9042898005

Antwort:
eine zufällig aus der Produktion entnommene Taschenlampe ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,9043 fehlerfrei.

Pflichtaufgabe 3.2

geg. Lieferung mit n=1000 Taschenlampen mit der Fehlerquote 7%

Teilaufgabe 3.2.1

ges. $\mu = E(S_n)$ und $\sigma = D(S_n)$, wobei S_n die zufällige Anzahl der fehlerhaften Erzeugnisse unter n untersuchten Erzeugnissen bezeichnet.

Lösung:
S_n entsteht über ein Bernoulli-Schema mit p = 1-P(C) = 0.07 und Stichprobenumfang n=1000
S_n ist binomialverteilt mit den Parametern p=0,07 und n=1000.
Somit $E(S_n) = n\times p = 70$ und $D(S_n) = \sqrt{(n\times p\times(1-p))} = \sqrt{(70\times 0.93)} = 8.0685 \approx 8.07$

Rechnung im GTR(CAS):

(70*0.93)^(1/2) ergibt 8.068457102

Teilaufgabe 3.2.2

geg. B(1000,0.07)-verteilte Grundgesamtheit. Es werden n=10 Lampen entnommen und geprüft.

ges. P(A), P(B) und P(C), wobei jetzt gilt
A := {genau 1 geprüfte Taschenlampe ist fehlerhaft}
B := {höchstens 2 geprüfte Lampen sind fehlerhaft}
C := {mindestens 3 und höchstens 6 geprüfte Lampen sind fehlerhaft}

Lösung:

P(A) = binomialPDf(1,10,0.07) = 0.3643 ≈ 0.364

P(B) = binomialCDf(2,10,0.07) = 0.9717 ≈ 0.972

$P(3\leq S_{10}\leq 6)$ = binomialCDf(6,10,0.07) - binomialCDf(2,10,0.07) = 0.0283 ≈ 0.028

Rechnung im GTR(CAS):

binomialPDf(1,10,0.07)	ergibt	0.3642877581
binomialCDf(2,10,0.07)	ergibt	0.9716578543
binomialCDf(6,10,0.07) - binomialCDf(2,10,0.07)	ergibt	0.02834132797

Teilaufgabe 3.2.3

geg. X = S_{10} (zufällige Anzahl der fehlerhaften Lampen unter 10 geprüften Lampen)

ges. Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

Lösung:

X ist eine diskrete Zufallsgröße mit eine B(10,0.07)-Verteilung (X entsteht über das Bernoulli-Schema)

Wertebereich von X ist {0, 1, 2, ..., 10}

p_k = P(X=k) = nCr(10,k)×0.07^k×0.93^(10-k), k = 0, 1, 2, ..., 10.

Rechnung im GTR(CAS):

seq(k,k,0,10,1) ⇒ listk ergibt {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

seq(nCr(10,k)*0.07^k*0.93^(10-k),k,0,10,1) ⇒ listp ergibt
{0.4839823072, 0.3642877581, 0.123387789, 0.02476600783, 3.262189204E-3,
2.946493475E-4, 1.848158989E-5, 7.949070922E-7, 2.243689373E-8,
3.752885451E-10, 2.82475249E-12}

augment(listToMat(listk),listToMat(ans)) ⇒ Verteilg ergibt

```
[[ 0,  0.4839823072    ],       gerundet:      [[ 0,  0.484 ],
 [ 1,  0.3642877581    ],                       [ 1,  0.364 ],
 [ 2,  0.123387789     ],                       [ 2,  0.123 ],
 [ 3,  0.02476600783   ],                       [ 3,  0.025 ],
 [ 4,  3.262189204E-3  ],                       [ 4,  0.003 ],
 [ 5,  2.946493475E-4  ],                       [ 5,  0.000 ],
 [ 6,  1.848158989E-5  ],                       [ 6,  0.000 ],
 [ 7,  7.949070922E-7  ],                       [ 7,  0.000 ],
 [ 8,  2.243689373E-8  ],                       [ 8,  0.000 ],
 [ 9,  3.752885451E-10],                        [ 9,  0.000 ],
 [10,  2.82475249E-12  ]]                       [10,  0.000 ]]
```

Die zuletzt erzeugte Matrix enthält die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

Kontrolle:
sum(listp) ergibt 1

Interpretation: Wegen der geringen Fehlerquote von 0.07=7% ist es unwahrscheinlich, sehr viele fehlerhafte Taschenlampen zu finden (verschwindend kleine Wahrscheinlichkeiten für große X-Werte). Sehr wenig fehlerhafte Lampen zu finden ist damit hochwahrscheinlich.

Pflichtaufgabe 3.3

geg. Lampen unterschiedlicher Hersteller mit schwankender Fehlerquote p

Teilaufgabe 3.3.1

geg. Fehlerquoten p_1 = 0,20 und p_2 = 0,40, Stichprobenumfang jeweils n=10

ges. P(B) = P({höchstens 2 geprüfte Lampen sind fehlerhaft})

Lösung:

Fall p_1 = 0,20 ergibt P(B) = binomialCDf(2,10,0.20) = 0.6778 ≈ 0.678
Fall p_2 = 0,40 ergibt P(B) = binomialCDf(2,10,0.40) = 0.1673 ≈ 0.167

Rechnung im GTR(CAS):

binomialCDf(2,10,0.2) ergibt 0.6777995264
binomialCDf(2,10,0.4) ergibt 0.1672897536

Teilaufgabe 3.3.2

geg. Fehlerquote p (als Parameter) und n=10

ges. Gleichung für P(B)

Lösung:

$P(B) = P(S_{10} \le 2) = P(S_1 = 0) + P(S_1 = 1) + P(S_1 = 2)$
= ∑(nCr(10,k)×p^k×(1-p)^(10-k),k,0,2)
= (1-p)^8×(36*p^2 + 8*p + 1)

Rechnung im GTR(CAS):

∑(nCr(10,k)*p^k*(1-p)^(10-k),k,0,2) ergibt (p-1)^10-10*p*(p-1)^9+45*p^2*(p-1)^8
simplify(ans/(1-p)^8) ergibt 36*p^2+8*p+1

ges. Definitionsbereich und Wertebereich f(p) = (1-p)^(8)×(36*p^(2)+8*p+1)

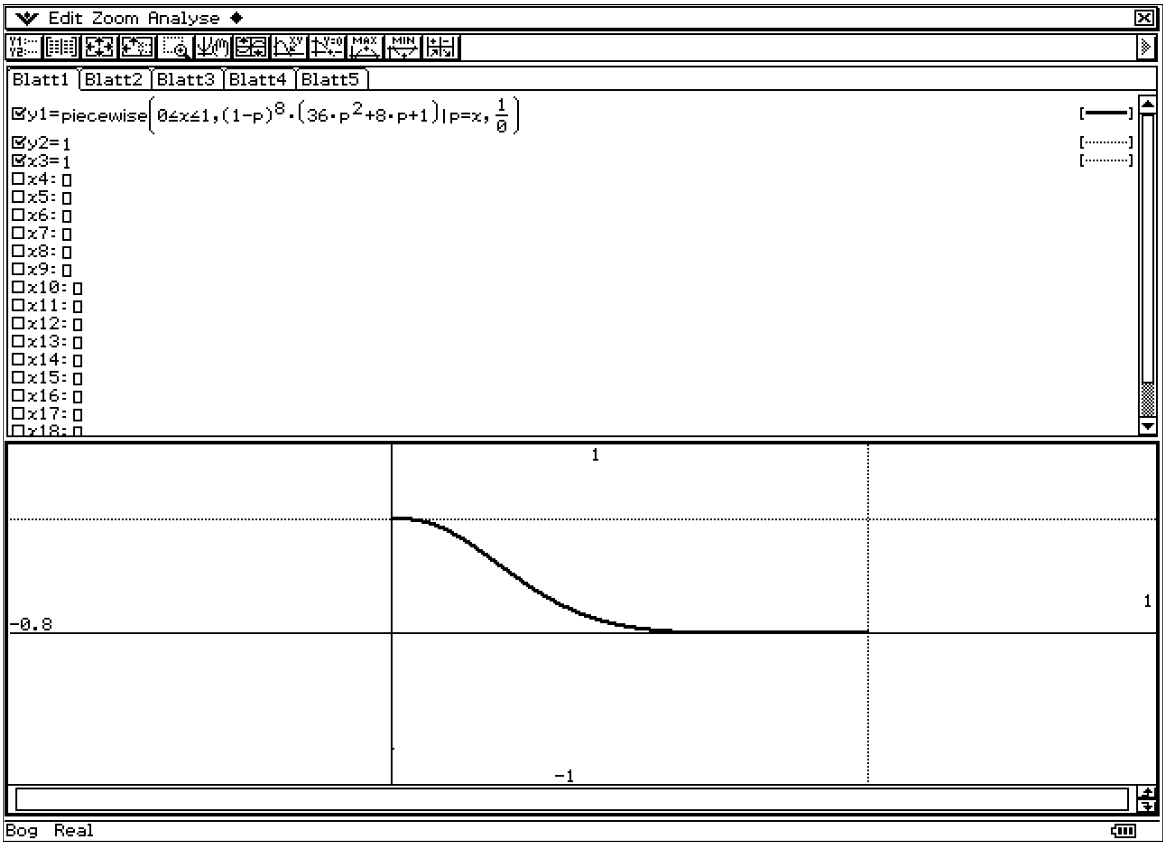
Lösung:

Definitionsbereich (im gegebenen Sachzusammenhang): $0 \le p \le 1$
Wertebereich (im gegebenen Sachzusammenhang): $0 \le f(p) \le 1$

ges. Graph der Funktion und Interpretation des bestehenden Zusammenhanges

Lösung:

Graph der Funktion:



Interpretation:
Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist für kleine Fehlerquoten p sehr groß und fällt mit zunehmendem p schnell auf das Nullniveau ab. Für große Fehlerquoten p ist damit P(B) sehr unwahrscheinlich.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (Wahlaufgaben B1, B2, B3)

Aufgabe B1 (Analysis):

Pflichtaufgabe 1.1

geg. Tabelle für 8 Planten mit v in km/s und r in 10^6 km,
hierbei v mittlere Bahngeschwindigkeit, r mittlere Sonnenentfernung

	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
r	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1427,0	2869,9	4496,7
v	47,80	35,03	29,79	24,13	13,06	9,64	6,81	5,43

Teilaufgabe 1.1.1

ges. näherungsweise Zusammenhang zwischen v und r (Regressionsfunktionen) in vier Varianten und Beurteilung derselben hinsichtlich Brauchbarkeit:

(1) $v = f_1(r)$ ... lineare Regression
(2) $v = f_2(r)$ ... exponentielle Regression
(3) $v = f_3(r)$ ... Potenz(Power)-Regression

Lösung:

Daten in Listen abspeichern:

{57.9,108.2,149.6,227.9,778.3,1427,2869.9,4496.7} ⇒ listr

{47.8,35.03,29.79,24.13,13.06,9.64,6.81,5.43} ⇒ listv

zu (1) ... lineare Regression

LinearReg listr, listv, 1, y1, On
done
Define $f_1(r) = y1(r)$
done

$f_1(r)$ ergibt -7.212628851E-3*r + 30.58116839

residual ⇒ list1 ergibt
{17.63644282, 5.229238049, 0.2878408833, -4.807410278, -11.90757936, -10.64874702, -3.071644853, 7.281859762}

zu (2) ... exponentielle Regression

ExpReg listr, listv, 1, y2, On
done
Define $f_2(r)$ = y2(r)
done
$f_2(r)$ ergibt 29.04792453/2.718281828^(4.453473066E-4*r)

simplify(2.718281828^(-4.453473066E-4)) ergibt 0.9995547518

residual ⇒ list2 ergibt
{19.49151941, 7.348606918, 2.614303059, -2.114393492, -7.479158349, -5.745668045, -1.281748195, 1.508972241}

zu (3) ... Potenz(Power)-Regression

PowerReg listr, listv, 1, y3, On
done
Define $f_3(r)$ = y3(r)
done
$f_3(r)$ ergibt 363.7798434/r^0.4997807554

residual ⇒ list3 ergibt
{-0.05042589234, 0.02170220377, 0.01514351031, 4.10730862E-3, 1.32886627E-3, -5.355421311E-3, 7.581170796E-3, -4.912441471E-3}

Ergebnis:

Die gesuchten Gleichungen lauten

$f_1(r)$ = -7.212628851E-3*r + 30.58116839 ≈ -0.007r + 30.58,

$f_2(r)$ = 29.04792453/2.718281828^(4.453473066E-4*r) ≈ 29.05×e^(0.0004r) ≈ 29.05×0.9996^r,

$f_3(r)$ = 363.7798434 / r^0.4997807554 ≈ 363.8×r^(-0.5) ≈ 364×√(1/r) .

Ein Blick auf die Residuen zeigt, dass die Potenzregression die beste Näherungsformel unter den drei zur Auswahl stehenden Formeln darstellt.
Der mittlere quadratische Fehler **sum(residual^2)/6** kann ebenfalls als Gütekriterium dienen:

sum(list1^2)/6 ergibt 113.2049725
sum(list2^2)/6 ergibt 89.68282993
sum(list3^2)/6 ergibt 5.620008017E-4

Für die Potenzregression ist dieser Fehler fast 0, d.h. hier liegt die beste Näherungsformel vor.
Die beiden anderen Funktionen scheiden wegen zu großer Residuen aus.

Teilaufgabe 1.1.2

geg. v = f(r) = 364/√(r) , r∈R, r>0.
ges. v = f(400)

Lösung:

Define f(r) = 364/√(r)

done

f(400) ergibt 18.2

Ergebnis: Die mittlere Bahngeschwindigkeit beträgt **18,2 km/s**.

geg. v = 4,74 km/s (Pluto)
ges. mittlere Sonnenentfernung

Lösung:

solve(4.74=f(r),r) ergibt {r=5897.203084}

Ergebnis: Die mittlere Sonnenentfernung beträgt **5897,2×10^6 km**.

Pflichtaufgabe 1.2

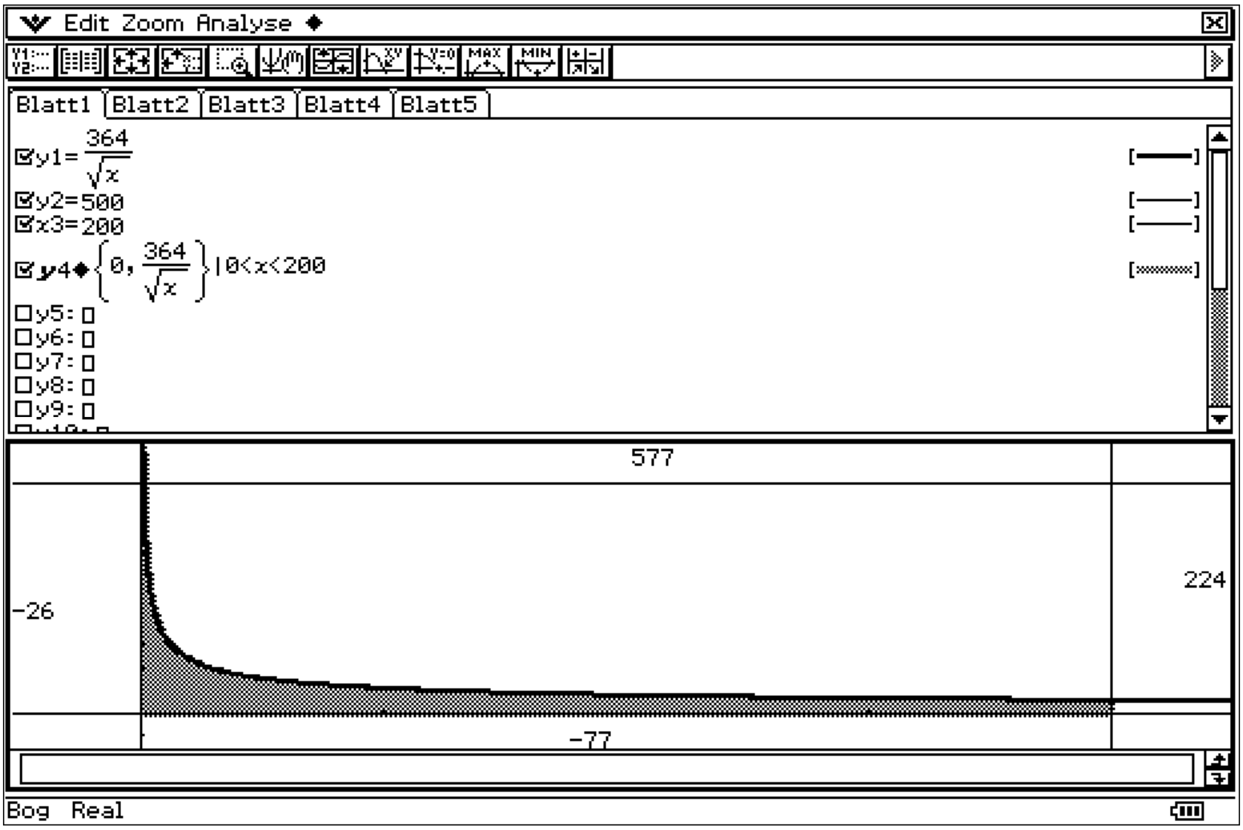
geg. f(x) = 364/√(x) , x∈R, x>0, und Flächen A_k
Dabei liegt A_k im 1. Quadranten und ist durch die Koordinatenachsen und die Geraden x = 200 sowie y = k begrenzt (k>0).

Teilaufgabe 1.2.1

ges. A_{500}

Lösung:

Skizze der Fläche A_{500}



Schnittpunkt f(x) = 364/√(x) = 500

solve(364/(x)^(1/2)=500,x)   ergibt   {x=0.529984}
0.529984 ® x_n
∫(500,x,0,x_n) + ∫(364/x^(1/2),x,x_n,200)   ergibt   10030.48273

Ergebnis: A_{500} ≈ 10030.5 Flächeneinheiten

ges. Untersuchung Grenzfall lim(Ak,k,∞)

Lösung:

solve(364/(x)^(1/2)=k,x)   ergibt   {x=132496/k^2}

132496/k^2 ⇒ x_n

∫(500,x,0,x_n)+∫(364/x^(1/2),x,x_n,200)   ergibt   (-264992)/|k|+66248000/k^2+7280*2^(1/2)

lim((-264992)/|k|+66248000/k^2+7280*2^(1/2), k, ∞)   ergibt   7280*2^(1/2)

approx(ans)   ergibt   10295.47473

Ergebnis: Die Fläche erreicht den Wert 20000 nicht.

Teilaufgabe 1.2.2

geg. Rotation von A_{500} um die x-Achse
ges. Rotationsvolumen V

Lösung:

x_n|k=500 ⇒ x_n ergibt   0.529984
∫(π*500^2,x,0,x_n) + ∫(π*(364/x^(1/2))^2,x,x_n,200) ⇒ V   ergibt   2885944.575

Ergebnis: Das Volumen beträgt 2 885 944,575 ≈ **$2{,}9\times10^6$** Volumeneinheiten.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

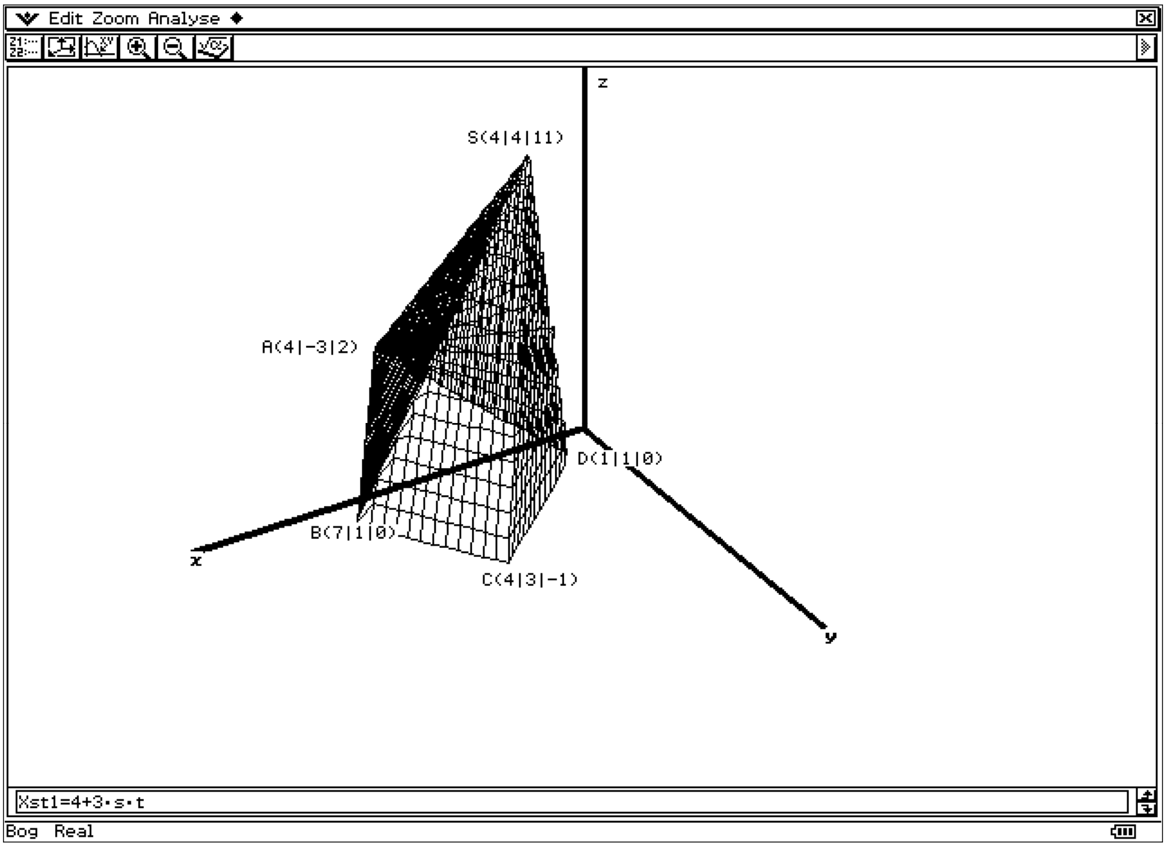
(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (Wahlaufgaben B1, B2, B3)

Aufgabe B2 (Analytische Geometrie):

geg. Pyramide ABCDS mit der Grundfläche ABCD und Spitze S, vgl. Skizze:
A(4|-3|2), B(7|1|0), C(4|3|-1), D(1|1|0) und S(4|4|11)
(kartesisches Koordinatensystem)

3D-Grafik der Pyramide:



Pflichtaufgabe 2.1

geg. Schnittebene BDP, wobei P Mittelpunkt der Seite AS ist
ges. Volumen eines Teilkörpers (z.B. Tetraeder ABDP)

Lösung:

[[4,-3,2]] ⇒ A [[7,1,0]] ⇒ B [[4,3,-1]] ⇒ C [[1,1,0]] ⇒ D [[4,4,11]] ⇒ S

(A+S)/2 ⇒ P ergibt [[4,0.5,6.5]]

V=dotP(crossP(B-A,D-A),P-A)/6 ergibt V=25

Das Tetraedervolumen zu ABDP beträgt 1/6 des Spatvolumens, d.h. **V = 25** Volumeneinheiten.

Der andere Teilkörper BCDPS besteht aus zwei Tetraedern mit dem Gesamtvolumen 50:

abs(dotP(crossP(S-B,S-D),S-P)/6) + abs(dotP(crossP(S-B,S-D),S-C)/6) ergibt **50 VE.**

Pflichtaufgabe 2.2

geg. Körperschnitte mit der Ebene BDP_k, wobei Pk = A+k×(S-A), 0≤k≤1, d.h. P_k liegt auf der Kante AS.
ges. Nachweis: Schnittdreieck BDP_k ist gleichschenklig, Überprüfung auf rechtwinklige oder gleichseitige Dreiecke BDP_k

Lösung:

A+k*(S-A) ⇒ Pk ergibt [[4,7*k-3,9*k+2]]
(norm(Pk-B))^2 ergibt 130*k^2-20*k+29
(norm(Pk-D))^2 ergibt 130*k^2-20*k+29

Somit haben BP_k und DP_k die gleichen Längen, d.h. es liegt für alle k ein gleichschenkliges Dreieck vor.

(norm(D-B))^2 ergibt 36
solve(130*k^2-20*k+29=36,k) ergibt {k=(-(1010)^(1/2))/130+1/13,k=(1010)^(1/2)/130+1/13}
approx(ans) ergibt {k=-0.1675422859,k=0.3213884397}

Somit liegt für k = √(1010)/130+1/13 = 0.3213884397 ≈ 0.32 ein gleichseitiges Dreieck vor.

dotP(Pk-B,Pk-D)=0	ergibt	(9*k+2)^2+(7*k-4)^2-9=0
solve((9*k+2)^2+(7*k-4)^2-9=0,k)	ergibt	No Solution
dotP(Pk-B,D-B)	ergibt	18
Pk-B	ergibt	[[-3,7*k-4,9*k+2]]
D-B	ergibt	[[-6,0,0]]

Rechte Winkel können nicht auftreten, da die betrachteten Skalarprodukte nicht 0 werden können.

ges. Flächeninhalt des Dreiecks BDP_k, Untersuchung, ob Mindestfläche 36 FE möglich ist.

Lösung:

Flächeninhalt = halber Parallelogramminhalt

norm(crossP(Pk-B,Pk-D))/2 ergibt 3*(10*(13*k^2-2*k+2))^(1/2)
fMax(3*(10*(13*k^2-2*k+2))^(1/2),k,0,1) ergibt {MaxValue=3*(130)^(1/2),k=1}

approx(ans) ergibt {MaxValue=34.20526275,k=1}

Der Mindestwert 36 wird nicht erreicht.

Pflichtaufgabe 2.3

ges. Existenz eines Umkreises für das Drachenviereck ABCD

Lösung:

Die Diagonalen haben die unterschiedlichen Längen 6 und 3*√(5):

norm(D-B) ergibt 6
norm(C-A) ergibt 3*5^(1/2)
approx(ans) ergibt 6.708203933

Die Diagonalen schneiden sich senkrecht:

dotP(D-B,C-A) ergibt 0

Damit können die Diagonalen nicht gleichzeitig Sehnen (Durchmesser) eines Umkreises sein, es sei denn, das Dreieck ABC hat über dem Durchmesser $\|AC\| = 6.7 > 6 = \|BD\|$ einen rechten Winkel $\angle ABC$ (Umkreis als Thaleskreis):

dotP(A-B,C-B) ergibt -1

Skalarprodukt ist nicht 0, d.h. $\angle ABC \neq 90°$.

Damit ist kein Umkreis möglich.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (Wahlaufgaben B1, B2, B3)

Aufgabe B3 (Stochastik):

Pflichtaufgabe 3.1

geg. Ausfallwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom erreichten Alter des Gerätes (Flachbildschirm):

Alter in Monaten	0 - 6	7 - 12	13 - 18	19 - 24
Ausfallwkt. in %	5,0	0,5	0,5	0,8

Die Frühausfälle (innerhalb der ersten 6 Monate) treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% auf.
Die Tabelle enthält bedingte Wahrscheinlichkeiten wie folgt:
Ist das Gerät nach 6 Monaten nicht ausgefallen, dann hat es die Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,5%.
Ist das Gerät nach 12 Monaten nicht ausgefallen, dann hat es die Ausfallwahrscheinlichkeit ebenfalls von 0,5%.
Ist das Gerät nach 18 Monaten nicht ausgefallen, dann hat es die Ausfallwahrscheinlichkeit von 0,8%.

Pflichtaufgabe 3.1

ges. Wahrscheinlichkeit des Nichtausfallens eines zufällig ausgewählten Gerätes innerhalb der ersten 12 Monate.

Lösung:

Es sei X das zufällige Alter des Gerätes und
A_k := {X>k} = {Gerät ist innerhalb von k Monaten nicht ausgefallen}, $k \in N$.

$P(A_{12}) = P(A_{12}|A_6)\times P(A_6) = 0.995\times 0.95 = 0.94525$

Antwort: Mit einer Wahrscheinlichkeit 0.94525 von überlebt das Gerät das erste Jahr.

Rechnung im GTR(CAS):

0.995*0.95 ergibt 0.94525

ges. Lieferumfang n=1000, Anzahl der zu erwartenden Ausfälle innerhalb der ersten 12 Monate

Lösung:

$p = 1 - P(A_{12}) = 1 - 0.94525 = \mathbf{0.05475}$
(Ausfallwahrscheinlichkeit eines Gerätes innerhalb der ersten 12 Monate)

S_n sei die zufällige Anzahl der zu Ausfälle, dann ist Sn B(n,p)-verteilt.

Hieraus $E(S_n) = n \times p = 1000 \times 0.05475 = 54{,}75 \approx 55$.

Antwort: im Mittel wird es 55 Geräteausfälle unter den 1000 betrachteten Geräten geben
(innerhalb der ersten 12 Monate)

ges. $P(Sn \leq 55)$ mit S_n B(1000,0.05475)-verteilt

Lösung:

$P(S_n \leq 55)$ = binomialCDf(55,1000,0.05475) = 0.549601938 ≈ 0.55 = **55%**

Antwort: mit einer Wahrscheinlichkeit von 55% werden nicht mehr als 55 Geräte ausfallen
(innerhalb der ersten 12 Monate)

Rechnung im GTR(CAS):

binomialCDf(55,1000,0.05475) ergibt 0.549601938

Pflichtaufgabe 3.2

geg. Garantieversprechen: kostenlose Garantieleistungen innerhalb der ersten 12 Monate,
kostenpflichtige Garantieverlängerung für die nächsten 12 Monate (das 2. Jahr)

Annahme (Schätzung des Käuferverhaltens):
300 von 1000 Kunden nutzen die kostenpflichtige Garantieverlängerung

Teilaufgabe 3.2.1

ges. Nachweis der Wahrscheinlichkeit 0,01225 eines Geräteausfalls im 2. Jahr

Lösung:

$P((\text{nicht}A_{24} \cup \text{nicht}A_{18}) \cap A_{12} \cap A_6) = P(\text{nicht}A_{24} \cap A_{18}) + P(\text{nicht}A_{18} \cap A_{12})$

$= P(\text{nicht}A_{24} \cap A_{18} \cap A_{12} \cap A_6) + P(\text{nicht}A_{18} \cap A_{12} \cap A_6)$
$= 0.008\times0.995\times0.995\times0.95 + 0.005\times0.995\times0.95$
$= 0.01225044 \approx 0.01225$

Rechnung im GTR(CAS):

8E-3*0.995*0.995*0.95+5E-3*0.995*0.95 ergibt 0.01225044

Teilaufgabe 3.2.2

geg. Kosten von 75€ für Garantiefall im 2. Jahr (Durchschnittswert)
Deckung der zu erwartenden Kosten mit den Einnahmen aus der Garantieverlängerung

ges. Preis x für Garantieverlängerung (den Kunde zu zahlen hat)

Lösung:

G := {Geräteausfall im 2. Jahr}, P(G) = 0.01225
S_n zufällige Anzahl der Geräteausfälle im 2. Jahr: S_n ist B(1000,0.01225)-verteilt,
somit zu erwartende Geräteausfälle im 2. Jahr: $E(S_n) = n\times P(G) = 12{,}25$

K := {Kunde hat Garantieverlängerung} mit P(K) = 300/1000 = 0,30
Hersteller hat im Mittel für 12,25×0,30 = 3,675 Geräte Kosten für Garantiefälle im 2. Jahr

Kostenrechnung: 3,675×75€ = 300x ergibt x = 3,675×75/300 = 0.91875 ≈ 0.92

Rechnung im GTR(CAS):

12.25*0.3 ergibt 3.675
3.675*75/300 ergibt 0.91875

Antwort: Die Garantieverlängerung sollte 0,92€ kosten.

Pflichtaufgabe 3.3

geg. M := {Gehäuse hat Materialfehler}, F := {Gehäuse hat Farbfehler}
M und F sind unabhängige Ereignisse,

d.h. $P(M\cap F) = P(M)\times P(F)$

Teilaufgabe 3.3.1

geg. P(M)=0,04 und P(F)=0,02

ges. $P(M\cap F)$

Lösung: $P(M\cap F) = (1-0.04)\times(1-0.02) = 0.96\times0.98 =$ **0.9408**

Rechnung im GTR(CAS):

0.96*0.98 ergibt 0.9408

Antwort: Das Gehäuse ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,9408 fehlerfrei.

Teilaufgabe 3.3.2

geg. $P(M \cap F) \geq 0.97$ (Behauptung eines Lieferanten)
Test mit Stichprobenumfang n=50
S_n zufällige Anzahl der fehlerhaften Gehäuse unter Nullhypothese H_0: $p=p_0=0.97$ und
H_a: $p<p_0$ (H_a Alternativhypothese, d.h. die Wahrscheinlichkeit $p_0=P(M \cap F)=0.97$ wird signifikant (also wesentlich) unterschritten)

ges. $E(S_n)$ unter H_0

Lösung:

S_n ist unter H_0 B(50,0.03)-verteilt, d.h. $E(S_n) = 50 \times 0.03 = 1{,}5$

geg. Entscheidungsregel für den Parametertest mit H_0: $p=p_0=0.97$ und H_a: $p<p_0$
lautet: Lieferung ablehnen, falls $S_n>3$, d.h. kritischer Bereich K* = [4,50]
A := {Fehler 1. Art} = $\{S_n \in K^*\} = \{S_n>3\}$

ges. P(A)

Lösung:

P(A) = 1-binomialCDf(3,50,0.03) = 0.06275992774 ≈ **0.063**

Rechnung im GTR(CAS):

1-binomialCDf(3,50,0.03) ergibt 0.06275992774

geg. Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ (Wkt. für den Fehler 1. Art)
ges. Entscheidungsregel (K* bzw. Nichtablehnungsbereich [0,50]\K* angeben)

Lösung:

Ansatz: $P(S_n \in K^*) = P(\{S_n>b\}) \leq \alpha = 0.05$, d.h. $P(\{S_n \leq b\}) \geq 1 - \alpha = 0.95$

Rechnung im GTR(CAS):

invBinomialCDf(0.95,50,0.03)⇒b ergibt 4

Damit gilt für den kritischen Bereich (Ablehnungsbereich) K* = [5,50] und
für den Nichtablehnungsbereich das Intervall [0,4].

Kontrolle:

binomialCDf(4,50,0.03) ergibt 0.9831893546
binomialCDf(3,50,0.03) ergibt 0.9372400723

d.h. würde man den ursprünglichen kritischen Bereich K* = [4,50] unverändert lassen, wäre die Irrtumswahrscheinlichkeit 0.05 überschritten. Mit dem kritischen Bereich K* = [5,50] wird die vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit eingehalten.

Entscheidungsregel (Signifikanzniveau 5%): **Nichtablehnung bei $S_n \leq 4$.**