Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2008

Mathematik

Aufgaben

Name, Vorname: ....

Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1-3 des Arbeitsblattes)

Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk und Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

1.2 Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung

$$h(x) = \frac{x^2 - 49}{x - 7} \text{ mit } x \in D_h.$$

Geben Sie die Nullstelle von h an.

1.3 Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = (x - 2)(x + 2) \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

- Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' von f.
- Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1.4 In den Abbildungen sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, der zugehörigen Ableitungsfunktion f′ und einer weiteren Funktion g dargestellt.

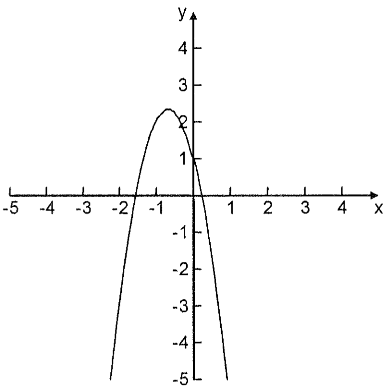


Abbildung 1

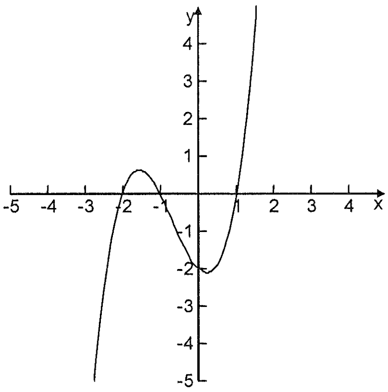


Abbildung 2

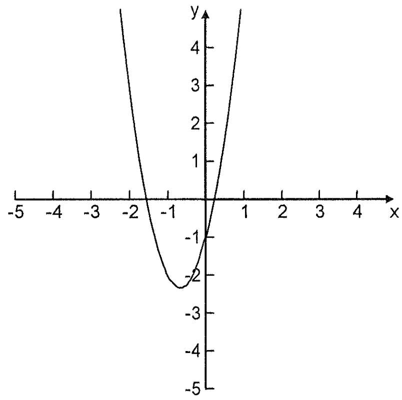


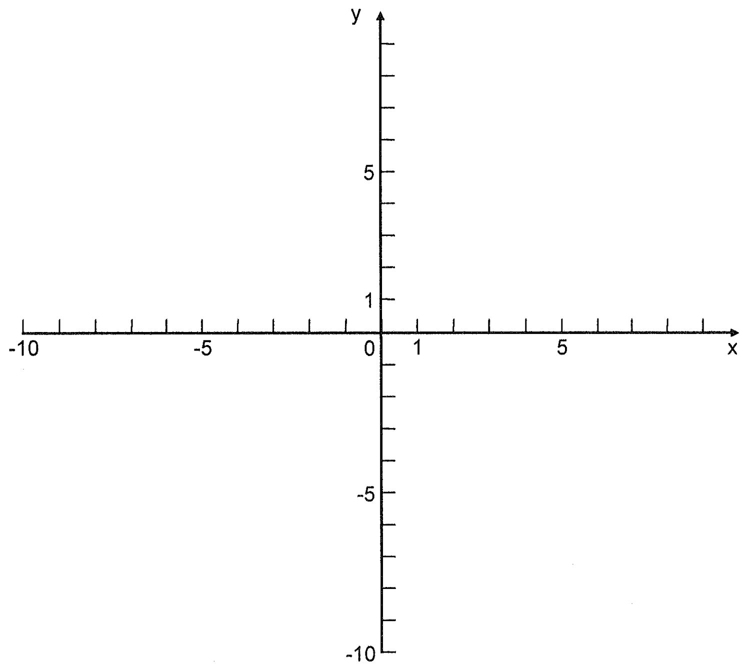
Abbildung 3

Ordnen Sie den Abbildungen die Funktionen f und f' zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.5 Gegeben ist eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- Eine Polstelle von f ist 2.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
- Eine Nullstelle von f ist -1.

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit diesen Eigenschaften.



2	**Analytische Geometrie**
	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD gegeben: A(4 | 1 | 2), B(2 | 3 | 2), C(2 | 1 | 4), D(4 | −1 | 4).
2.1	- Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm handelt. - Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist. - Ermitteln Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes.
2.2	Gegeben ist ein weiterer Punkt E(3 | 2 | 1). Untersuchen Sie, ob E auf der Viereckseite $\overline{AB}$ liegt.

3 Stochastik

Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her.
Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft sind.
An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5 %.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde am Montag produziert.
B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl: Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.
Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten.
Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen.

Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B. Von den Aufgaben B1, B2 und B3 ist **eine** auszuwählen.

Bearbeitungszeit: Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Grundkursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 255 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Hilfsmittel: Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Hinweis: Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.
Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges: Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.

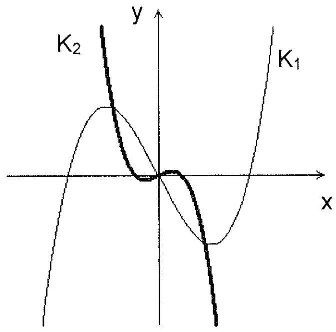
Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form werden entsprechend der geltenden Prüfungsbestimmungen gewertet.

A1 Analysis

1.1 Gegeben sind zwei Funktionen durch die Gleichungen

$$f_1(x) = \frac{1}{18}x^3 - 2x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = -\frac{2}{9}x^3 + 0{,}5x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$



Der Graph von f_1 ist K_1. Der Graph von f_2 ist K_2.

1.1.1 Untersuchen Sie den Graphen K_2 auf Symmetrie.

1.1.2 Die beiden Graphen K_1 und K_2 schließen für $x \geq 0$ eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

1.1.3 Gegeben sind die Punkte $Q(u \mid f_1(u))$ und $R(u \mid f_2(u))$ im Intervall $0 \leq u \leq 3, u \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Abstand der Punkte Q und R für u = 1.

Ermitteln Sie rechnerisch den Wert für u so, dass der Abstand zwischen den Punkten Q und R maximal wird.

1.2 Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$$f_a(x) = \frac{1}{12a}x^3 - ax \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a.

1.2.1 Weisen Sie nach, dass die Graphen G_2 und $G_{-\frac{1}{2}}$ im Koordinatenursprung senkrecht aufeinander stehen.

1.2.2 Für die folgenden Betrachtungen gilt a > 0.

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a und geben Sie die Art der Extrema an.

A2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4 \mid 1{,}5 \mid -3{,}5)$, $B(-1 \mid 1{,}5 \mid -3{,}5)$, $C(-1 \mid -1{,}5 \mid 0{,}5)$ und $D(4 \mid -1{,}5 \mid 0{,}5)$ gegeben.

2.1 Weisen Sie nach, dass alle vier Punkte in einer Ebene liegen.

2.2 Stellen Sie das Viereck ABCD in einem kartesischen Koordinatensystem dar. Zeigen Sie, dass dieses Viereck ein Quadrat ist.

2.3 ABCD sei die gemeinsame Grundfläche zweier gerader quadratischer Pyramiden mit den Spitzen S_1 und S_2 und der Höhe von je 5 LE.

2.3.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2.

2.3.2 Eine der beiden Spitzen hat nur positive Koordinaten.

Ergänzen Sie die grafische Darstellung der Grundfläche zu der Pyramide mit dieser Spitze.

2.4 Gegeben ist eine gerade Pyramide P mit der Spitze $S(1{,}5 \mid 4 \mid 1{,}5)$ und der quadratischen Grundfläche ABCD.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide P.

2.5 Die Punkte $P_t\,(4 - 5t \mid 1{,}5 \mid -3{,}5)$ liegen auf der Geraden durch A und B.

2.5.1 Berechnen Sie die Größe des Winkels DP_2C.

2.5.2 Zeigen Sie, dass für keinen Wert von t gilt: $\sphericalangle\, DP_tC = 90°$.

A3 Analytische Geometrie / Stochastik

3.1 Die geradlinigen Kurse zweier Flugzeuge werden in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Geraden k_1 und k_2 beschrieben.

k_1 verläuft durch den Punkt $P(-290 \mid 320 \mid 140)$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ -50 \end{pmatrix}$.

k_2 verläuft durch die Punkte $Q_1(-800 \mid 500 \mid -70)$ und $Q_2(200 \mid 0 \mid -70)$.
(1 LE $\hat{=}$ 1 km)

3.1.1 Zeichnen Sie die Geraden k_1 und k_2 in ein geeignetes Koordinatensystem.
Berechnen Sie die Entfernung von P nach Q_1.

3.1.2 Geben Sie für k_1 und k_2 je eine Geradengleichung an.
Ermitteln Sie die Lage der beiden Geraden zueinander.

3.1.3 Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 310 \\ 620 \\ -610 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ -30 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

die Geraden k_1 und k_2 senkrecht schneidet.

Ermitteln Sie den Abstand der Geraden k_1 von der Geraden k_2.

3.2 Eine Fluggesellschaft verwendet für eine bestimmte Strecke Flugzeuge mit 50 Plätzen. Die Flüge auf dieser Strecke sind vorab stets ausgebucht. Im Durchschnitt werden 10 % der gebuchten Plätze jedoch storniert und damit nicht belegt.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der nicht belegten Plätze je Flug an.
X ist annähernd binomialverteilt.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse für je einen Flug.

A: Genau 5 Plätze sind nicht belegt.

B: Höchstens 2 Plätze sind nicht belegt.

3.2.2 Um Flugzeuge auf dieser Strecke besser auszulasten, bietet eine Fluggesellschaft stets 4 % mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Damit geht das Unternehmen das Risiko der Überbuchung ein. Für ein Flugticket nimmt die Fluggesellschaft 120 €. Bei Stornierung zahlt der Fluggast 60 €. Bei Abweisung eines Fluggastes wegen Überbuchung entstehen der Fluggesellschaft Kosten von 500 €.

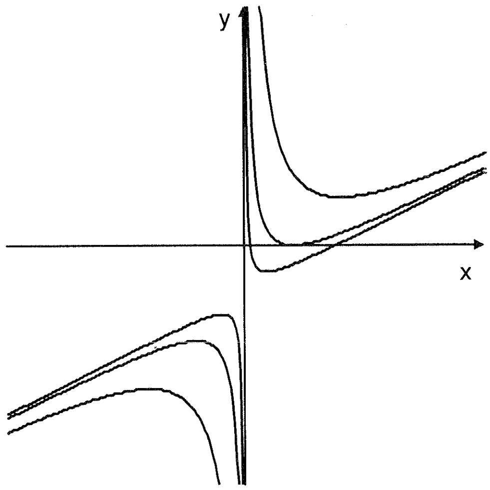
Berechen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Fluggäste wegen Überbuchung nicht mitfliegen können.
Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft für einen Flug, wenn 51 Fluggäste den Flug antreten möchten?

B1 Analysis

Gegeben ist eine Funktionenschar durch die Gleichung

$$f_k(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{k \cdot x} - 1 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ k \in \mathbb{R},\ k > 0\,.$$

G_k sind die zu f_k gehörenden Graphen (siehe Abbildung).



1.1 Berechnen Sie in Abhängigkeit von k:

- die Anzahl der Nullstellen von f_k,
- die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von G_k.

1.2 Geben Sie je eine Gleichung für die beiden Asymptoten von G_k an.

1.3 Errechnen Sie den Inhalt der von $G_{\frac{16}{3}}$ und der x-Achse vollständig begrenzten Fläche.

1.4 Berechnen Sie, für welche x-Werte die Differenz der Funktionswerte von $f_{\frac{16}{3}}$ und der Funktion $y = \frac{x}{2} - 1$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

1.5 An der Stelle x_k wird die Tangente an den Graphen G_k gelegt.
Ermitteln Sie x_k in Abhängigkeit von k so, dass die Tangente durch den Koordinatenursprung verläuft.

B2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

$A_u(-2\,|\,-4u\,|\,1), B_u(2u\,|\,-4\,|\,4)$ mit $u \in \mathbb{R}$ und $C(4\,|\,0\,|\,4)$

und eine Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die Ebene ε_u enthält die Punkte A_u, B_u und C.

2.1 Zeigen Sie, dass die Gerade g in den Ebenen ε_3 und ε_{-1} liegt.

2.2 Gegeben sind die Punkte $D_t(t\,|\,t^2\,|\,4)$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Genau zwei dieser Punkte liegen in der Ebene ε_3.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Im Intervall [−4; 2] gibt es einen Wert von t, für den der Abstand des Punktes D_t zur Ebene ε_3 maximal wird.
Berechnen Sie diesen Wert von t.

2.3 Die Punkte $P_1(4\,|\,0\,|\,-6)$ und $P_2(4\,|\,-6\,|\,-3)$ sind benachbarte Eckpunkte eines Rechtecks. Die beiden anderen Punkte liegen auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung.

Berechnen Sie den Umfang des Rechtecks.

2.4 Überprüfen Sie folgende Aussage:

Die Vektoren $\overrightarrow{CA_u}$ und $\overrightarrow{CB_u}$ sind linear abhängig.

B3 Stochastik

Eine Firma produziert Staubsauger eines bestimmten Typs. Die Qualitätskontrolle eines Gerätes besteht aus der Prüfung seiner mechanischen Belastbarkeit und seiner Saugleistung. Die Resultate beider Prüfungen sind unabhängig voneinander.

3.1 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Staubsauger dieses Typs

- den mechanischen Belastungstest nicht besteht, beträgt 5,5 %,
- den Saugleistungstest besteht, beträgt 90 %.

Veranschaulichen Sie den Vorgang „Qualitätskontrolle" in einem Baumdiagramm.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

A: Ein Staubsauger besteht beide Tests.
B: Ein Staubsauger besteht genau einen Test

3.2 Staubsauger, die beide Tests bestehen, besitzen die Qualität I.
Ihre Anzahl ist annähernd binomialverteilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Staubsauger die Qualität I besitzt, wird im Folgenden als Erfolgsquote bezeichnet.

3.2.1 Die Erfolgsquote beträgt p = 85 %. Es werden 50 Staubsauger getestet.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Staubsauger, die die Qualität I besitzen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 40 aber weniger als 45 Staubsauger die Qualität I haben.
Ermitteln Sie die minimale Zahl $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$, sodass die Wahrscheinlichkeit, mindestens k Staubsauger von der Qualität I zu erhalten, größer als 97 % ist.

3.2.2 Die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle 50 Staubsauger die Qualität I besitzen, sei 99 %.
Ermitteln Sie für diesen Fall die Erfolgsquote p.

3.2.3 Bestimmen Sie rechnerisch die Anzahl n der zu kontrollierenden Staubsauger, damit bei einer Erfolgsquote von p = 99 % die Wahrscheinlichkeit, dass alle Qualität I haben, rund 80 % beträgt.

3.3 Ein Großhändler für Staubsauger hat den Verdacht, dass mehr als 10 % der mit Qualität I ausgewiesenen Staubsauger dieser nicht genügen.
In einem Test wird dieser Verdacht an 50 Staubsaugern überprüft.

3.3.1 Beschreiben Sie an diesem Beispiel den Begriff Fehler 1. Art.

3.3.2 Wie wird auf Grund der Stichprobe entschieden, wenn 10 der überprüften Staubsauger der Qualität I nicht genügen?
Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 2 %.

Hinweis: Tabellen der Binomialverteilung auf Seite 9

Binomialverteilung und summierte Binomialverteilung:

n	k	p = 0,85: $B(n;p;k)$	p = 0,85: $\sum_{i=0}^{k} B(n;p;i)$
50	28		
	29		
	30	0,00001	0,00002
	31	0,00004	0,00006
	32	0,00015	0,00021
	33	0,00045	0,00066
	34	0,00129	0,00195
	35	0,00334	0,00529
	36	0,00788	0,01317
	37	0,01689	0,03006
	38	0,03275	0,06281
	39	0,05711	0,11992
	40	0,08899	0,20891
	41	0,12299	0,33190
	42	0,14935	0,48125
	43	0,15745	0,63870
	44	0,14195	0,78065
	45	0,10725	0,88789
	46	0,06606	0,95395
	47	0,03186	0,98581
	48	0,01128	0,99709
	49	0,00261	0,99970
	50	0,00030	1,00000

Summierte Binomialverteilung:

n = 50, p = 0,1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_{n;p}(k)$	0,00515	0,03379	0,11173	0,25029	0,43120	0,61612	0,77023	0,87785	0,94213

k	9	10	11	12	13	14	15	16
$F_{n;p}(k)$	0,97546	0,99065	0,99678	0,99900	0,99971	0,99993	0,99998	1

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1 (Analysis):

Pflichtaufgabe 1.1

geg. Funktion y = f(x) = (1/2)*x^3 - 3x^2 + 5, x∈R.

ges. Koordinaten des Wendepunktes von f

Lösung:
zweite Ableitung auf Null setzen:
y' = (3/2)*x^2 - 3×2x, y'' = 3x - 6 = 0
ergibt
3x = 6, d.h. **x = 2**.

Die 3. Ableitung ist verschieden von 0, d.h. **W(2;f(2)) mit f(2) = -3** ist der gesuchte Wendepunkt.

Nebenrechnung: f(2) = (1/2)×2^3-3×2^2+5 = 4 - 12 + 5 = -3

Kontrolle im GTR(CAS):
Define f(x) = ((1)/(2))x^(3)-3x^(2)+5
done
diff(f(x),x,2)=0 ergibt -6+3*x=0
solve(ans,x) ergibt {x=2}
f(2) ergibt -3

Pflichtaufgabe 1.2

geg. h(x) = (x^2 - 49) / (x - 7) mit x∈D(h)

ges. Nullstelle von h

Lösung:
x=7 ist eine Definitionslücke und kommt als Nullstelle nicht in Frage.
x=-7 ist die gesuchte Nullstelle.

Kontrolle im GTR(CAS):
Define h(x) = (x^2-49)/(x-7)
done
solve(h(x)=0,x) ergibt {x=-7}

Pflichtaufgabe 1.3

geg. f(x) = (x-2)(x+2), x∈R.

ges. Ableitung f'(x) und Integral ∫(f(x),x,0,1)

Lösung:

f(x) = x^(2)-4 (3. binomische Formel)

f'(x) = 2*x

und

∫(f(x),x,0,1) = ∫((x^2-4),x,0,1)
= ((1/3)x^3-4x)|x=1 - ((1/3)x^3-4x)|x=0 = 1/3-4 = -11/3

Kontrolle im GTR(CAS):

Define f(x) = (x-2)(x+2)
done
diff(f(x),x,1) ergibt 2*x
∫(f(x),x,0,1) ergibt -11/3

Pflichtaufgabe 1.4

geg. drei Schaubilder einer ganzrationalen Funktion f,
deren Ableitung f' und eine weitere Funktion g

Graphen zu f, f' und g:

Es gilt: Nullstellen der ersten Ableitung weisen auf Extremstellen der Ausgangsfunktion hin. Der mittlere Graph hat zwei Extrempunkte, d.h. Abb. 2 beschreibt f und Abb. 1 oder Abb. 3 sind die Ableitung. Der erste Extrempunkt ist ein Minimum, links von x_{min} ist der Anstieg positiv, rechts davon negativ. Somit ist Abb. 3 die Ableitung f' und Abb. 1 damit g = –f' (f' gespiegelt).

Beispiele für f, f' und g:

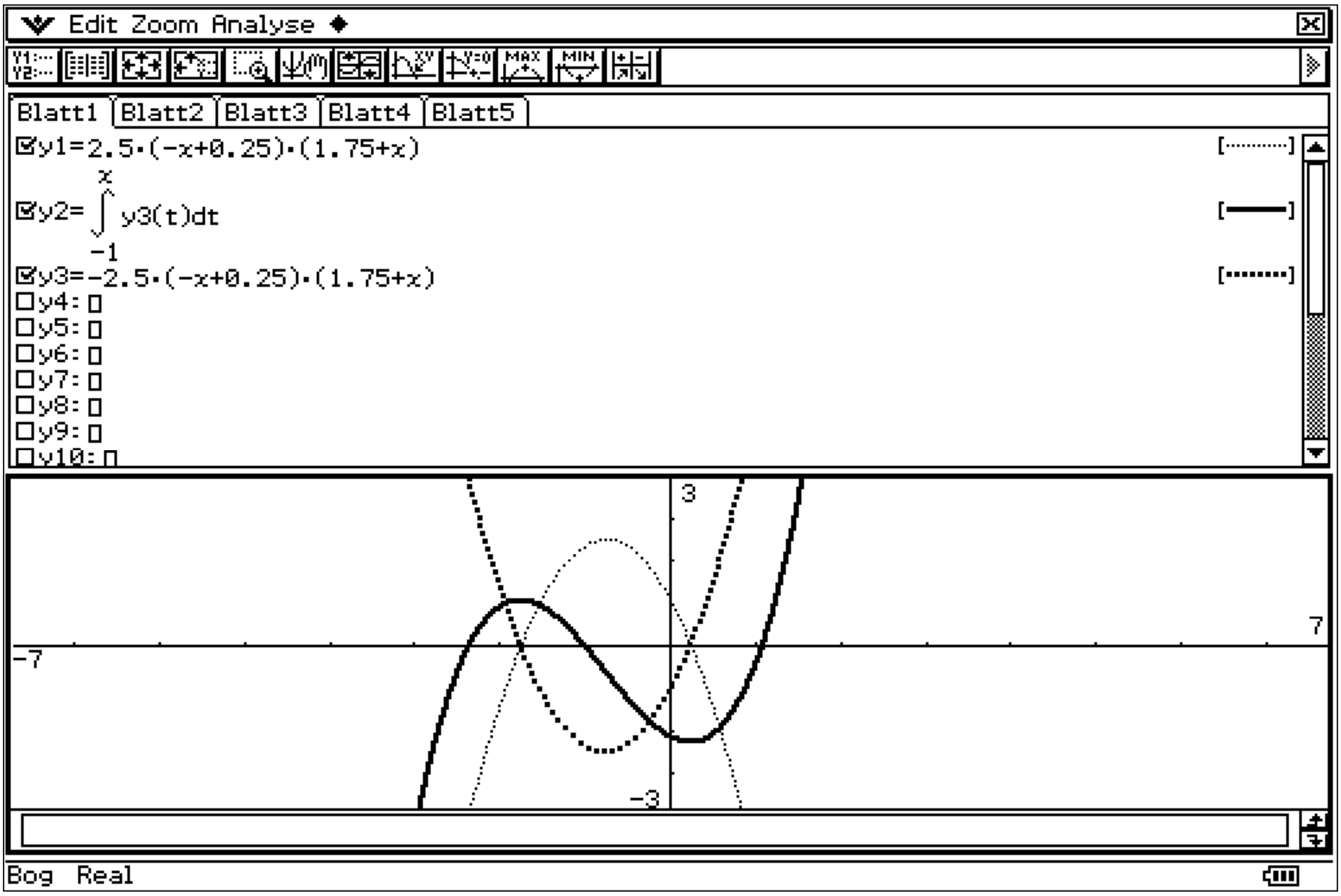


Abb. 1: g(x) = 2.5*(-x+0.25)*(1.75+x)

Abb. 2: f(x) = ∫(f'(x),x,-1,x) = ∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x)
= 5*x^3/6 + 15*x^2/8 - 35*x/32 - 205/96

Abb. 3: f'(x) = -2.5*(-x+0.25)*(1.75+x)

Rechnung im GTR(CAS):

∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x) ergibt 5*x^3/6+15*x^2/8-35*x/32-205/96

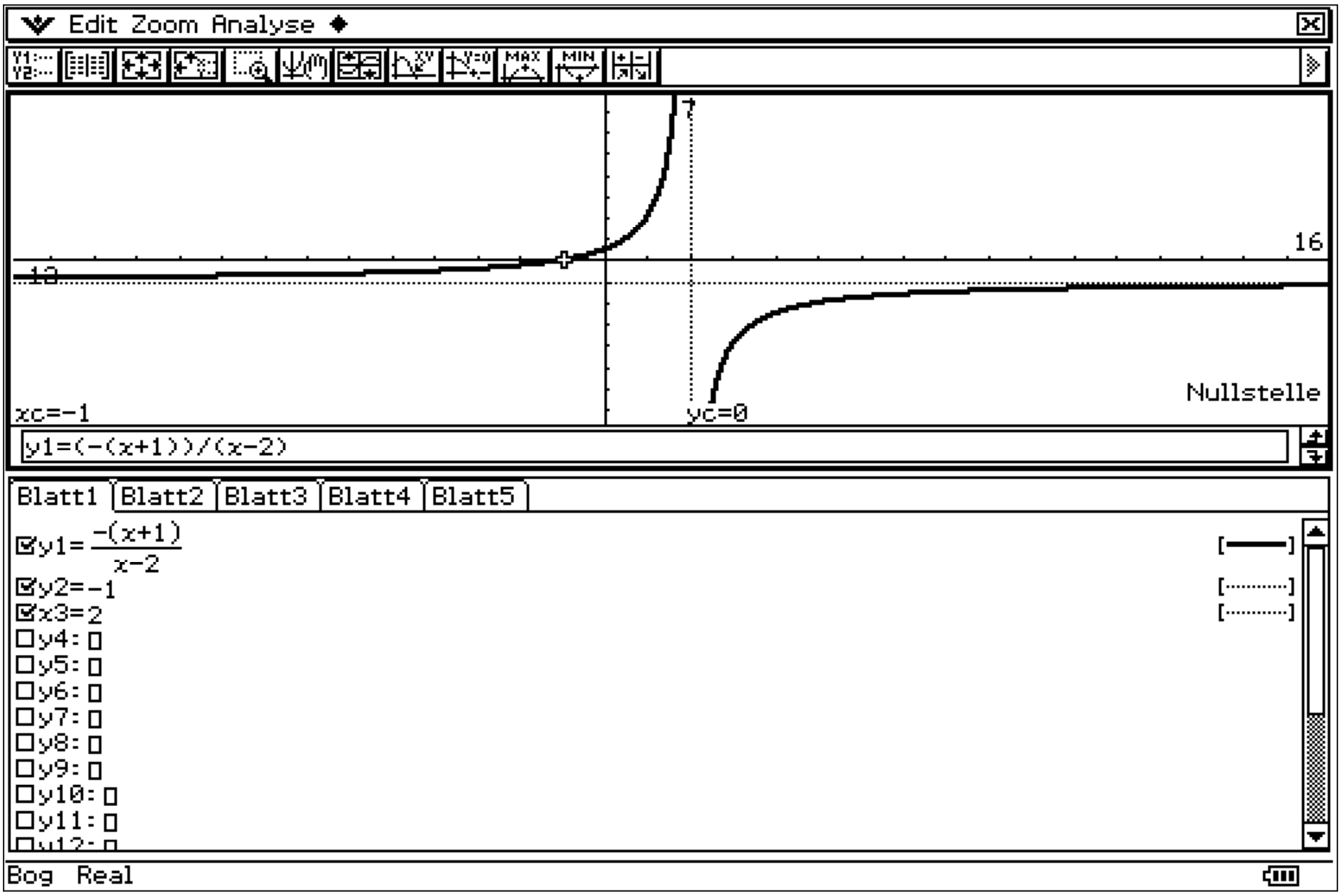
Pflichtaufgabe 1.5

geg. Funktion f mit drei Eigenschaften:
- Polstelle ist x=2
- Nullstelle ist x=-1
- Grenzwert ist lim(f(x),x,∞)= -1

ges. Skizze zu f (eine mögliche Lösung)

Lösung:

Skizze zu f



eine analytische Lösung: f(x) = - (x+1)/(x-2)

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 2 (Analytische Geometrie):

geg. ebenes Viereck ABCD im kartesischen Koordinatensystem mit
A(4|1|2), B(2|3|2), C(2|1|4), D(4|-1|4)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Parallelogramms

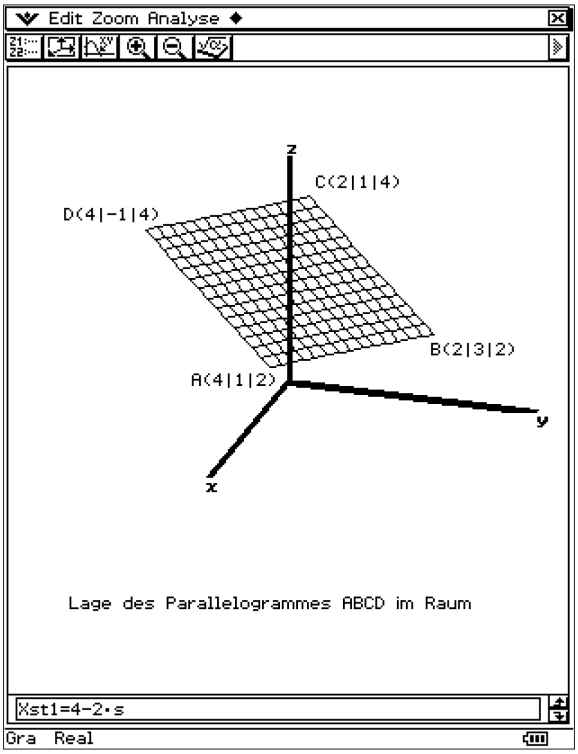
Lösung:

Seitenlängen (Normen der Vektoren zwischen zwei Punkten)
||AB|| = ||B-A|| = √((-2)^2+2^2+0^2) = √(8), AB liegt in Höhe z=2,
||BC|| = ||C-B|| = √(0^2+(-2)^2+2^2) = √(8),
||CD|| = ||D-C|| = √(2^2+(-2)^2+0^2) = √(8), CD liegt in Höhe z=4,
||DA|| = ||A-D|| = √(0^2+2^2+(-2)^2) = √(8).

AB und CD sind parallel und von gleicher Länge, damit sind es wegen der gleichen Seitenlängen auch BC und DA.

Es liegt ein Parallelogramm vor.

(Die Untersuchung zweier paralleler Seiten ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)



ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Rechteckes

Lösung:

Winkel: Skalarprodukte der normierten Vektoren betrachten

cos(∡DAB) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[0],[-2],[2]]▫[[-2],[2],[0]] = ((-4)/(8)) = ((-1)/(2)) ≠ 0

cos(∡ABC) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[2],[-2],[0]]▫[[0],[-2],[2]] = ((4)/(8)) = ((1)/(2)) ≠ 0

cos(∡BCD) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[0],[2],[-2]]▫[[2],[-2],[0]] = ((-4)/(8)) = ((-1)/(2)) ≠ 0

cos(∡CDA) = ((1)/(√(8)×√(8)))×[[-2],[2],[0]]▫[[0],[2],[-2]] = ((4)/(8)) = ((1)/(2)) ≠ 0

Damit liegen keine rechten Winkel vor.
(Die Untersuchung eines Winkels ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)

Kontrolle im GTR(CAS):

[[4,1,2]] ⇒ A [[2,3,2]] ⇒ B [[2,1,4]] ⇒ C [[4,-1,4]] ⇒ D

norm(B-A)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(C-B)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(D-C)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(A-D)	ergibt	2*2^(1/2)
dotP(D-A,B-A)/8	ergibt	-1/2
dotP(A-B,C-B)/8	ergibt	1/2
dotP(B-C,D-C)/8	ergibt	-1/2
dotP(C-D,A-D)/8	ergibt	1/2

ges. Koordinaten des Diagonalschnittpunktes S:

Lösung:

S = A + AC/2 = A + (C-A)/2 = [[4],[1],[2]] + (1/2) × [[-2],[0],[2]] = [[3],[1],[3]]

Kontrolle im GTR(CAS):

A+(C-A)/2 ergibt [[3,1,3]]

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Lage des Punktes E(3|2|1) zur Seite AB

Lösung:

Geradengleichung für Seite AB ist x(t) = A + t×(B-A), 0≤t>1,

Untersuchung der Gleichung E = A + t×(B-A) bzw. E - A = t×(B-A), d.h.

[[3-4],[2-1],[1-2]] = t×[[2-4],[3-1],[2-2]] und zusammengefasst [[-1],[1],[-1]] = t×[[2],[2],[0]] .

Es gibt keine Lösung für t (Die Vektoren AB und AE sind linear unabhängig.),
d.h. E liegt nicht auf AB.

Andere (anschauliche) Lösung:

Die Seite AB liegt in Höhe z=2 und Punkt E liegt tiefer: z=1. Damit kann E nicht auf AB liegen.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 3 (Stochastik):

geg. Fehlerquote in der Produktion bei gleichem Produktionsumfang an allen Wochentagen (Mo bis Fr):

M_k = {Produkt am k-ten Wochentag hergestellt} mit $P(M_k) = 1/5 = 0{,}2$ für k=1,2,3,4,5.

C = {Produkt fehlerhaft}

$P(C|M_k) = 0{,}10$ und $P(C|M_k) = 0{,}05$ für k>1.

ges. Wahrscheinlichkeiten für

$A = M_k \cap \text{nicht}C$ sowie $B = \text{nicht}C$

Lösung:

Es gilt: $P(M_k) = P(M_k \cap \text{nicht}C) + P(M_k \cap C)$, d.h.

$P(A) = P(M_k \cap \text{nicht}C) = P(M_k) - P(M_k \cap C) = P(M_k) - P(C|M_k) \times P(M_k)$, d.h.

P(A) = 0,20 - 0,10×0,20 = 0,20 - 0,02 = **0,18** = 9/50 .

Weiter:

$P(C) = \sum(P(C|M_k) \times P(M_k),k,1,5)$ (Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)
= (1/5)×(0,10 + 4×0,05) = (1/5)×0,30 = 0,06.

Hieraus folgt **P(B) = P(nichtC) = 0,94** = 47/50 .

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A1 (Analysis):

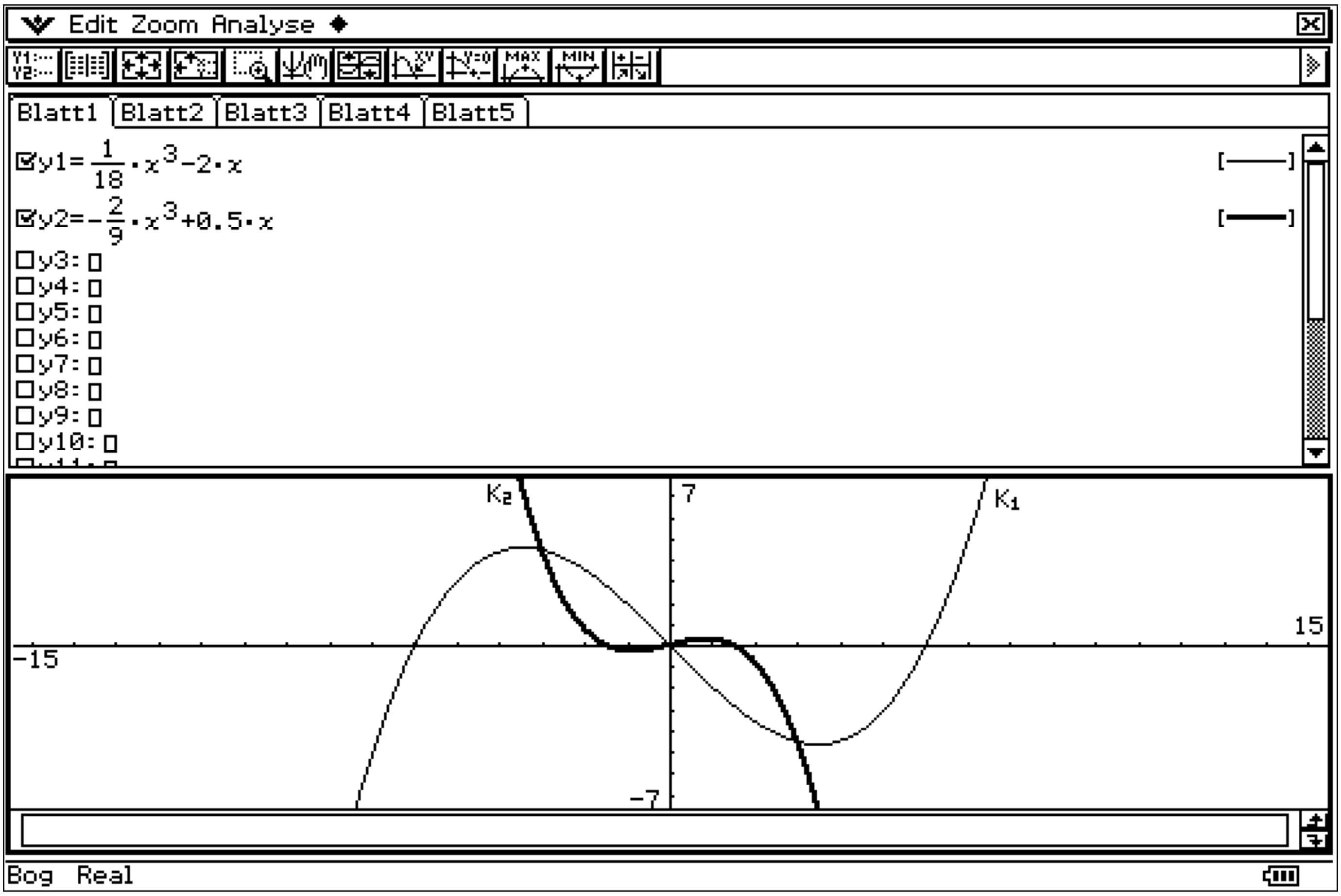
Pflichtaufgabe 1.1

geg. zwei Funktionen f_1 und f_2:

$f_1(x) = (1/18)x^3 - 2x$, $x \in R$, $f_2(x) = -(2/9)x^3 + 0,5x$, $x \in R$,

K_1 ist der Graph von f_1, K_2 ist der Graph von f_2

Schaubilder der Funktionen:



Teilaufgabe 1.1.1

ges. Symmetrieeigenschaft von K_2

Lösung:

f_2 enthält nur ungerade Potenzen und ist damit eine ungerade Funktion, d.h.

$f_2(x) = -f_2(-x)$ bzw. -(2/9)x^3 + 0,5x = -(-(2/9)(-x)^3 + 0,5(-x))

Der Graph spiegelt sich am Koordinatenursprung.

Kontrolle im GTR(CAS):

judge(-2/9*x^3+0.5*x = -(-2/9*(-x)^3 + 0.5*(-x)))

TRUE

Teilaufgabe 1.1.2

geg. Fläche zwischen K_1 und K_2 für x≥0
ges. Flächeninhalt

Lösung:

Integralansatz:

∫((f₂(x)-f₁(x)),x,0,x_s), wobei x_s>0 die Schnittstelle der Graphen bezeichnet:

$f_2(x_s)-f_1(x_s) = 0$, d.h. -(2/9)x_s^3+0,5x_s - ((1/18)x_s^3-2x_s) = 0.

Hieraus: -(5/18)x_s^3 + 2,5x_s = 0 | :x_s (x_s>0)
und

-(5/18)x_s^2 + 2,5 = 0, d.h. x_s^2 = (5/2)×(18/5) = 9 und somit x_s = 3

Integration:

∫((-(5/18)x^3 + 2,5x),x,0,3)
= (-(5/(18×4))x^4 + (5/4)x^2))|x=3 - (- (5/(18×4))x^4 + (5/4)x^2)|x=0

= -(5/(18×4))3^4 + (5/4)3^2 = (45/4)×(-(1/2)+1) = 45/8

Der Flächeninhalt beträgt 45/8 Flächeneinheiten.

Kontrolle im GTR(CAS):

solve(-2/9*xs^3+0.5*xs-(1/18*xs^3-2*xs)=0,xs)	ergibt	{xs=-3,xs=0,xs=3}
simplify(-2/9*x^3+0.5*x-(1/18*x^3-2*x))	ergibt	(-5*(x^3-9*x))/18
∫((-5*(x^3-9*x))/18,x,0,3)	ergibt	45/8

Teilaufgabe 1.1.3

geg. Punkte Q(u | f_1(u)), R(u | f_2(u)) mit 0≤u≤3, u∈R.

ges. Abstand QR für u=1

Lösung:

‖QR‖ = f_2(u)-f_1(u) = ((-5/18)u^3 + 2,5u)|u=1 = -5/18 + 5/2 = 20/9

Kontrolle im GTR(CAS):

-5/18*u^3+2.5*u|u=1 ergibt 20/9

ges. Maximalabstand

Lösung:

Ansatz: f(u) = -(5/18)u^3 + 2.5u → max

f'(u) = -(5/6)u^2 + 2.5 = 0 ergibt u^2 = 3 bzw. u_m = √(3) in betrachteten Intervall.

um ist Maximumstelle, da f'(u_m)>0 für u<u_m und f'(u_m)<0 für u>u_m gilt.

(bzw. f''(u)<0 für u=u_m, d.h. f ist konkav)

Die Maximumstelle hat den Wert u_m = √(3).

Kontrolle im GTR(CAS):

fMax(-5/18*u^3+2.5*u,u,0,3) ergibt {MaxValue=5*3^(1/2)/3,u=3^(1/2)}

Pflichtaufgabe 1.2

geg. Funktionenschar f_a(x) = (1/(12a))x^3 - ax, x∈R, a∈R.

Die zugehörige Kurvenschar sei G_a .

Teilaufgabe 1.2.1

ges. Nachweis, dass G_2 und $G_{-1/2}$ in O(0|0) senkrecht aufeinander stehen.

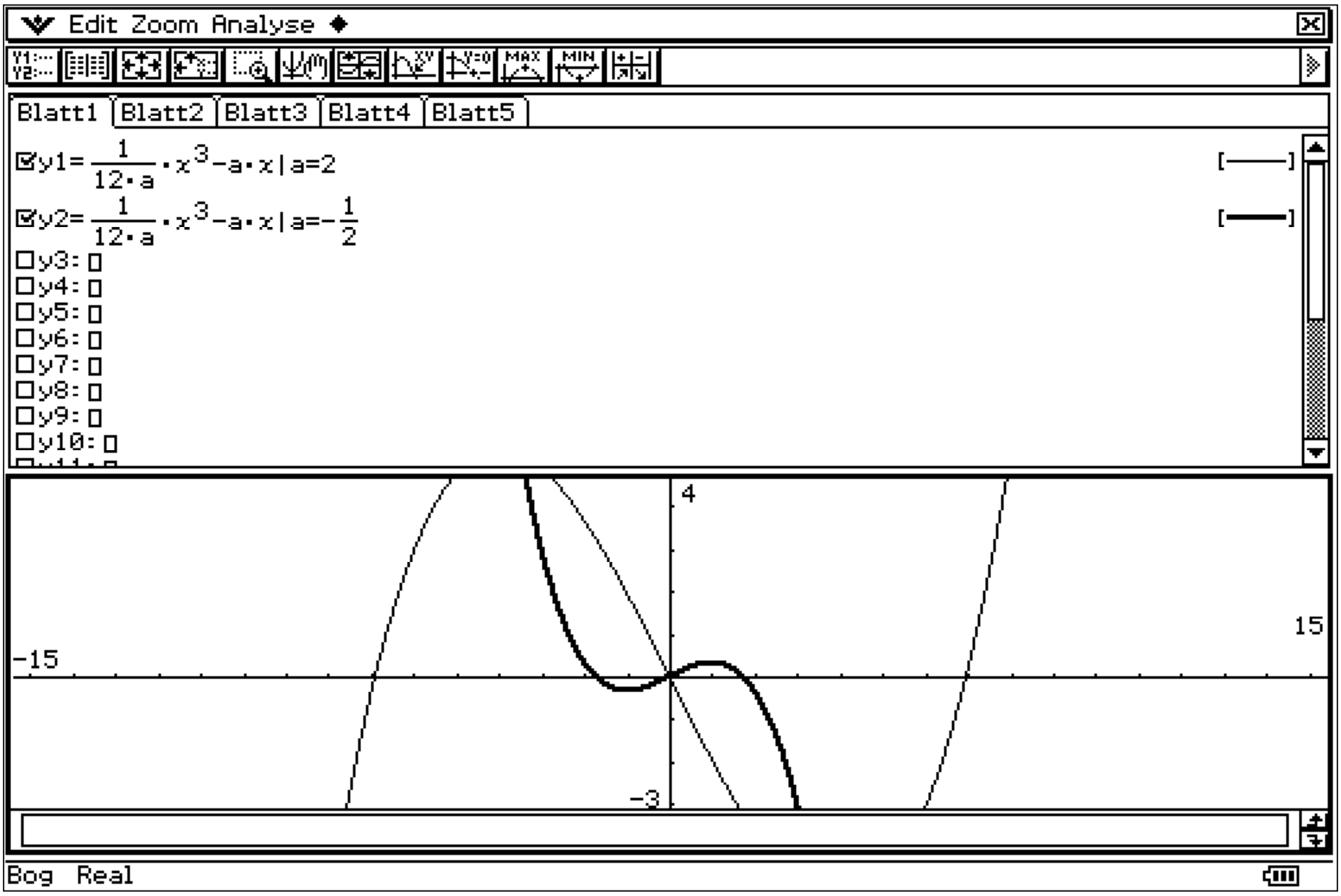
Lösung:

Wir zeigen, dass $f_a'(0)|a=2 = -1/(f_a'(0)|a=-1/2)$ gilt:

$f_a'(x) = (1/(4a))x^2-a = -2$ für a=2 und x=0
und
$f_a'(x) = (1/(4a))x^2-a = (1/2)$ für a=-1/2 und x=0

Die Ableitungen beschreiben die Anstiege -2 und 1/2 (negativer Kehrwert von 2) der Tangenten, die sich damit senkrecht schneiden.
Damit trifft dies auch für die Kurven G_2 und $G_{-1/2}$ zu.

Orthogonaler Schnitt der Kurven G_2 und $G_{-1/2}$



Teilaufgabe 1.2.2

geg. a>0

ges. lokale Extrempunkte von G_a und Art der Extrema

Lösung:

$f_a'(x) = (1/(4a))x^2-a = 0$ ergibt $(1/4)x^2 = a^2$, d.h. $x_m = \pm 2a$

Wegen f_a'(x)>0 für x>2a und f_a'(x)<0 für x<2a
handelt es sich im Fall x_m = +2a um eine Minimumstelle:

P_{min}(2a | f_a(2a)) mit f_a(2a) = (1/(12a)x^3-ax)|x=2a = (2/3)a^2-2a^2 = **(-4/3)a^2**

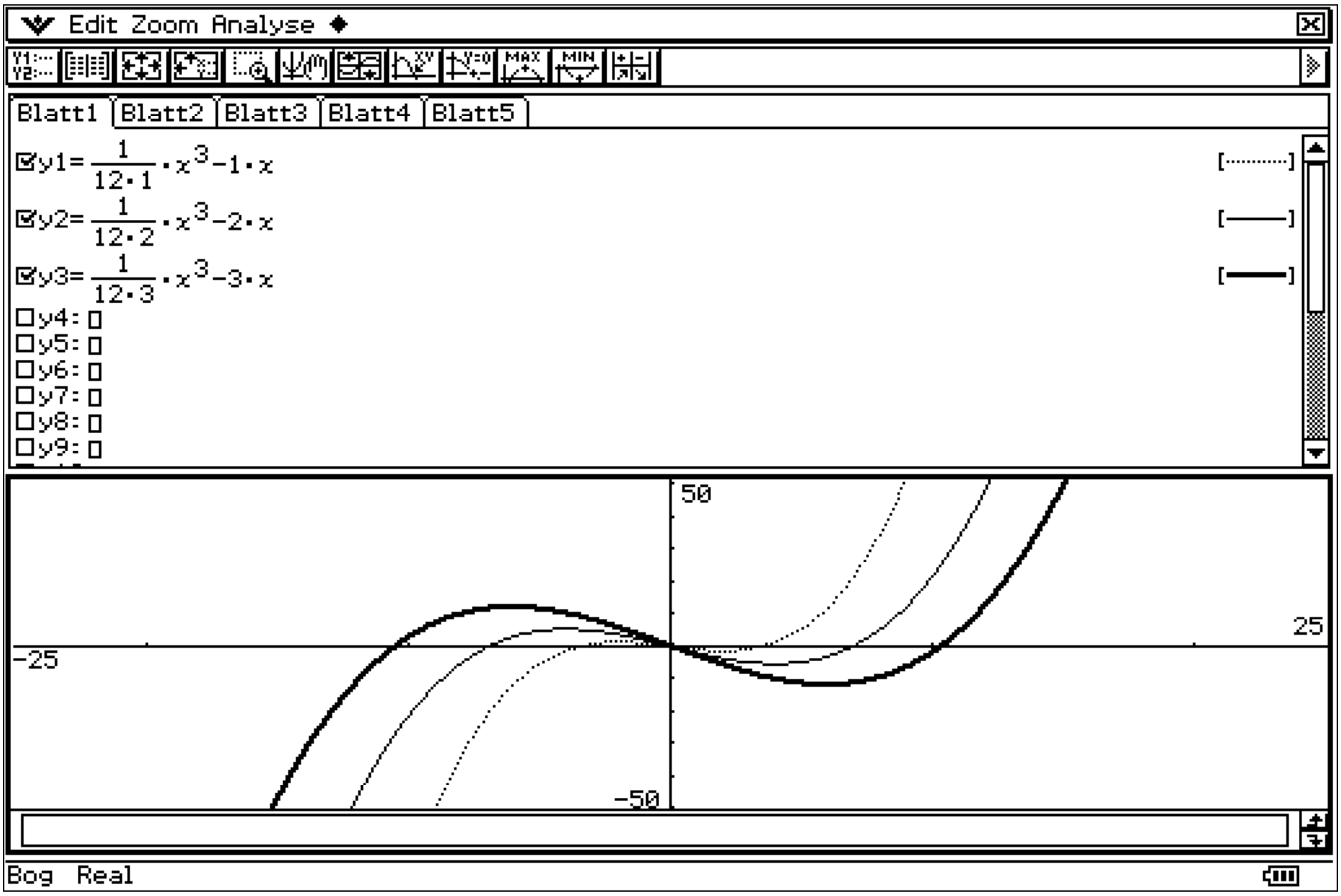
Wegen f_a'(x)>0 für x<-2a und f_a'(x)<0 für x>-2a
handelt es sich im Fall x_m = -2a um eine Maximumstelle:

P_{max}(-2a | f_a(-2a)) mit f_a (-2a) = ((1/(12a)x^3-ax)|x=-2a = -(2/3)a^2+2a^2 = **(4/3)a^2**

Kontrolle im GTR(CAS):

diff(1/(12*a)*x^3-a*x,x,1)=0	ergibt	(x^2-4*a^2)/(4*a)=0
solve(ans,x)	ergibt	{x=-2*a,x=2*a}
1/(12*a)*x^3-ax|x=2*a	ergibt	2*a^2/3-ax

Kurvenschar für a=1,2,3



Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A2 (Analytische Geometrie):

geg. Punkte im kartesischen Koordinatensystem:
A(4|1,5|-3,5), B(-1|1,5|-3,5), C(-1|-1,5|0,5), D(4|-1,5|0,5)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Nachweis der Lage aller Punkte in einer Ebene

Lösung:

Eine Ebenengleichung mit A,B,C lautet:

x(s,t) = A +s*AB + t*AC, s,t∈R, wobei AB und AC die Richtungsvektoren bezeichnen.

Gilt nun D = A +s*AB + t*AC mit passenden s,t, dann liegen alle Punkte in einer Ebene,

d.h., das Gleichungssystem s*AB + t*AC = D-A ist lösbar.

Andere Interpretation:
Die Vektoren AB, AC und AD spannen ein Spatvolumen auf mit dem Volumen 0

Rechnung im GTR(CAS):

[[4,1.5,-3.5]]⇒A [[-1,1.5,-3.5]]⇒B [[-1,-1.5,0.5]]⇒C [[4,-1.5,0.5]]⇒D

trn(B-A)	ergibt	[[-5],[0],[0]]
trn(C-A)	ergibt	[[-5],[-3],[4]]
trn(D-A)	ergibt	[[0],[-3],[4]]
rref([[-5,-5,0],[0,-3,-3],[0,4,4]])	ergibt	[[1,0,-1],[0,1,1],[0,0,0]]

Lösung:
s = -1 und t = 1, d.h. das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar
und D liegt damit in der durch A, B, C aufgespannten Ebene.

Probe:

-[[-5],[0],[0]]+[[-5],[-3],[4]] ergibt [[0],[-3],[4]]

Anderer Weg: Spatvolumen:

dotP(crossP([[-5],[0],[0]],[[-5],[-3],[4]]),[[0],[-3],[4]]) ergibt 0

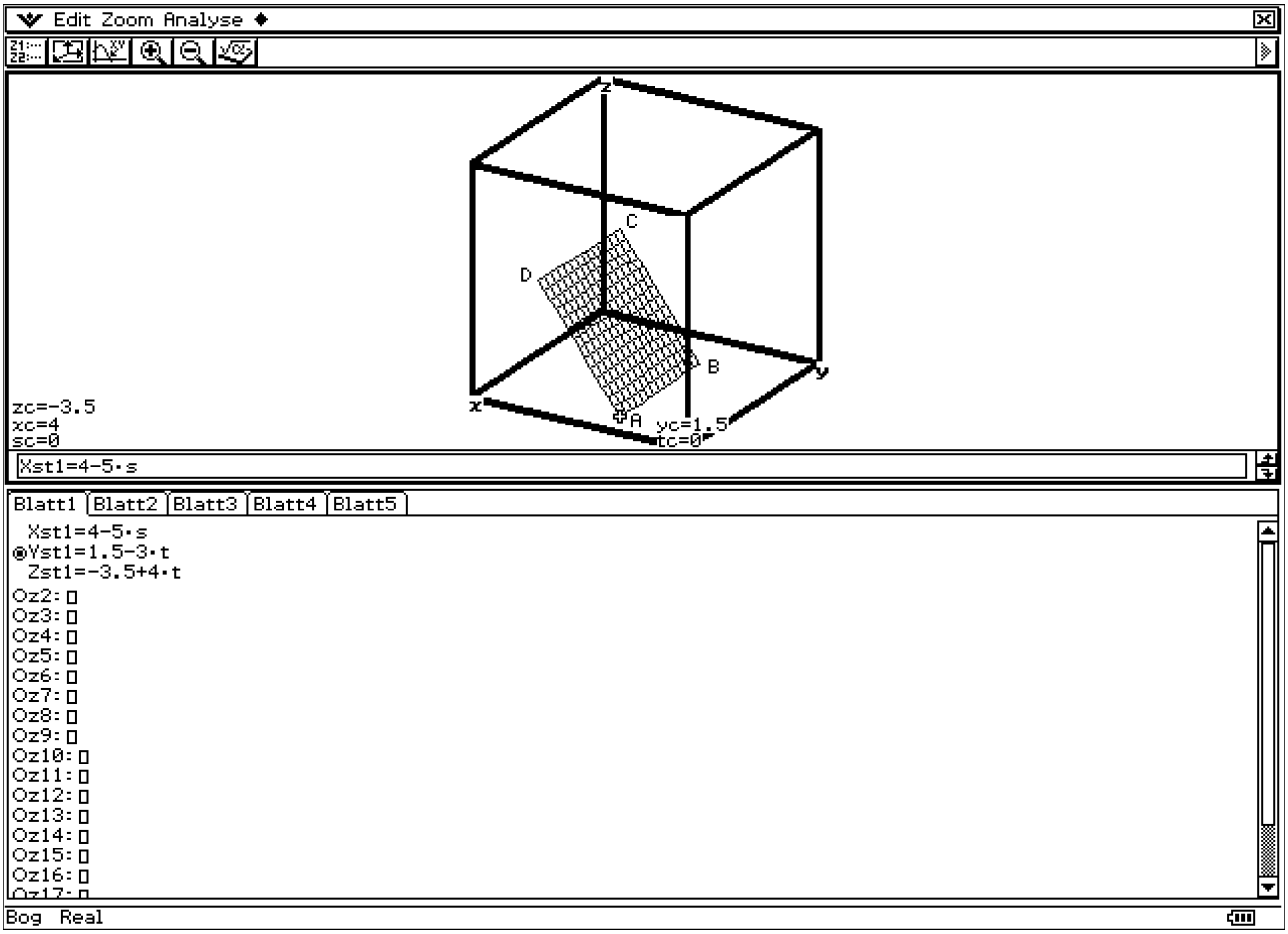
Da kein von Null verschiedenes Spatvolumen entsteht, liegen A, B, C, D in einer Ebene.

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Darstellung des Vierecks in einem kartesischen Koordinatensystem,
Nachweis, dass es ein Quadrat ist.

Lösung:

3D-Darstellung des Vierecks in einem Betrachtungsquader:



Ansatz für die Graphik:
x(s,t) = A+s×(B-A)+t×(D-A), 0≤s≤1, 0≤t≤1.

Rechnung im GTR(CAS):

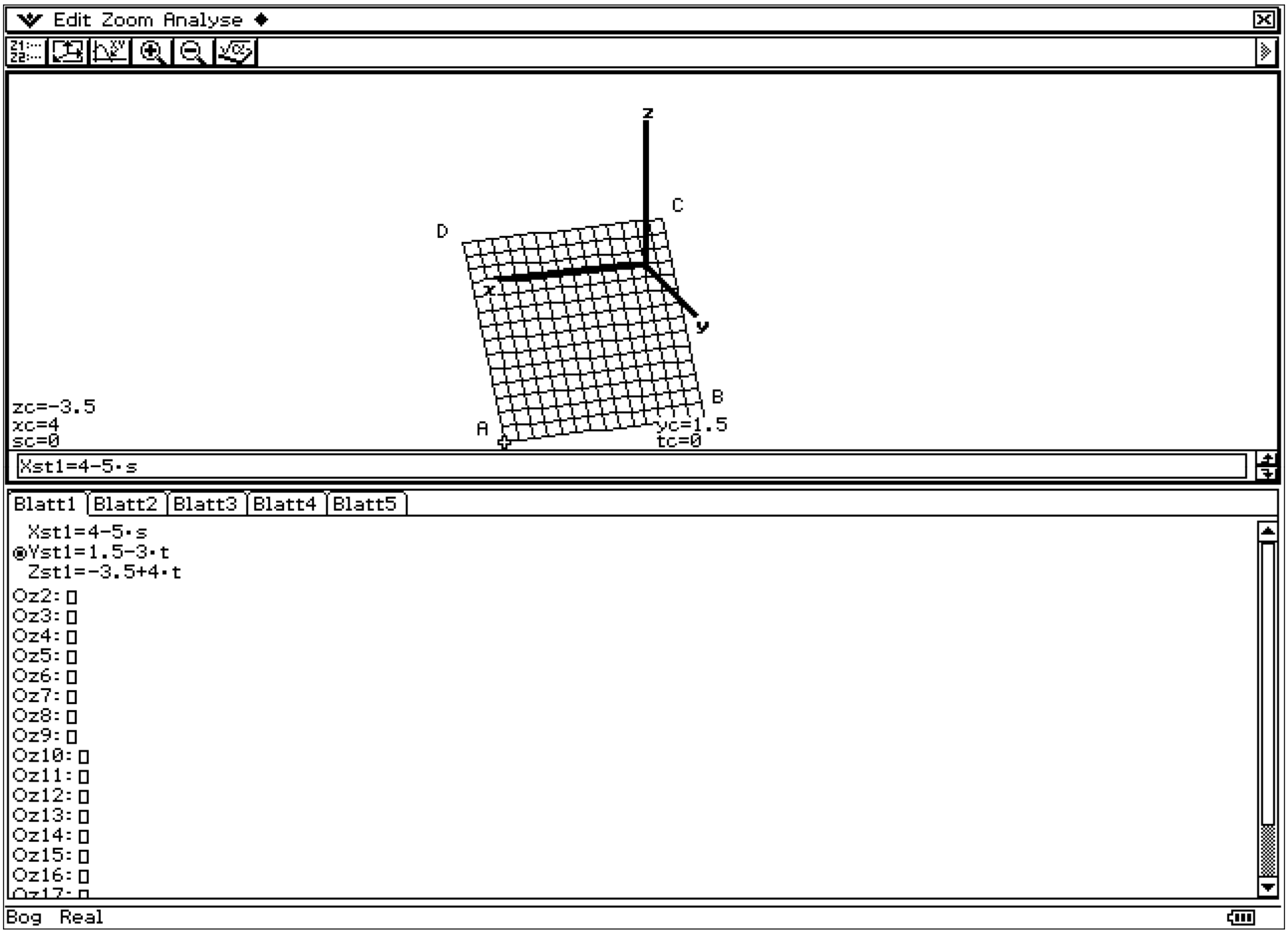
trn(A+s*(B-A)+t*(D-A)) ergibt [[-5*s+4],[-3*t+1.5],[4*t-3.5]]

Die Parameterdarstellung des Vierecks für die 3D-Grafik erfolgte im Betrachtungsquader $-4 \le x, y, z \le 4$.

Berechnung der konstanten Seitenlängen und der rechten Winkel (Skalarprodukt gleich 0)**:**

norm(B-A)	ergibt	5
norm(C-B)	ergibt	5
norm(D-C)	ergibt	5
norm(A-D)	ergibt	5
dotP(B-A,D-A)	ergibt	0
dotP(C-B,A-B)	ergibt	0
dotP(D-C,B-C)	ergibt	0
dotP(A-D,C-D)	ergibt	0

Zum Nachweis des Quadrates ist es ausreichend, die Parallelität von AB (z-Höhe -3,5) und CD (z-Höhe 0,5) und deren Seitenlängen 5 (Differenz der x-Koordinaten) zu erkennen, sowie einen Winkel, z.B. $\sphericalangle$DAB =90°, über das Skalarprodukt 0 nachzuweisen.



Pflichtaufgabe 2.3

geg. ABCD als Grundfläche zweier quadratischer Pyramiden mit den Spitzen S_1 und S_2 (Höhe jeweils 5 LE)

Teilaufgabe 2.3.1

ges. Koordinaten von S_1 und S_2

Lösung:

Mittelpunkt M von ABCD finden: M = A + AC/2 = A + (C-A)/2 = (A+C)/2

hieraus erhält man: **M(1,5|0|-1,5)**

In M mit Normalenvektor der Ebene (mit ABCD) eine Gerde bilden und S_1 und S_2 darstellen:

Ein Normalenvektor ist AB×AC = crossP(B-A,C-A) = [[0],[20],[15]]

Rechnung im GTR(CAS):

crossP(B-A,C-A) ⇒ N	ergibt	[[0,20,15]]
(A+C)/2 ⇒ M	ergibt	[[1.5,0,-1.5]]
M + 5*N/norm(N) ⇒ S1	ergibt	[[1.5,4,1.5]]
M - 5*N/norm(N) ⇒ S2	ergibt	[[1.5,-4,-4.5]]

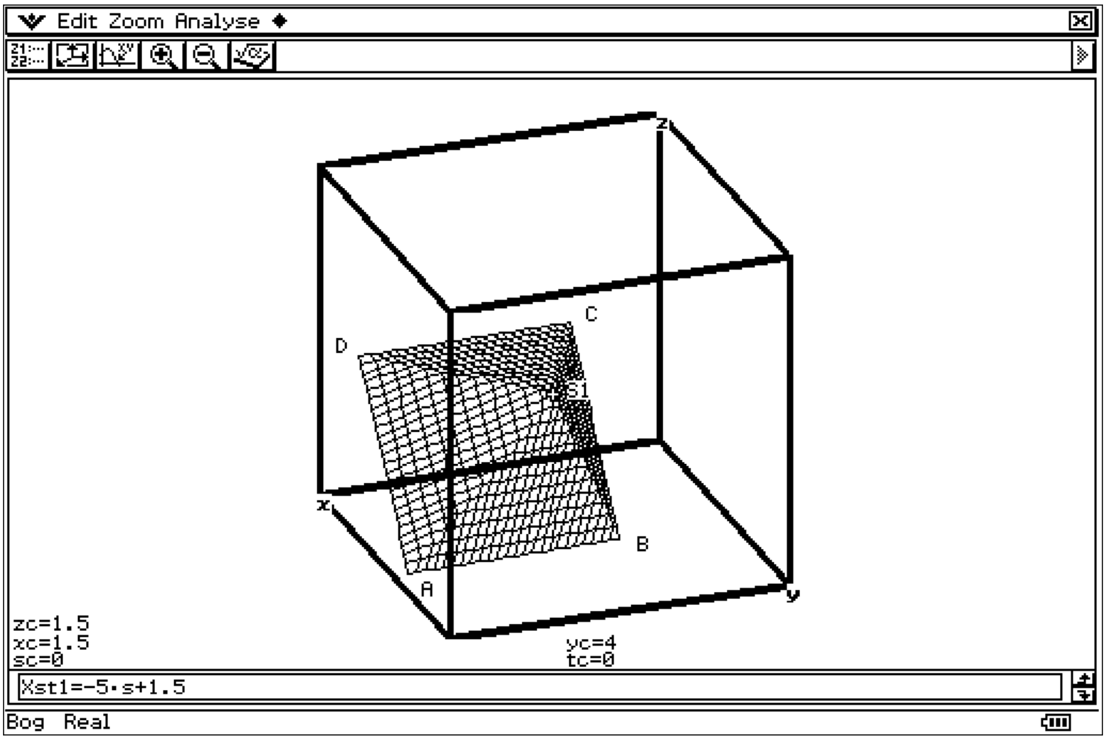
Damit liegen die Spitzen in S_1(1,5|4|1,5) und S_2(1,5|-4|-4,5).

Teilaufgabe 2.3.2

ges. Darstellung der Pyramide ABCDS, wobei S die Spitze mit nur positiven Koordinaten ist

Lösung:

3D-Darstellung der Pyramide ABCDS$_1$ in einem Betrachtungsquader:



Zusatzüberlegung zur Pyramidenformel in der 3D-Grafik:

x(s,t) = M + s*(B-A) + t*(D-A) + (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S1-M), $-1/2 \le s,t \le 1/2$,

ist eine Parameterdarstellung der Pyramidenoberfläche.

Der Anteil M+s*(B-A)+t*(D-A) beschreibt zunächst die Grundfläche, das Quadrat ABCD.
Der Anteil (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S1-M) addiert zur Grundfläche einen Vektor in Richtung MS_1. Die Beträge garantieren die gewünschte Symmetrie der regelmäßigen Pyramide.

Rechnung im GTR(CAS):

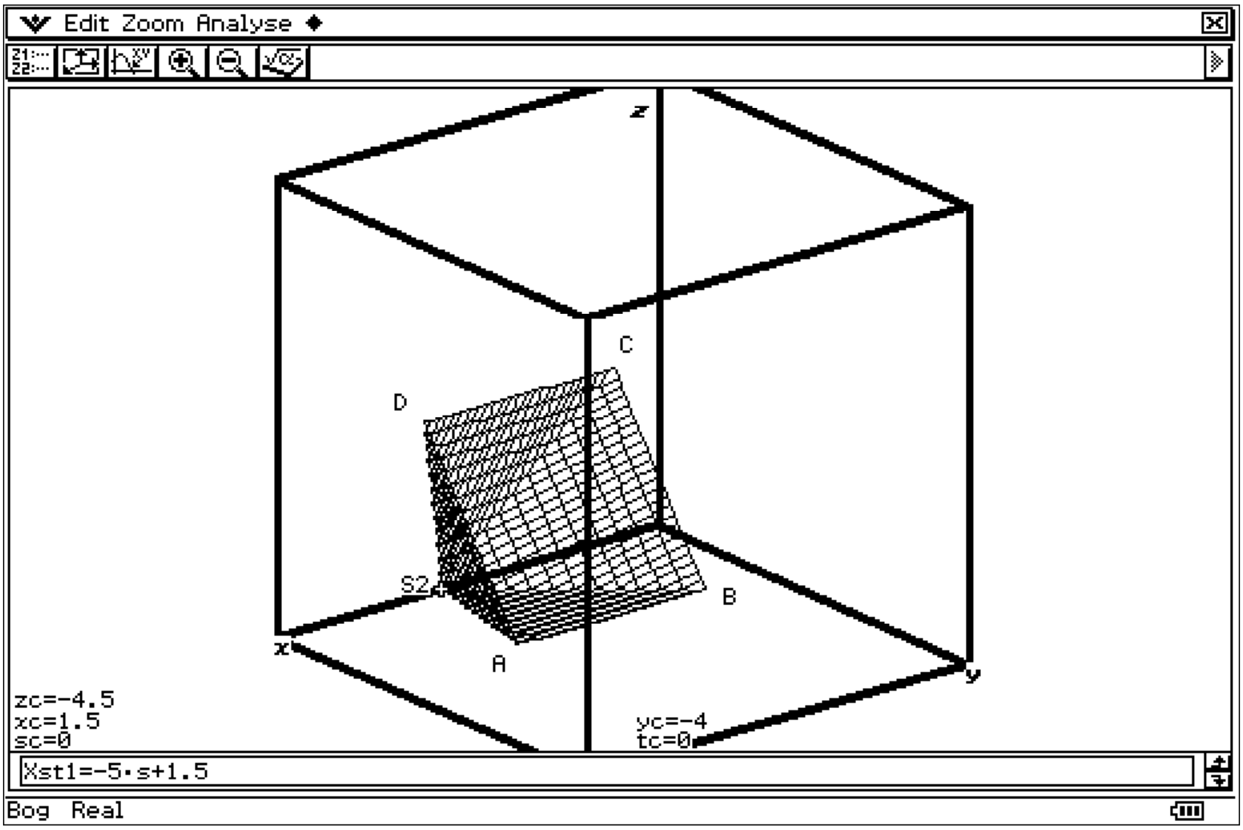
M + s*(B-A) + t*(D-A) + (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S1-M) ergibt
[[-5*s+1.5, -4*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)-3*t, -3*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)+4*t-1.5]]

Der zuletzt bereitgestellte Term dient der 3D-Grafik.

Kontrolle der Pyramide $ABCDS_2$:

M + s*(B-A) + t*(D-A) + (1 - (|s| + |t| + | |s| - |t| |)) * (S2-M) ergibt
[[-5*s+1.5, 4*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)-3*t, 3*(| |s| - |t| | + |s| + |t|-1)+4*t-1.5]]

3D-Grafik der Pyramide $ABCDS_2$



Pflichtaufgabe 2.4

geg. Pyramide P mit Grundfläche ABCD und Spitze S(1,5|4|1,5)
ges. Volumen der Pyramide P

Lösung:
Das Pyramidenvolumen beträgt 1/3 des Spatvolumens.

Rechnung im GTR(CAS):
V = dotP(crossP(B-A,D-A),S1-A)/3 ergibt V=125/3

Elementare Rechnung: V = (1/3) * “Grundfläche“ * “Höhe“ = (1/3) * 5^2 * 5 = 125/3

Pflichtaufgabe 2.5

geg. Punkte P_t(4-5t|1,5|-3,5) auf der Geraden durch A und B

Teilaufgabe 2.5.1
ges. Größe des Winkels ∠ DP C

Lösung:
[[4-5*t,1.5,-3.5]]|t=2 ⇒ P2 ergibt [[-6,3/2,-7/2]]

Es gilt:
cos(∠ DP_2C) = dotP(D-P2,C-P2) / (norm(D-P2)×norm(C-P2)), d.h.

dotP(D-P2,C-P2) / (norm(D-P2)*norm(C-P2)) ergibt 3*10^(1/2)/10
$\cos^{-1}$(ans) ergibt 18.43494882

Für den gesuchten Winkel gilt: **∠ DP C ≈ 18,4°.**

Teilaufgabe 2.5.2

ges. Nachweis ∠ $DP_tC \neq 90°$ für alle t∈R

Lösung:

[[4-5*t,1.5,-3.5]]®Pt	ergibt	[[-5*t+4,3/2,-7/2]]
dotP(D-Pt,C-Pt)	ergibt	5*t*(5*t-5)+25
rFactor(ans)	ergibt	25 * (t-1/2+3^(1/2)***i**/2) * (t-1/2-3^(1/2)***i**/2)

Das Skalarprodukt ist für alle t verschieden von 0 (nur komplexe Nullstellen),
d.h. der Winkel ∠ DP_tC kann nicht 90° sein.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A3 (Analytische Geometrie, Stochastik):

Pflichtaufgabe 3.1 (Analytische Geometrie)

geg. Geraden k_1 und k_2 im kartesischen Koordinatensystem (Kurse zweier Flugzeuge)

Angaben zu k_1: Punkt P(-290|320|140), Richtungsvektor a =[[100],[-100],[-50]]

Angaben zu k_2: Punkte Q_1(-800|500|-70) und Q_2(200|0|-70)

(1LE = 1km)

Teilaufgabe 3.1.1

ges. Zeichnen der Geraden k_1 und k_2 in ein geeignetes Koordinatensystem.
Berechnung der Entfernung von P nach Q_1: $\|Q_1\text{-}P\|$

Lösung:

Entfernung von P nach Q_1 (Norm des Vektors PQ_1):

Rechnung im GTR(CAS):

[[-290,320,140]] ⇒ P [[-800,500,-70]] ⇒ Q1

norm(Q1-P) ergibt 580.1723882

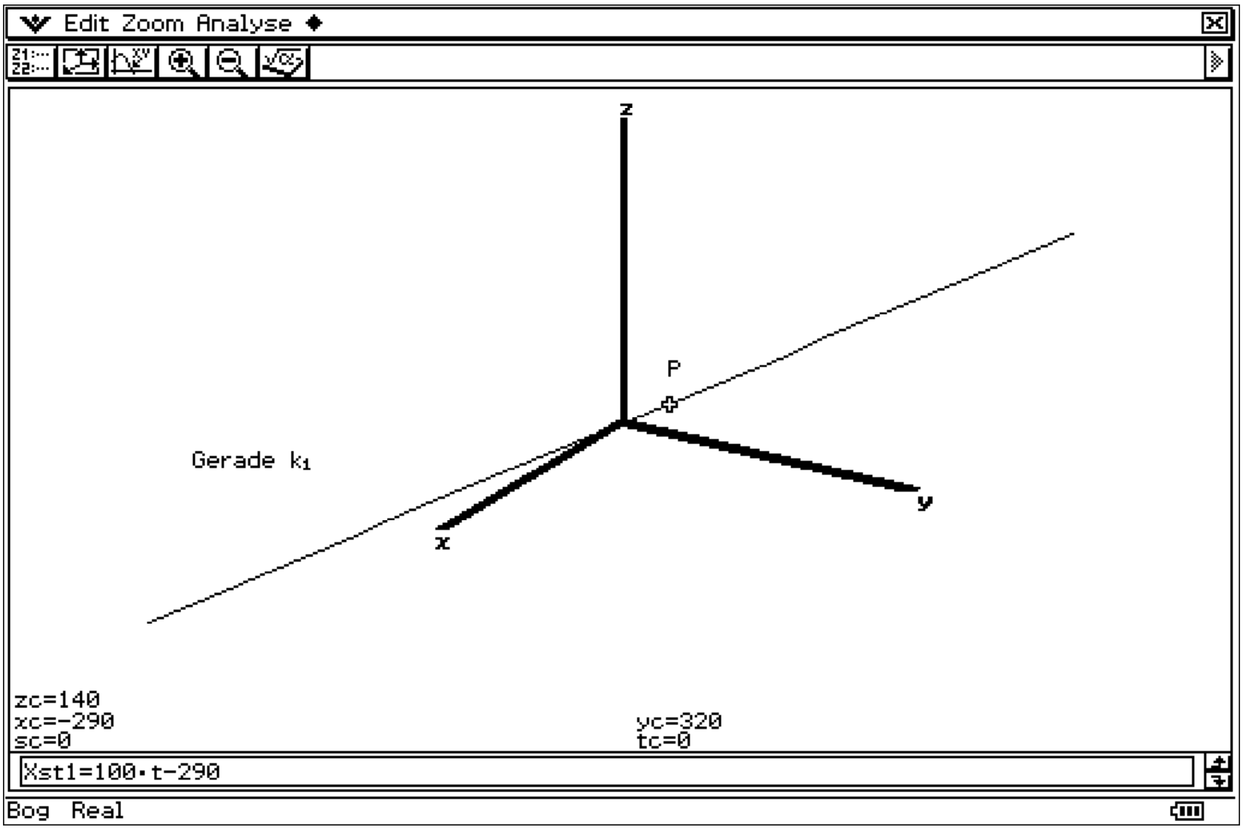
Die Entfernung beträgt 580km.

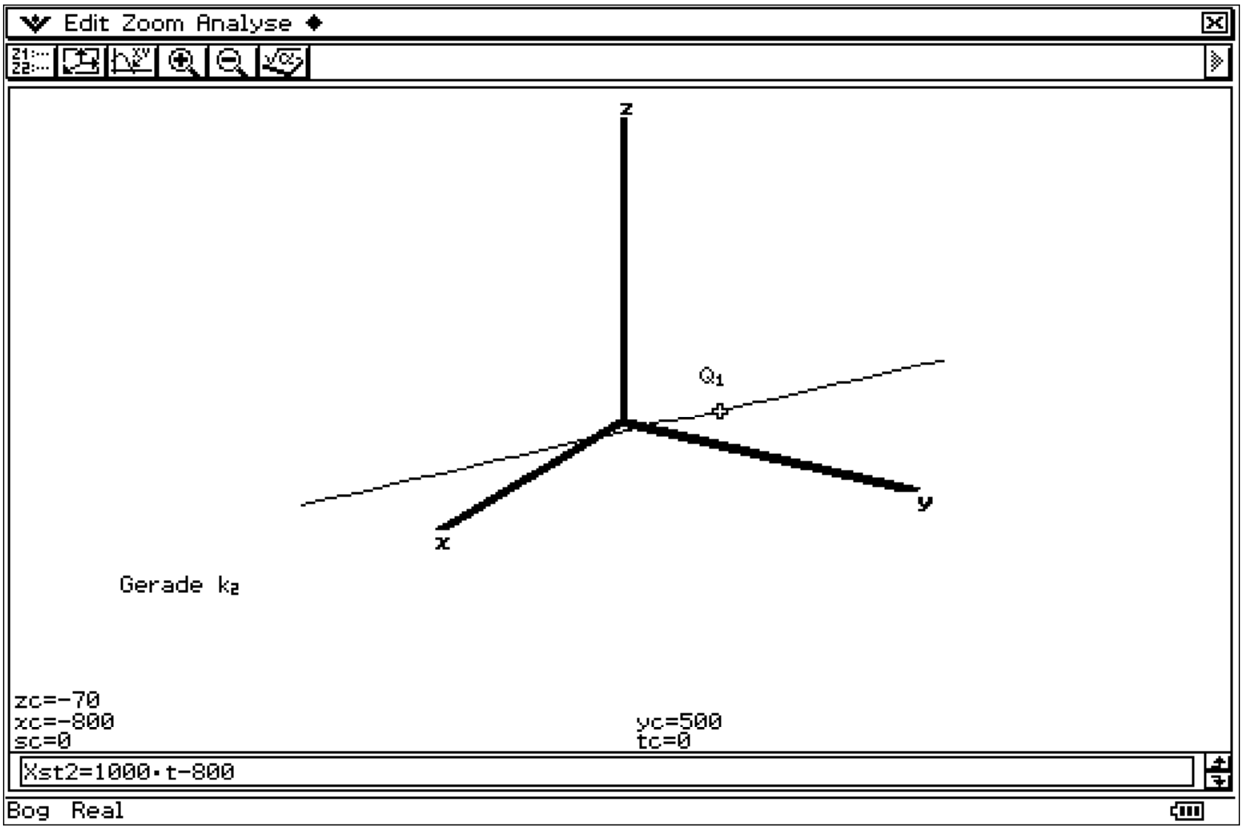
Betrachtung der Geradengleichungen:

für k_1: **x**(t) = P + t*a = [[-290],[320],[140]] + t*[[100],[-100],[-50]], $t\in R$,

für k_2: **x**(t) = Q_1 + t*(Q_2-Q_1) = [[-800],[500],[-70]] + t*[[1000],[-500],[0]], $t\in R$,

Einzeldarstellungen als 3D-Grafik





Die Gerade k_2 verläuft parallel zur x-y-Ebene in der Höhe $z = -70$.

Vereinfachungen der Vektorterme für die Geraden:

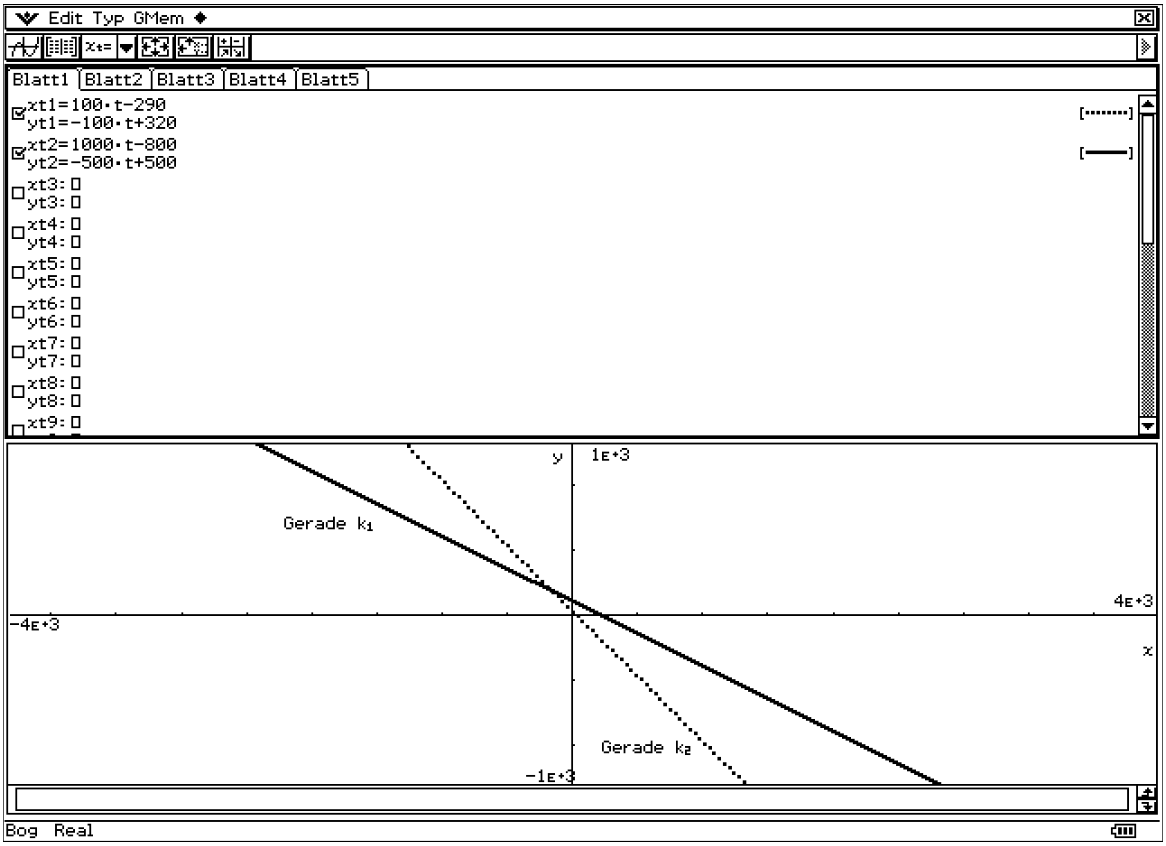
[[-290],[320],[140]]+t*[[100],[-100],[-50]] ergibt [[100*t-290],[-100*t+320],[-50*t+140]]

[[-800],[500],[-70]]+t*[[1000],[-500],[0]] ergibt [[1000*t-800],[-500*t+500],[-70]]

Betrachtungsquadereinstellungen: $-3000 \leq x,y,z \leq 3000$
Parameterbereich: $-100 \leq t \leq 100$ für k_1 bzw. $-10 \leq t \leq 10$ für k_2 ($-1 \leq s \leq 1$)
Betrachtungswinkel: $\theta = 32°$, $\varphi = 68°$

Die gleichzeitige Darstellung mehrerer Objekte im 3D-Menü ist nicht möglich.

Darstellung beider Geraden als Projektion in die x-y-Ebene (z=-70), 2D-Grafik:



Teilaufgabe 3.1.2

ges. Geradengleichungen und Lagebeziehungen

Lösung:

Betrachtung der Geradengleichungen:

für k_1: $\mathbf{x}(t) = P + t*a$ = [[-290],[320],[140]] + t*[[100],[-100],[-50]], $t \in R$,

für k_2: $\mathbf{x}(t) = Q_1 + t*(Q_2-Q_1)$ = [[-800],[500],[-70]] + t*[[1000],[-500],[0]], $t \in R$,

Vereinfachungen der Vektorterme für die Geraden (für die 3D-Graphik):

[[-290],[320],[140]]+t*[[100],[-100],[-50]] ist [[100*t-290],[-100*t+320],[-50*t+140]]

[[-800],[500],[-70]]+t*[[1000],[-500],[0]] ist [[1000*t-800],[-500*t+500],[-70]]

Betrachtungsquadereinstellungen: -3000 ≤ x,y,z ≤ 3000
Parameterbereich: -100 ≤ t ≤ 100 für k_1 bzw. -10 ≤ t ≤ 10 für k_2 (-1 ≤ s ≤ 1)
Betrachtungswinkel: θ = 32°, φ = 68°

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, d.h. die Geraden sind nicht parallel.
[[100],[-100],[-50]] ≠ t*[[1000],[-500],[0]] für alle t∈R (Richtungsvektoren)

Schnittpunkt existiert, sofern die Gleichung erfüllbar ist:
[[-290],[320],[140]] + t_1*[[100],[-100],[-50]] = [[-800],[500],[-70]] + t_2*[[1000],[-500],[0]]

Umformung im GTR(CAS):

t_1*[[100],[-100],[-50]] - t_2*[[1000],[-500],[0]] + [[-290],[320],[140]] - [[-800],[500],[-70]]
ergibt [[100*t_1-1000*t_2+510],[-100*t_1+500*t_2-180],[-50*t_1+210]]

solve({100*t_1-1000*t_2+510=0, -100*t_1+500*t_2-180=0, -50*t_1+210=0},{t_2,t_1,s})
No Solution

Damit sind die Geraden windschief.

Teilaufgabe 3.1.3

ges. Abstand der Geraden k_1 und k_2

Lösung:

Der Abstand beträgt:
dotP(crossP([[100],[-100],[-50]], [[1000],[-500],[0]]),
[[-290],[320],[140]]-[[-800],[500],[-70]]) / (norm([[100],[-100],[-50]]) × norm([[1000],[-500],[0]]))
= 40km.

Rechnung im GTR(CAS):

dotP(crossP([[100],[-100],[-50]], [[1000],[-500],[0]]),[[-290],[320],
[140]]-[[-800],[500],[-70]])/(norm([[100],[-100],[-50]])*norm([[1000],[-500],[0]])) ergibt
40.2492236

ges. Nachweis, dass sich die Gerade
x(t) = [[310],[620],[-610]] + t*[[15],[30],[-30]], t∈R, mit k_1 und k_2 senkrecht schneidet.

Lösung:

zwei Teilaufgaben: Nachweis der Schnittpunkte und Nachweis der Orthogonalität

Orthogonalität der Richtungsvektoren:

dotP([[100],[-100],[-50]],[[15],[30],[-30]]) ergibt 0
dotP([[1000],[-500],[0]],[[15],[30],[-30]]) ergibt 0

Schnittpunkte:

Berechnung des Abstandes der Geraden zu k_1:

dotP(crossP([[100],[-100],[-50]],[[15],[30],[-30]]),
[[310],[620],[-610]]-[[-290],[320],[140]])/(norm([[100],[-100],[-50]])*norm([[15],[30],[-30]]))
ergibt 0

Berechnung des Abstandes der Geraden zu k_2:

dotP(crossP([[1000],[-500],[0]],[[15],[30],[-30]]),
[[310],[620],[-610]]-[[-800],[500],[-70]])/(norm([[1000],[-500],[0]])*norm([[15],[30],[-30]]))
ergibt 0

Die Gerade hat von beiden Geraden k_1 und k_2 den Abstand 0, d.h. es sind Schnittpunkte vorhanden.

Pflichtaufgabe 3.2 (Stochastik)

geg. Flugzeug mit 50 Plätzen, Flüge zunächst ausgebucht, jedoch im Durchschnitt 10% beim Abflug nicht belegt.
Zufallsgröße X bezeichnet die nicht belegten Plätze beim Abflug,
X ist binomialverteilt (näherungsweise)

Teilaufgabe 3.2.1

ges. Wahrscheinlichkeiten für
A := {genau 5 Plätze nicht belegt} = {genau 5 von 50 (10%) Plätzen nicht belegt}, d.h. $P(X=5)$
B := {höchstens 2 Plätze nicht belegt}, d.h. $P(X\leq 2)$

Lösung:

Binomialverteilung für X mit $p = 0{,}1$ und $n = 50$, d.h. $n\times p = 5$

$P(X=5)$ = binomialPDf(5,n,p) ≈ 0.185
$P(X\leq 2)$ = binomialCDf(2,n,p) ≈ 0.112

Rechnung im GTR(CAS):

50⇒n 0.1⇒p

binomialPDf(5,n,p) ergibt 0.1849246009
binomialCDf(2,n,p) ergibt 0.1117287563

Teilaufgabe 3.2.2

geg. 4% mehr Plätze werden zum Verkauf angeboten, d.h. 52 Plätze (Risiko der Überbuchung)

Kosten:
120€ für 1 Ticket (Einnahme der Fluggesellschaft),

Stornierung 60€ (Ausgabe der Fluggesellschaft, 60€ Rückerstattung),
Abweisung wegen Überbuchung 500€ (Ausgabe der Fluggesellschaft)

ges. Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Fluggäste zum Abflug erscheinen
(Abweisung wegen Überbuchung)

Lösung:

Zufallsgröße X bezeichnet wieder die nicht belegten Plätze beim Abflug,
X ist binomialverteilt (näherungsweise) mit $p = 0,10$ und $n = 52 = 1,04 \times 50$

$P(X \leq 1) = \text{binomialCDf}(1,n,p) \approx 0.028$

Rechnung im GTR(CAS):

52⇒n 0.1⇒p

binomialCDf(1,n,p) ergibt 0.02829422589

ges. Einnahmen für Fluggesellschaft, wenn 51 Fluggäste zum Abflug erscheinen

Lösung:

Wenn alle Plätze ausgebucht sind, dann gibt es 52 verkaufte Tickets, eine Stornierung und eine Überbuchung:

$52 \times 120 - 1 \times 60 - 1 \times 500 = 5680$€

Rechnung im GTR(CAS):

52*120 - 1*60 - 1*500 ergibt 5680

Die Gesellschaft hat für den genannten Flug eine Einnahme in Höhe von **5680€**.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

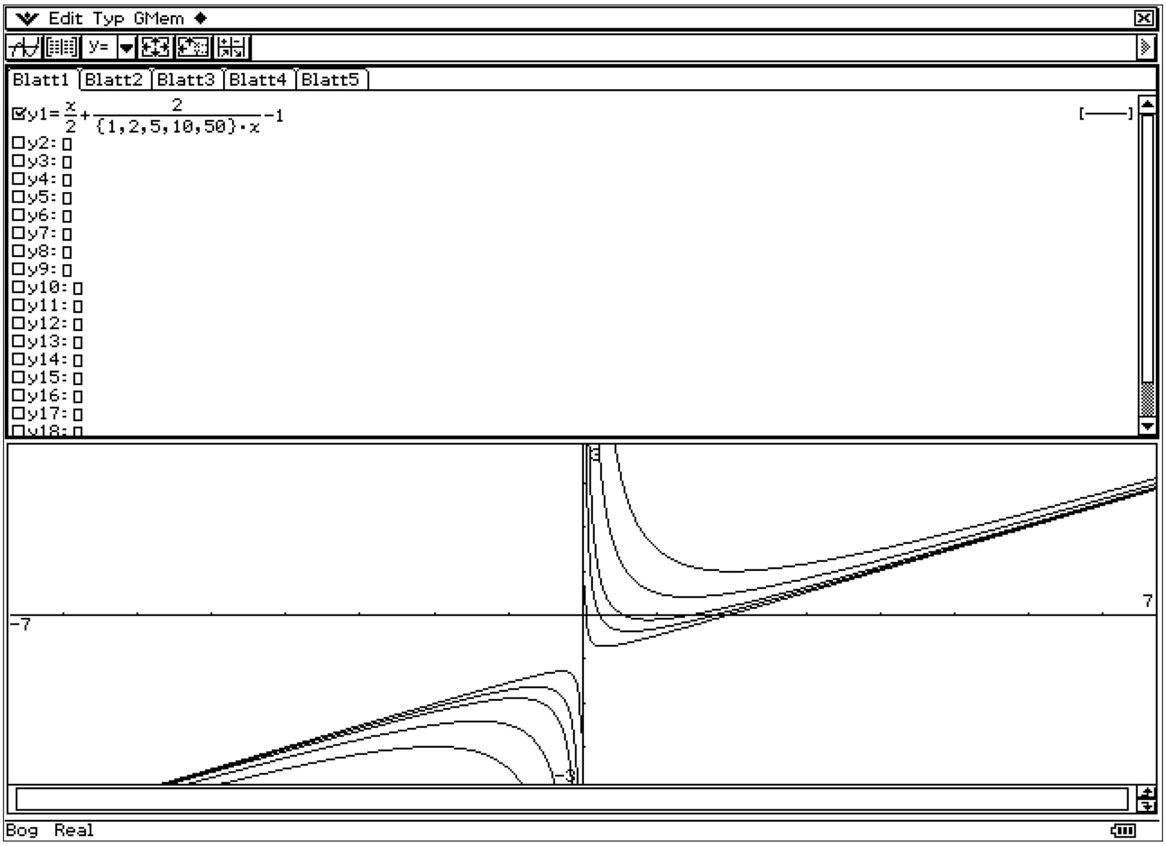
(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (Wahlaufgaben B1, B2, B3)

Aufgabe B1 (Analysis):

geg. Funktionenschar $f_k(x) = x/2 + 2/kx - 1$, $x,k \in R$, $x \neq 0$, $k>0$.
G_k sind die zu f_k gehörigen Graphen, s. Abb.

Funktionenschar



Pflichtaufgabe 1.1

ges. in Abhängigkeit von k
- Anzahl der Nullstellen von f_k
- Koordinaten und Art der lokalen Extrema von G_k

Lösung:

Nullstellen: x/2 + 2/kx - 1 = 0 ergibt k×x^2 + 4 = 2kx bzw. k×x^2 - 2kx + 4 = 0, d.h.

k×(x^2 - 2x +1) = k - 4 bzw. k×(x-1)^2 = k-4

Die zuletzt angegebene Gleichung hat für 0<k<4 keine Lösung,
für k=4 genau eine und für k>4 genau zwei Lösungen.

Anzahl der Nullstellen: 0 für 0<k<4, **1** für k=4, **2** für k>4.

Rechnung im GTR(CAS):

solve(x/2+2/(k*x)-1=0,x)	ergibt	{x=(-(k^2-4*k)^(1/2))/k+1,x=(k^2-4*k)^(1/2)/k+1}
solve(x/2+2/(k*x)-1=0|k=4,x)	ergibt	{x=1}
solve(x/2+2/(k*x)-1=0|k=3,x)	ergibt	No Solution
solve(x/2+2/(k*x)-1=0|k=5,x)	ergibt	{x=(-5^(1/2))/5+1,x=5^(1/2)/5+1}

Extremwerte:

Es gilt: f_k (x) = x/2 + 2/(kx) - 1 und fk'(x) = 1/2 - 2/(k×x^2) = (x^2-4/k) / (2x^2)

Daraus folgt $f_k'(x) = 0$ für x^2 = 4/k, d.h. $x_m = \pm\sqrt{(4/k)}$

Nun gilt $f_k'(x) > 0$ für x < -√(4/k) und $f_k'(x) < 0$ für x > -√(4/k),
d.h. f_k monoton wachsend und dann fallend.
Damit liegt in der Umgebung von -√(4/k) ein Maximum vor: $x_{max} = -\sqrt{(4/k)}$

Weiter gilt
$f_k'(x) < 0$ für x < √(4/k) und $f_k'(x) > 0$ für x > √(4/k),
d.h. f_k monoton fallend und dann wachsend.
Damit liegt in der Umgebung von √(4/k) ein Minimum vor: $x_{min} = \sqrt{(4/k)}$

Rechnung im GTR(CAS):

Define fk(x)=x/2 + 2/(k×x) - 1

done

diff(fk(x),x,1)=0	ergibt	(k*x^2-4)/(2*k*x^2)=0
solve(ans,x)	ergibt	{x=(-2)/k^(1/2), x=2/k^(1/2)}
diff(fk(x),x,2)	ergibt	4/(k*x^3)
fk(x)|x=(-2)/k^(1/2)	ergibt	(-2)/k^(1/2)-1
fk(x)|x=2/k^(1/2)	ergibt	2/k^(1/2)-1

Es gilt: P_{max}(-2/√(k) | -2/(√(k) - 1) und P_{min}(2/√(k) | 2/(√(k) - 1)

Pflichtaufgabe 1.2

ges. Asymptotengleichungen für G_k

CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

Lösung:

vertikale Asymptote: für die Polstelle x=0 lautet **x=0**.

Für $x \to \pm\infty$ gilt $x/2 + 2/(kx) - 1 \to \pm\infty$ mit $2/(kx) \to 0$.

Damit ist **y = x/2 - 1** die zweite Asymptote (unabhängig von k).

Pflichtaufgabe 1.3

ges. Flächeninhalt der Fläche, die von der x-Achse und G_k (k=16/3) vollständig begrenzt wird.

Lösung:

Integralansatz: ∫((0-f_k(x)) ,x, -√(k^2-4*k)/k + 1, √(k^2-4*k)/k + 1) mit k = 16/3

Vereinfachung im GTR(CAS):

16/3 ⇒ k	ergibt	16/3
(-(k^2-4*k)^(1/2))/k+1	ergibt	1/2
(k^2-4*k)^(1/2)/k+1	ergibt	3/2
∫(-(x/2+2/(k*x)-1),x)	ergibt	(-x^2)/4 - 3*ln(abs(x))/8 + x
∫(-(x/2+2/(k*x)-1),x,0.5,1.5)	ergibt	-3*ln(3)/8 + 1/2
ans	ergibt	0.08802039175

Berechnung per Hand:

∫(-(x/2+2*3/(16*x)-1),x,0.5,1.5)
= (-x^2/4 - 3*ln(abs(x)) / 8 +x)|x=1.5 - (-x^2/4 - 3*ln(abs(x))/8 +x)|x=0.5

= (-1.5^2/4 - 3*ln(1.5)/8 +1.5) - (-0.5^2/4 - 3*ln(0.5)/8 +0.5)

= 1/2 - 3*ln(3)/8

Pflichtaufgabe 1.4

ges. x-Werte mit |fk(x) - y(x)| = |2/(kx)| < 0.001 (y(x) = x/2 – 1)

Lösung:

|2/kx|< 0,001 ergibt
für x>0: 2/(kx) < 0.001, d.h. x > 2000/k und
für x<0: -2/(kx) < 0.001, d.h. x < -2000/k.

Antwort: für x < -2000/k oder x > 2000/k ist der Abstand zur Asymptote kleiner als 0.001

Pflichtaufgabe 1.5

geg. Tangente an G_k an der Stelle x_k, wobei die Tangente durch O(0|0) verläuft.
ges. Stelle x_k (in Abhängigkeit von k)

Lösung:

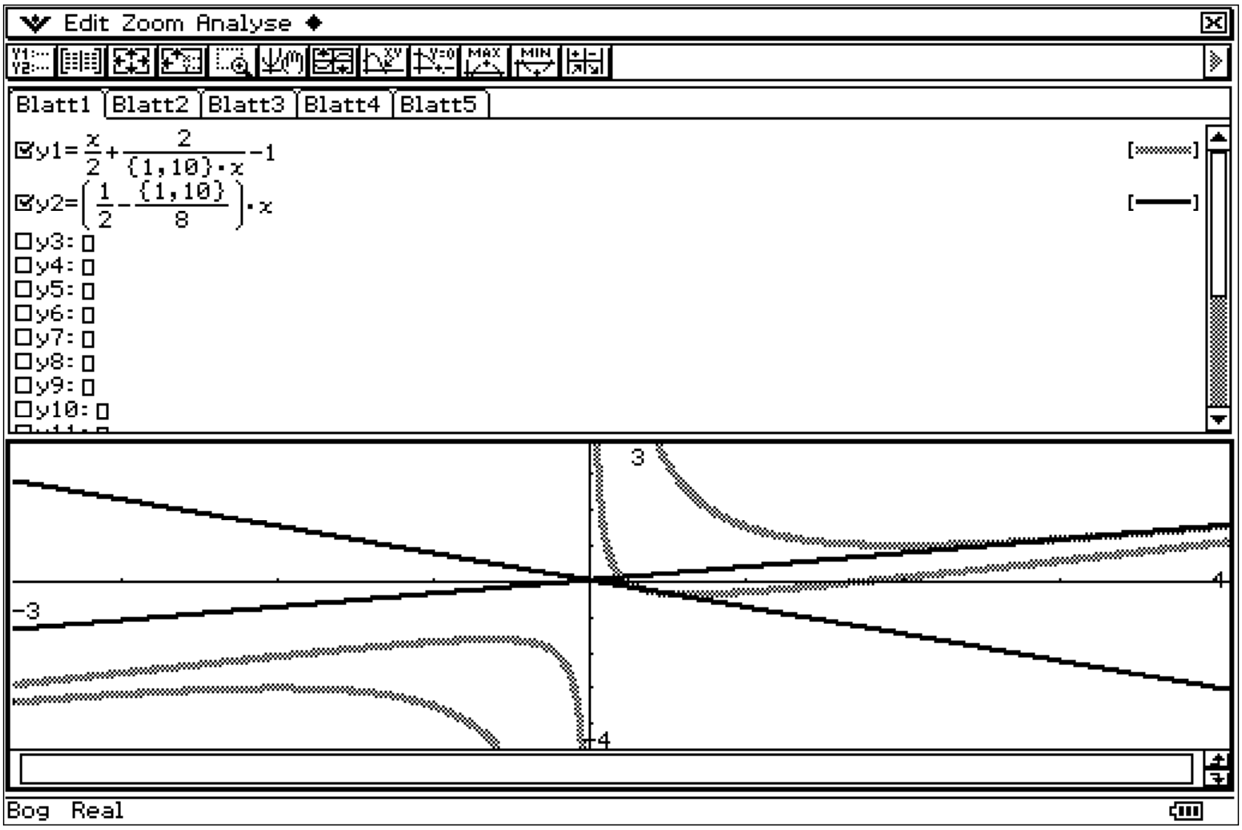
Ansatz: $y(x) = m \times x + n$ mit $n=0$, da Tangente durch O(0|0) verläuft, und $m = f_k'(x_k)$

Weiter: $f_k'(x_k) = 1/2 - 2/(k \times x_k\text{^}2)$ and $y(x_k) = (1/2 - (2/(k \times x_k\text{^}2)) \times x_k = f_k(x_k) = x_k/2 + 2/(kxk) - 1$
Hieraus folgt $x_k = 4/k$.

Rechnung im GTR(CAS):

DelVar k
done
solve((1/2-2/(k*xk^2))*xk=xk/2+2/(k*xk)-1,xk) ergibt {xk=4/k}

Kurvenschar mit Tangenten:



Die Tangentengleichung lautet: $y(x) = (1/2 - 2/(k \times (4/k)\text{^}2)) \times x = (1/2 - k/8) \times x$.

Die Stelle x_k lautet: $x_k=4/k$.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (Wahlaufgaben B1, B2, B3)

Aufgabe B2 (Analytische Geometrie):

geg. Punkte A_u(-2|-4u|1), B_u (2u|-4|4), C(4|0|4), u∈R, im kartesischen Koordinatensystem,
Ebene ε_u enthält A_u, B_u, C,
weiterhin Gerade g: **x**(r) = [[8],[0],[5]] + r*[[4],[0],[1]], r∈R,

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Nachweis, dass g∈ε_u für u=3 und u=-1

Lösung:

Eine Ebenengleichung: **x**(s,t) = C + s*A_uC + t*B_uC, s,t∈R, d.h.

x(s,t) = [[4],[0],[4]] + s*[[4+2],[0+4u],[4-1]] + t*[[4-2u],[0+4],[4-4]] = **x**(r) = [[8],[0],[5]] + r*[[4],[0],[1]]
(Ansatz für g∈ε_u)

Ersichtlich: A_uC = [[6],[4u],[3]] und B_uC = [[4-2u],[4],[0]] sind linear unabhängig (s. 3. Koordinate)

Fall u=3:

[[4],[0],[4]] + s*[[6],[12],[3]] + t*[[-2],[4],[0]] = [[8],[0],[5]] + r*[[4],[0],[1]] ergibt das System

s*[[6],[12],[3]] + t*[[-2],[4],[0]] - r*[[4],[0],[1]] = [[8],[0],[5]]-[[4],[0],[4]] = [[4],[0],[1]],

d.h. die Matrixgleichung

[[6,-2,-4],[12,4,0],[3,0,-1]] * [[s],[t],[r]] = [[4],[0],[1]].

Hieraus folgt mit dem rref-Befehl die mehrdeutige Lösung:

rref([[6,-2,-4,4],[12,4,0,0],[3,0,-1,1]]) ergibt [[1,0,-1/3,1/3], [0,1,1,-1], [0,0,0,0]]

r∈R und t=-r-1, s=(r+1)/3.

Probe:

[[8],[0],[5]]+r*[[4],[0],[1]] ergibt [[4*r+8],[0],[r+5]]
[[4],[0],[4]]+s*[[4+2],[0+4*u],[4-1]]+t*[[4-2*u],[0+4],[4-4]] | {u=3,s=(r+1)/3,t=-r-1}
ergibt [[4*(r+1)+4],[0],[r+5]]

Damit liegen alle Punkte der Geraden in der Ebene ε_3, d.h. g liegt in ε_3.

Fall u=-1:

[[4],[0],[4]] + s*[[6],[-4],[3]] + t*[[6],[4],[0]] = [[8],[0],[5]] + r*[[4],[0],[1]] ergibt das System

s*[[6],[-4],[3]] + t*[[6],[4],[0]] - r*[[4],[0],[1]] = [[8],[0],[5]]-[[4],[0],[4]] = [[4],[0],[1]],

d.h. die Matrixgleichung

[[6,6,-4],[-4,4,0],[3,0,-1]] * [[s],[t],[r]] = [[4],[0],[1]].

Hieraus folgt mit dem rref-Befehl die mehrdeutige Lösung:

rref([[6,6,-4,4],[-4,4,0,0],[3,0,-1,1]]) ergibt [[1,0,-1/3,1/3],[0,1,-1/3,1/3],[0,0,0,0]]

$r \in R$ und t=(r+1)/3, s=(r+1)/3.

Probe:

[[8],[0],[5]] + r*[[4],[0],[1]] ergibt [[4*r+8],[0],[r+5]]
[[4],[0],[4]]+s*[[4+2],[0+4*u],[4-1]]+t*[[4-2*u],[0+4],[4-4]] | {u=-1,s=(r+1)/3,t=(r+1)/3}
ergibt [[4*(r+1)+4],[0],[r+5]]

Damit liegen alle Punkte der Geraden in der Ebene ε_{-1}, d.h. g liegt in ε_{-1}.

Pflichtaufgabe 2.2

geg. D_t(t|t^2|4), $t \in R$,

ges. $t \in R$ mit $D_t \in \varepsilon_u$ mit u=3 (genau zwei Lösungen), Koordinaten der Lösungspunkte

Lösung:

Ansatz: [[4],[0],[4]] + a*[[4+2],[0+4u],[4-1]] + b*[[4-2u],[0+4],[4-4]] = [[t],[t^(2)],[4]]
(linke Seite: ε_u, rechte Seite D_t)

mit u=3:

[[4],[0],[4]] + a*[[6],[12],[3]] + b*[[-2],[4],[0]] = [[t],[t^(2)],[4]], d.h.

nichtlineares System:

solve({4+6*a-2*b=t,12*a+4*b=t^2,4+3*a=4},{a,b,t}) ergibt {{a=0,b=1,t=2},{a=0,b=4,t=-4}}

a=0 erkennt man in der 3. Einzelgleichung sofort.
Dann in 2. Einzelgleichung b=t^2/4.
Eingesetzt in 1. Einzelgleichung: 4-t^(2)/2=t,
Hieraus: t^2+2t-8=0 und somit $t_{1,2}$ = -1±3 = {-4, 2}

Ergebnis:

für t=-4: D_{-4}(-4|16|4), für t=2: D_2(2|4|4) ges. $t \in [-4;2]$ derart, dass Abstand D_t zu ε_3 maximal wird

Lösung:

Der Abstand D_t zu ε_3 ist bestimmt durch die (vorzeichenbehaftete) Höhe eine Spates aus den Richtungsvektoren der Ebene und dem Differenzvektor CD_t (Hessesche Normalform):

dotP(crossP([[6],[12],[3]], [[-2],[4],[0]]), [[4],[0],[4]]-[[t],[t^2],[4]])) /
(norm(crossP([[6],[12],[3]],[[-2],[4],[0]]))) = (6*t^2+12*(t-4)) / (6*√(69)) → max

Rechnung im GTR(CAS):

dotP(crossP([[6],[12],[3]],[[-2],[4],[0]]),[[4],[0],[4]]-[[t],[t^2],[4]]) ergibt 6*t^2+12*(t-4)
norm(crossP([[6],[12],[3]],[[-2],[4],[0]])) ergibt 6*69^(1/2)

Der Term abs(6*t^2+12*t-48) wird maximal für t=-1, genau die Intervallmitte,
da die Intervallgrenzen die Nullstellen sind:
6*t^2 + 12*t – 48 | t=-4 ergibt 0
6*t^2 + 12*t – 48 | t=2 ergibt 0

Rechnung im GTR(CAS):

fMin(6*t^2+12*t-48,t,-4,2) ergibt {MinValue=-54,t=-1}
fMax(6*t^2+12*t-48,t,-4,2) ergibt {MaxValue=0,t=-4,t=2}

Damit wird für t = -1 der Maximalabstand erreicht.

Pflichtaufgabe 2.3

geg. $P_1(4|0|-6)$ und $P_2(4|-6|-3)$ (benachbarte Rechteckpunkte)
P_3 und P_4 liegen auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung.

ges. Umfang des Rechtecks

Lösung:

Elementare Lösung:

Für das Rechteck ist mit P_1 und P_2 eine Seitenlänge gegeben:

$\|P_1P_2\|$ = √(0^2+(-6)^2+3^2) = √(45)

Die Seitenlänge einer orthogonalen Seite P_2P_3 (oder P_1P_4) entspricht dem Abstand der Geraden durch P_1 und P_2 zum Koordinatenursprung O.
Es sei L der Lotfußpunkt von O auf diese Gerade.
Dann gilt:
$OL \perp P_1P_2$, $OL \circ P_1P_2 = 0$ (Zahl Null, Skalarprodukt) und
$L = P_1 + t{*}P_1P_2$ mit einem passenden $t \in R$.

Ansatz für L: L(a,b,c)

CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

Rechnung im GTR(CAS):

[[4,0,-6]]$\Rightarrow P_1$ [[4,-6,-3]]$\Rightarrow P_2$ [[a,b,c]]$\Rightarrow$L

L-P_1-t*(P_2-P_1) ergibt [[a-4,b+6*t,c-3*t+6]]
dotP(L,P_2-P_1) ergibt -6*b+3*c
solve({a-4=0,b+6*t=0,c-3*t+6=0,-6*b+3*c=0},{a,b,c,t}) ergibt {a=4,b=-12/5,c=-24/5,t=2/5}
2*45^(1/2)+2*norm(L)|{a=4,b=-12/5,c=-24/5}$\Rightarrow$Umfang ergibt 8*70^(1/2)/5 + 6*5^(1/2)
approx(ans) ergibt 26.80296829

Der Umfang des Rechtecks beträgt 26,8 Längeneinheiten.

Alternativer Lösungsweg (ohne Nutzung eines Hilfspunktes L):

Ansatz: P_4(a|b|c) und P_3(t*a|t*b|t*c),
da P_3 und P_4 auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung liegen.

zwei Orthogonalitätsbedingungen in P_1 und P_2:

$P_1P_4 \perp P_1P_2$, d.h. $P_1P_4 \cdot P_1P_2 = 0$ (Zahl Null, Skalarprodukt)
$P_2P_1 \perp P_2P_3$, d.h. $P_2P_1 \cdot P_2P_3 = 0$ (Zahl Null, Skalarprodukt)

Die Punkte liegen in einer Ebene,
d.h. die Vektoren P_1P_2, P_1P_3 und P_1P_4 sind linear abhängig:
det(P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4) = 0 (Determinantenbedingung)

und Normbedingungen (gleiche Längen gegenüberliegender Seiten):
$\|P_1P_2\|^2 = \|P_3P_4\|^2$ sowie $\|P_2P_3\|^2 = \|P_1P_4\|^2$

Hieraus (Nutzung ausgewählter Bedingungen):

Rechnung im GTR(CAS):

[[4,0,-6]]$\Rightarrow P_1$ [[4,-6,-3]]$\Rightarrow P_2$ [[a,b,c]]$\Rightarrow P_3$ [[t*a,t*b,t*c]]$\Rightarrow P_4$

Zwei Orthogonalitätsbedingungen:

simplify(dotP(P_4-P_1,P_2-P_1))=0$\Rightarrow$G1 ergibt -6*b*t+3*c*t+18=0
simplify(dotP(P_1-P_2,P_3-P_2))=0$\Rightarrow$G2 ergibt 6*b-3*c+27=0

Zwei Normbedingungen:

(norm(P_2-P_1))^2-(norm(P_4-P_3))^2=0$\Rightarrow$G ergibt -(a^2+b^2+c^2)*(t-1)^2+45=0
(norm(P_4-P_1))^2-(norm(P_3-P_2))^2=0$\Rightarrow$G3 ergibt
t^2*(a^2+b^2+c^2)-a^2-b^2-c^2-t*(8*a-12*c)+8*a-12*b-6*c-9=0

Es gilt $\|P_1P_2\|^2 = \|P_3P_4\|^2$, d.h. mit Gleichung G:

(a^2+b^2+c^2)*(t-1)^2=45, d.h. mit t≠1 (da $P_3 \neq P_4$)

a^2+b^2+c^2 = 45/(t-1)^2

und es gilt damit in G3: $\|P_2P_3\|^2 = \|P_1P_4\|^2$, d.h.

t^2*45/(t-1)^2-45/(t-1)^2-t*(8*a-12*c)+8*a-12*b-6*c-9=0 ⇒ G3 ergibt
-t*(8*a-12*c) + 8*a-12*b-6*c + 45*t^2/(t-1)^2-45/(t-1)^2 – 9 = 0

weitere Vereinfachung von G3:
-t*(8*a-12*c)+8*a-12*b-6*c+((45*(t^2-1))/((t-1)^2))-9=0, d.h. wegen t≠1:
-t*(8*a-12*c)+8*a-12*b-6*c+45*(t+1)/(t-1)-9=0 ⇒ G3 ergibt
-t*(8*a-12*c) + 8*a-12*b-6*c + 45*(t+1)/(t-1) – 9 = 0

Determinantenbedingung:

det(augment(augment(trn(P_2-P_1),trn(P_3-P_1)),trn(P_4-P_1)))=0 ⇒ G4 ergibt
-36*a*t-12*b*t-24*c*t+36*a+12*b+24*c=0
factor(ans)⇒G4 ergibt -12*(t-1)*(3*a+b+2*c)=0

Wegen t≠1:
3*a+b+2*c=0⇒G4 ergibt 3*a+b+2*c=0

Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems:

solve({G1,G2,G3,G4},{a,b,c,t}) ergibt {a=0,b=-18/5,c=9/5,t=-2/3}

Damit ergibt sich folgender Umfang:

2*norm(P_2-P_1)+2*norm(P_4-P_1)|{a=0,b=-18/5,c=9/5,t=-2/3} ergibt 8*70^(1/2)/5+6*5^(1/2)
approx(ans) ergibt 26.80296829

Der Umfang des Rechtecks beträgt 26,8 Längeneinheiten.

Zusatz:

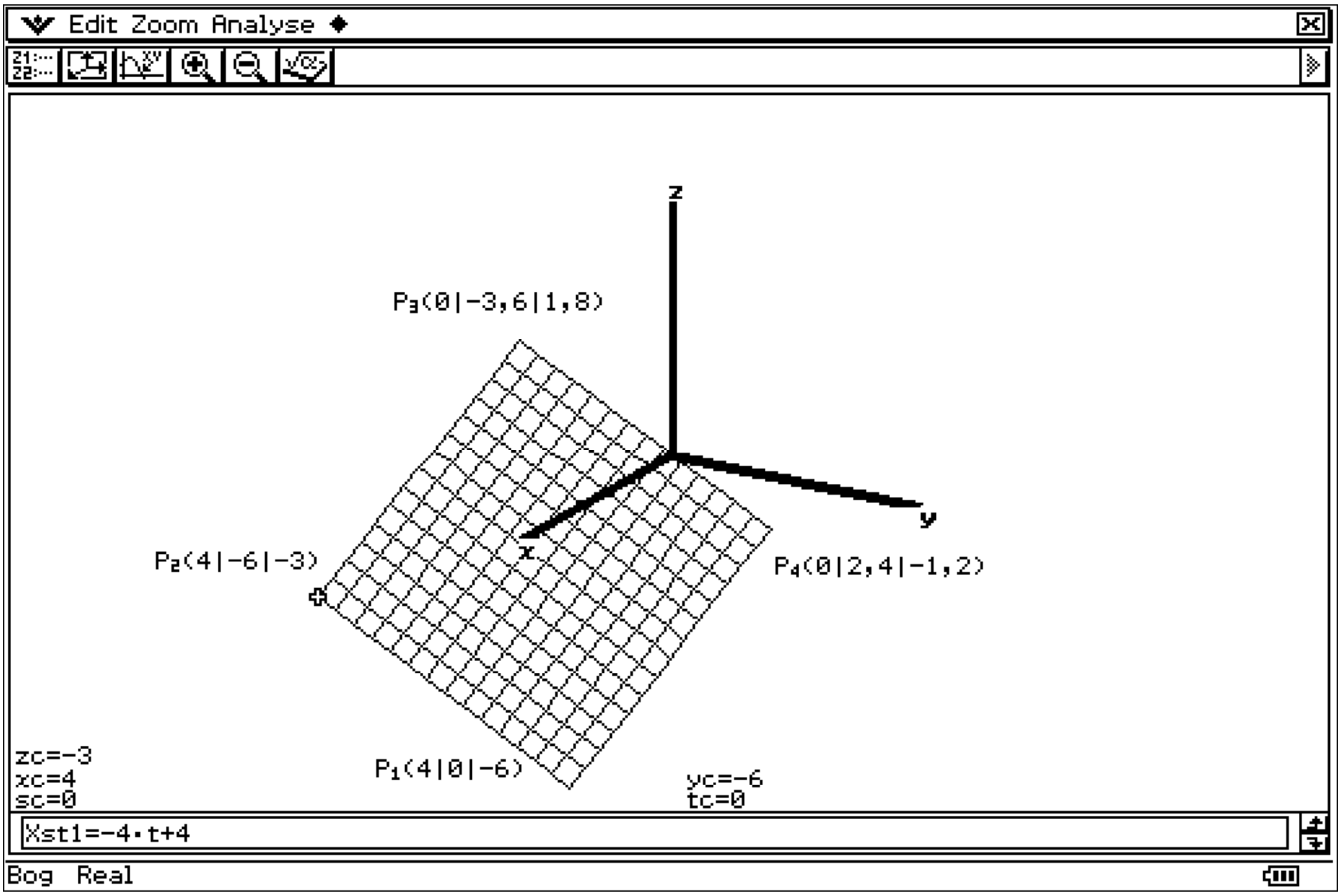
3D-Darstellung des Rechtecks als Teil einer Ebene:

$\mathbf{x}(s,t) = P_2 + s*P_2P_1 + r*P_2P_3$, $0 \le s,r \le 1$,

P_2+s*(P_1-P_2)+r*(P_3-P_2)|{a=0,b=-18/5,c=9/5,t=-2/3} ergibt [[-4*r+4,12*r/5+6*s-6,24*r/5-3*s-3]]
trn(ans)|r=t ergibt [[-4*t+4],[6*s+12*t/5-6],[-3*s+24*t/5-3]]

P_1 | {a=0,b=-18/5,c=9/5,t=-2/3}	ergibt	[[4,0,-6]]
P_2 | {a=0,b=-18/5,c=9/5,t=-2/3}	ergibt	[[4,-6,-3]]
P_3 | {a=0,b=-18/5,c=9/5,t=-2/3}	ergibt	[[0,-3.6,1.8]]
P_4 | {a=0,b=-18/5,c=9/5,t=-2/3}	ergibt	[[0,2.4,-1.2]]

3D-Darstellung des Rechtecks:



Pflichtaufgabe 2.4

ges. Nachweis der linearen Unabhängigkeit (bzw. Abhängigkeit) der Vektoren CA_u und CB_u

Lösung:

[[4,0,4]]⇒C   [[-2,-4*u,1]]⇒Au   [[2*u,-4,4]]⇒Bu

Au-C ergibt [[-6,-4*u,-3]]
Bu-C ergibt [[2*u-4,-4,0]]

Mit Blick auf die jeweils dritte Koordinate von CA_u und CB_u (-3 bzw. 0) erkennt man die lineare Unabhängigkeit der Vektoren, d.h. $CA_u \neq t*CB_u$.

Damit ist die Aussage "CA_u und CB_u sind linear abhängig" falsch.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Leistungskurs(LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (Wahlaufgaben B1, B2, B3)

Aufgabe B3 (Stochastik):

geg. Staubsaugerproduktion mit zweistufiger Qualitätskontrolle
unabhängige Ereignisse
M := {mechanische Belastbarkeitsprüfung bestanden}
S := {Saugleistungsprüfung bestanden}

Pflichtaufgabe 3.1

geg. P(nichtM) = 0,055, P(S) = 0,90

ges. Baumdiagramm, Wahrscheinlichkeiten für
A := {Staubsauger besteht beide Prüfungen} = $M \cap S$
B := {Staubsauger besteht genau eine Prüfung} = $(\text{nicht}M \cap S) \cup (\text{nicht}S \cap M)$

Lösung:

Baumdiagramm:

1.Stufe		2.Stufe	Wahrscheinlichkeit
		S	0.945 × 0.90
	↗		
M			
	↘		
		nichtS	0.945 × 0.10
		S	0.055 × 0.90
	↗		
nichtM			
	↘		
		nichtS	0.055 × 0.10

$P(M \cap S) = P(M) \times P(S) = 0.945 \times 0.90 = 0.8505 \approx \mathbf{0.85}$

und

$P((\text{nicht}M \cap S) \cup (\text{nicht}S \cap M))$
$\quad = P(\text{nicht}M \cap S) + P(\text{nicht}S \cap M)$

= P(nichtM)×P(S) + P(nichtS)×P(M)
= 0.055×0.90 + 0.945×0.10
= **0.144**

Rechnung im GTR(CAS):

0.945*0.9 ergibt 0.8505
0.055*0.9+0.945*0.1 ergibt 0.144

Pflichtaufgabe 3.2

geg. Q := {Staubsauger ist Qualität I} = $M\cap S$
Stichprobenumfang n:
Zufallsgröße S_n: zufällige Anzahl der Staubsauger mit Qualität I
$S_n \in \{0,1,2,...,n\}$
p = P(Q) = $P(M\cap S)$ (Erfolgsquote)
Sn ist binomialverteilt mit den Parametern n und p.

Teilaufgabe 3.2.1

geg. p = 0.85, n = 50

ges. Erwartungswert $E(S_n)$, $P(40\le S_n<45)$

Lösung:

$E(S_n) = n\times p = 50\times 0.85 = 42.5$

$P(40\le S_n<45)$ = binomialCDf(44,n,p) - binomialCDf(39,n,p) = 0.66

Rechnung im GTR(CAS): vgl. auch geg. Tabelle

50⇒n 0.85⇒p
binomialCDf(44,n,p)-binomialCDf(39,n,p) ergibt 0.6607293474

ges. "minimales" k mit $P(S_n\ge k) > 0{,}97 > P(S_n>k)$

Lösung:

$P(S_n\ge k) > 0{,}97 > P(S_n>k)$ bedeutet $P(S_n<k) < 0{,}03 < P(S_n\le k)$

Das 3%-Quantil hat den Wert k=37:

Rechnung im GTR(CAS): vgl. auch geg. Tabelle

invBinomialCDf(0.03,n,p)⇒k ergibt 37

binomialCDf(k-1,n,p) ergibt 0.01316606873
binomialCDf(k,n,p) ergibt 0.03006052822

Hieraus ergibt sich:

$P(Sn \geq 38)=0.9699394718<0.97$
$P(Sn \geq 37)=0.9868339313>0.97$

Mit der Minimalanzahl k=37 an Staubsaugern der Qualität I (höchstens 13 Staubsauger schlechterer Qualität) unter n=50 Staubsaugern wird das Wahrscheinlichkeitsniveau von 97% erreicht.

Teilaufgabe 3.2.2

geg. P({nicht alle Staubsauger besitzen die Qualität I}) = 0,99,
d.h. $P(S_n<50)=0{,}99$. (n=50)
ges. Erfolgsqote p

Lösung:

$P(S_n=50) = 1-0{,}99 = 0{,}01 = P(Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_{50}) = p\hat{}(50)$

Hieraus folgt

p = 0.01^(1/50) = **0.912**

Rechnung im GTR(CAS):

0.01^(1/50) ergibt 0.9120108394

Teilaufgabe 3.2.3

geg. p = 0,99
ges. mit $P(Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n) = p\hat{}n \approx 0{,}80$

Lösung:

$p\hat{}(n) \geq 0{,}80$ | ln

ergibt

$n \times \ln(p) \geq \ln(0.80)$ und $n \leq \ln(0.80)/\ln(0.99) \approx$ **22**

Antwort: Die Anzahl n beträgt (höchstens) 22,
um die Wahrscheinlichkeit von 0,80 einzuhalten.

Rechnung im GTR(CAS):

ln(0.8)/ln(0.99) ergibt 22.20259647

Probe:

0.99^22 ergibt 0.8016305895
0.99^23 ergibt 0.7936142836

Pflichtaufgabe 3.3

Parametertest (Hypothesentest) eines Großhändlers mit Stichprobenumfang n=50,
hierbei q = 1 - p = P(nichtQ) = P({Staubsauger ist nicht Qualität I})
Nullhypothese H_0: q = q_0 = 0,10 unf H_a: q > q_0 = 0,10

Teilaufgabe 3.3.1

ges. Beschreibung des Fehlers 1. Art (im gegebenen Sachzusammenhang)

Lösung:

Der **Fehler 1. Art** beinhaltet die Ablehnung von H_0, obwohl H_0 zutrifft, d.h. der Hersteller hat die Quote q = 0,10 eingehalten, aber im konkreten Test wurden zufällig zu viele minderwertige Geräte gefunden und es kommt zu einer Ablehnung von H_0.

Teilaufgabe 3.3.2

geg. Signifikanzniveau α = 0.10, n=50, Sn=40 bzw. T_n=50-Sn=10 minderwertige Geräte
(Irrtumswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art)

ges. Testentscheidung

Lösung:

Die Testgröße T_n ist unter H_0 B(q,n)=B(0.10,50) verteilt.
Der kritische Bereich K* = {T_n | T_n > b} hat die Wahrscheinlichkeit P(K*)≤α, wobei b das Quantil der Ordnung 1-α der B(0.10,50)-Verteilung ist.

Rechnung im GTR(CAS): vgl. auch geg. Tabelle

b=invBinomialCDf(0.9,50,0.1) ergibt b=8

Damit ist der mit der ausgewerteten Stichprobe ermittelte **Testwert T_n=10 kritisch**, d.h. es handelt sich hier um eine wesentliche (signifikante) Abweichung (Signifikanzniveau α = 0.10) von der Nullhypothese, die damit abgelehnt werden muss.