Mecklenburg-Vorpommern

Zentralabitur 2008

Mathematik

Aufgaben

Name, Vorname: ....

Aufgabe A0 (beinhaltet die Aufgaben 1-3 des Arbeitsblattes)

Arbeitsblatt

Dieses Arbeitsblatt ist vollständig und ohne Zuhilfenahme von Tafelwerk und Taschenrechner zu bearbeiten. Das Arbeitsblatt wird nach einer Bearbeitungszeit von genau 45 Minuten eingesammelt. Zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Arbeitsblatt einzulegen.

1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+5 \text{ mit } x\in\mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

1.2 Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung

$$h(x)=\frac{x^2-49}{x-7} \text{ mit } x\in D_h.$$

Geben Sie die Nullstelle von h an.

1.3 Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = (x-2)(x+2) \text{ mit } x\in\mathbb{R}.$$

- Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' von f.
- Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1.4 In den Abbildungen sind die Graphen einer ganzrationalen Funktion f, der zugehörigen Ableitungsfunktion f′ und einer weiteren Funktion g dargestellt.

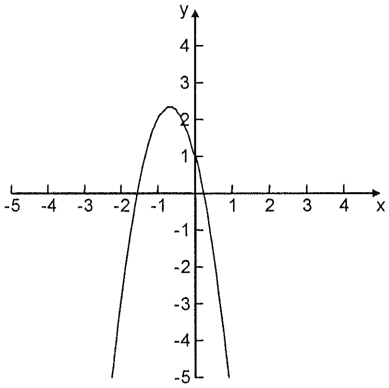


Abbildung 1

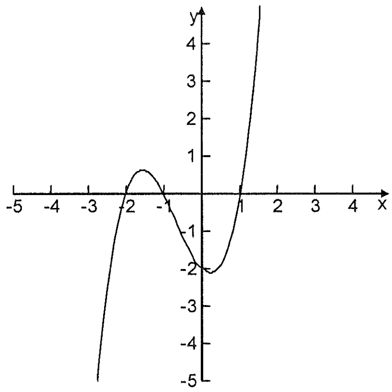


Abbildung 2

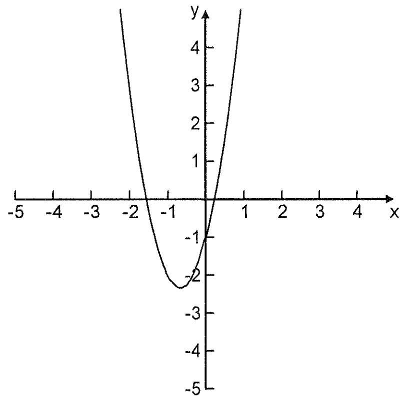


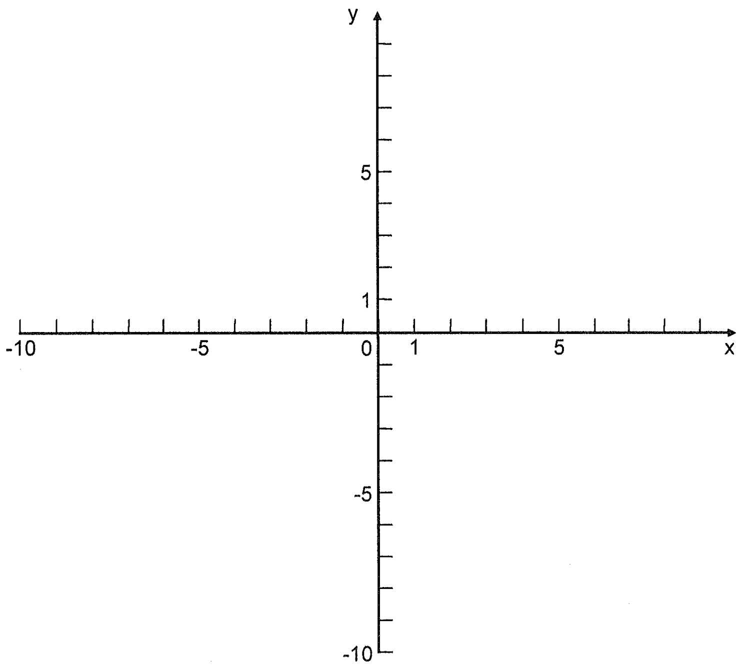
Abbildung 3

Ordnen Sie den Abbildungen die Funktionen f und f' zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.5 Gegeben ist eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- Eine Polstelle von f ist 2.
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 3$
- Eine Nullstelle von f ist −1.

Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit diesen Eigenschaften.



2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines ebenen Vierecks ABCD gegeben:
$A(4 \mid 1 \mid 2)$, $B(2 \mid 3 \mid 2)$, $C(2 \mid 1 \mid 4)$, $D(4 \mid -1 \mid 4)$.

2.1
- Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm handelt.
- Prüfen Sie, ob dieses Viereck sogar ein Rechteck ist.
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes.

2.2 Gegeben ist ein weiterer Punkt $E(3 \mid 2 \mid 1)$.
Untersuchen Sie, ob E auf der Viereckseite $\overline{AB}$ liegt.

3 Stochastik

Eine Firma stellt an jedem Arbeitstag (Montag bis Freitag) gleich viele Handys her.
Die regelmäßig durchgeführte Gütekontrolle ergibt, dass jeweils die am Montag hergestellten Handys mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft sind.
An den anderen Arbeitstagen (Dienstag bis Freitag) liegt die Fehlerquote in der Produktion jeweils bei 5 %.
Der Produktion einer Woche wird zufällig ein Handy entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A – Das entnommene Handy ist fehlerfrei und wurde am Montag produziert.
B – Das entnommene Handy ist fehlerfrei.

Hinweise für Schüler

Aufgabenauswahl:

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.
Der Teil A ist von allen Prüfungsteilnehmern zu bearbeiten.
Von den Aufgaben A1, A2 und A3 sind **zwei** auszuwählen.

Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, bearbeiten zusätzlich den Prüfungsteil B. Von den Aufgaben B1, B2 und B3 ist **eine** auszuwählen.

Bearbeitungszeit:

Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Grundkursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 195 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Prüfungsteilnehmern, die die Prüfung unter Leistungskursanforderungen ablegen, steht eine Bearbeitungszeit von 255 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind zugelassen:

- das an der Schule eingeführte Tafelwerk,
- der an der Schule zugelassene Taschenrechner und das an der Schule zugelassene CAS,
- Zeichengeräte
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Hinweis:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen.
In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.
Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa drei Viertel des zu erreichenden Gesamtumfanges beinhaltet.

Sonstiges:

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei

- guter Notation und Darstellung,
- eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen,
- vollständiger Lösung einer zusätzlichen Wahlaufgabe.

Schwerwiegende und gehäufte Verstöße gegen die sprachliche Richtigkeit oder gegen die äußere Form werden entsprechend der geltenden Prüfungsbestimmungen gewertet.

A1 Analysis

1.1 Geben Sie die maximale Anzahl der Extremstellen an, die eine ganzrationale Funktion 3. Grades haben kann.
Begründen Sie ihre Entscheidung.

1.2 Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Ihr Graph ist G.

1.2.1 Geben Sie die Nullstellen dieser Funktion an.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch G und die x-Achse vollständig begrenzt wird.

Eine weitere Fläche befindet sich vollständig im ersten Quadranten.
Sie wird durch G, die Koordinatenachsen und eine senkrechte Gerade $x = k$ begrenzt.
Ihr Flächeninhalt beträgt 30 FE.
Berechnen Sie k.

1.2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente und die Gleichung der Normalen, die durch den Wendepunkt verläuft.

1.2.3 Ein Dreieck OAB entsteht durch den Koordinatenursprung O, den Schnittpunkt A des Graphen mit dem positiven Teil der x-Achse und den Punkt B.
Der Punkt B liegt im ersten Quadranten auf G.
Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

1.3 Gegeben ist eine Funktionenschar g_a durch die Gleichung

$$g_a(x) = \frac{a}{30}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \text{ mit } x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ a > 0.$$

Beschreiben Sie das Krümmungsverhalten der Graphen dieser Schar.

A2 Analytische Geometrie

Zur Herstellung von Modeschmuck werden pyramidenförmige Körper benötigt. Eine solche Pyramide ABCDS besitzt die Grundfläche ABCD mit den Eckpunkten $A(4 \mid -3 \mid 2)$, $B(7 \mid 1 \mid 0)$, $C(4 \mid 3 \mid -1)$, $D(1 \mid 1 \mid 0)$ und die Spitze $S(4 \mid 4 \mid 11)$. Die Koordinatenangaben beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem.

2.1 Zeichnen Sie den Körper ABCDS.
Bestätigen Sie die Tatsache, dass die Punkte A, B, C und D in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD die Form eines Drachenvierecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABS.
Weisen Sie nach, dass der Punkt $L(4 \mid -1 \mid 1)$ der Höhenfußpunkt der Pyramide ABCDS ist.
Berechnen Sie das Volumen des Schmuckstücks, wenn 1 LE $\hat{=}$ 1 mm gilt.

2.3 Ein ebener Schnitt durch die Punkte B, D und $R(1{,}5 \mid 0{,}75 \mid 3{,}25)$ schneidet die Kante $\overline{AS}$ in einem Punkt P und zerlegt das Schmuckstück in zwei Teilkörper.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.
Untersuchen Sie, welche besondere Form das Dreieck BDP aufweist.

2.4 Es gibt Ebenen, die den Körper ABCDS in zwei volumengleiche Teile zerlegen.
Beschreiben Sie die Lage einer solchen Ebene und begründen Sie Ihre Entscheidung.

A3 Stochastik und Analysis

3.1 Zur Herstellung von Taschenlampen werden unter anderem je acht Leuchtdioden (LED) und eine Batterie pro Lampe gebraucht. Erfahrungsgemäß sind von den zu verwendenden LED 1 % defekt. Von den Batterien funktionieren etwa 2 % nicht. Andere Fehler treten beim Bau der Lampen nicht auf.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig der laufenden Produktion entnommene Taschenlampe fehlerfrei ist.

3.2 Ein Großmarkt bekommt eine Sendung von 1000 Taschenlampen, von denen man weiß, dass etwa 7 % davon nicht fehlerfrei sind.

3.2.1 Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die zufällige Anzahl fehlerhafter Lampen in der gesamten Lieferung.

3.2.2 Der Lieferung werden 10 Lampen zufällig entnommen.
Berechnen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit.
A: Genau eine geprüfte Lampe ist fehlerhaft.
B: Höchstens zwei geprüfte Lampen sind fehlerhaft.
C: Von den geprüften Lampen sind mehr als zwei aber nicht mehr als 6 fehlerhaft.

3.2.3 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der fehlerhaften Lampen unter den 10 geprüften an.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Interpretieren Sie diese.

3.3 Der Großmarkt kann die Lampen auch von anderen Herstellern beziehen. Dabei kann der Anteil p der fehlerhaften Lampen an einer Lieferung je nach Hersteller verschieden sein.

3.3.1 Berechnen Sie für $p_1 = 0{,}2$ und für $p_2 = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 10 getesteten Lampen höchstens zwei fehlerhafte befinden.

3.3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion, die den Zusammenhang beschreibt zwischen dem Anteil fehlerhafter Lampen pro Lieferung und der Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Stichprobe vom Umfang 10 höchstens zwei fehlerhafte Lampen zu finden.

(mögliches Ergebnis: $f(p) = (p-1)^8 \cdot (36p^2 + 8p + 1)$)

Geben Sie Definitions- und Wertebereich dieser Funktion an.
Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion.
Formulieren Sie den dargestellten Zusammenhang.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1 (Analysis):

Pflichtaufgabe 1.1

geg. Funktion y = f(x) = (1/2)*x^3 - 3x^2 + 5, x∈R.

ges. Koordinaten des Wendepunktes von f

Lösung:
zweite Ableitung auf Null setzen:
y' = (3/2)*x^2 - 3×2x, y'' = 3x - 6 = 0
ergibt
3x = 6, d.h. **x = 2**.

Die 3. Ableitung ist verschieden von 0, d.h. **W(2;f(2)) mit f(2) = -3** ist der gesuchte Wendepunkt.

Nebenrechnung: f(2) = (1/2)×2^3-3×2^2+5 = 4 - 12 + 5 = -3

Kontrolle im GTR(CAS):
Define f(x) = ((1)/(2))x^(3)-3x^(2)+5
done
diff(f(x),x,2)=0 ergibt -6+3*x=0
solve(ans,x) ergibt {x=2}
f(2) ergibt -3

Pflichtaufgabe 1.2

geg. h(x) = (x^2 - 49) / (x - 7) mit x∈D(h)

ges. Nullstelle von h

Lösung:
x=7 ist eine Definitionslücke und kommt als Nullstelle nicht in Frage.
x=-7 ist die gesuchte Nullstelle.

Kontrolle im GTR(CAS):

Define h(x) = (x^2-49)/(x-7)

done

solve(h(x)=0,x) ergibt {x=-7}

Pflichtaufgabe 1.3

geg. f(x) = (x-2)(x+2), $x \in R$.

ges. Ableitung f'(x) und Integral ∫(f(x),x,0,1)

Lösung:

f(x) = x^(2)-4 (3. binomische Formel)

f'(x) = 2*x

und

∫(f(x),x,0,1) = ∫((x^2-4),x,0,1)

= ((1/3)x^3-4x)|x=1 - ((1/3)x^3-4x)|x=0 = 1/3-4 = -11/3

Kontrolle im GTR(CAS):

Define f(x) = (x-2)(x+2)

done

diff(f(x),x,1) ergibt 2*x

∫(f(x),x,0,1) ergibt -11/3

Pflichtaufgabe 1.4

geg. drei Schaubilder einer ganzrationalen Funktion f,
deren Ableitung f' und eine weitere Funktion g

Graphen zu f, f' und g:

Es gilt: Nullstellen der ersten Ableitung weisen auf Extremstellen der Ausgangsfunktion hin. Der mittlere Graph hat zwei Extrempunkte, d.h. Abb. 2 beschreibt f und Abb. 1 oder Abb. 3 sind die Ableitung. Der erste Extrempunkt ist ein Minimum, links von x_{min} ist der Anstieg positiv, rechts davon negativ. Somit ist Abb. 3 die Ableitung f’ und Abb. 1 damit g = –f’ (f’ gespiegelt).

Beispiele für f, f’ und g:

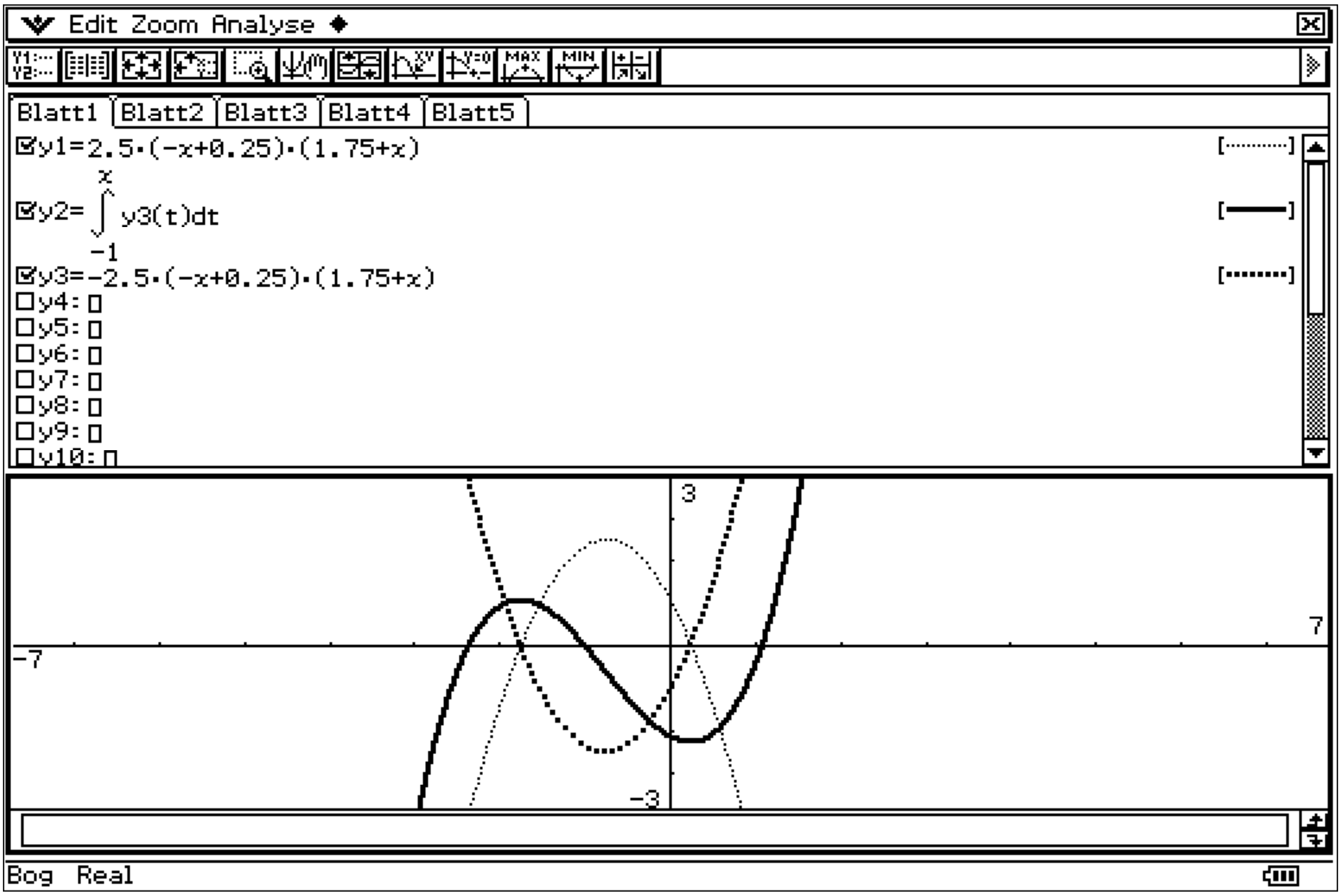


Abb. 1: g(x) = 2.5*(-x+0.25)*(1.75+x)

Abb. 2: f(x) = ∫(f'(x),x,-1,x) = ∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x)
= 5*x^3/6 + 15*x^2/8 - 35*x/32 - 205/96

Abb. 3: f'(x) = -2.5*(-x+0.25)*(1.75+x)

Rechnung im GTR(CAS):

∫(-2.5*(-t+0.25)*(1.75+t),t,-1,x) ergibt 5*x^3/6+15*x^2/8-35*x/32-205/96

Pflichtaufgabe 1.5

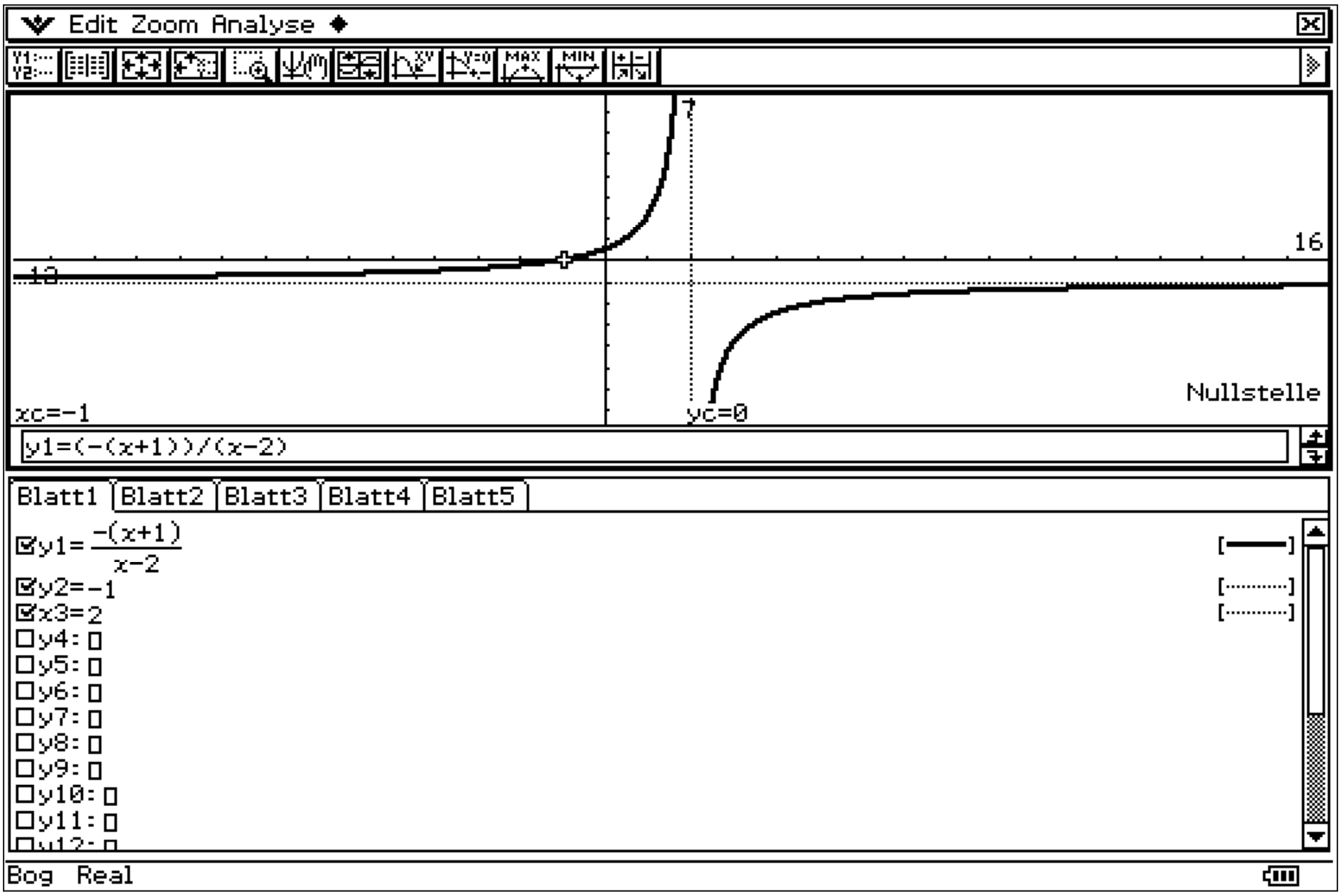
geg. Funktion f mit drei Eigenschaften:

- Polstelle ist x=2
- Nullstelle ist x=-1
- Grenzwert ist lim(f(x),x,∞)= -1

ges. Skizze zu f (eine mögliche Lösung)

Lösung:

Skizze zu f



eine analytische Lösung: f(x) = - (x+1)/(x-2)

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 2 (Analytische Geometrie):

geg. ebenes Viereck ABCD im kartesischen Koordinatensystem mit
A(4|1|2), B(2|3|2), C(2|1|4), D(4|-1|4)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Parallelogramms

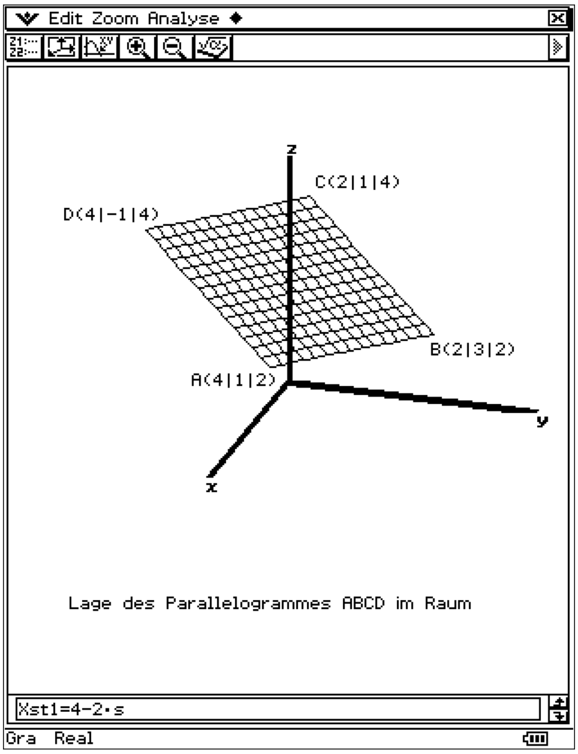
Lösung:

Seitenlängen (Normen der Vektoren zwischen zwei Punkten)
||AB|| = ||B-A|| = √((-2)^2+2^2+0^2) = √(8), AB liegt in Höhe z=2,
||BC|| = ||C-B|| = √(0^2+(-2)^2+2^2) = √(8),
||CD|| = ||D-C|| = √(2^2+(-2)^2+0^2) = √(8), CD liegt in Höhe z=4,
||DA|| = ||A-D|| = √(0^2+2^2+(-2)^2) = √(8).

AB und CD sind parallel und von gleicher Länge, damit sind es wegen der gleichen Seitenlängen auch BC und DA.

Es liegt ein Parallelogramm vor.

(Die Untersuchung zweier paralleler Seiten ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)



ges. Untersuchung auf Vorliegen eines Rechteckes

Lösung:

Winkel: Skalarprodukte der normierten Vektoren betrachten

$\cos(\measuredangle DAB) = \frac{1}{\sqrt{8}\times\sqrt{8}}\times[[0],[-2],[2]]\circ[[-2],[2],[0]] = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \neq 0$

$\cos(\measuredangle ABC) = \frac{1}{\sqrt{8}\times\sqrt{8}}\times[[2],[-2],[0]]\circ[[0],[-2],[2]] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \neq 0$

$\cos(\measuredangle BCD) = \frac{1}{\sqrt{8}\times\sqrt{8}}\times[[0],[2],[-2]]\circ[[2],[-2],[0]] = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \neq 0$

$\cos(\measuredangle CDA) = \frac{1}{\sqrt{8}\times\sqrt{8}}\times[[-2],[2],[0]]\circ[[0],[2],[-2]] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \neq 0$

Damit liegen keine rechten Winkel vor.
(Die Untersuchung eines Winkels ist bereits ausreichend für die gegebene Antwort.)

Kontrolle im GTR(CAS):

[[4,1,2]] ⇒ A   [[2,3,2]] ⇒ B   [[2,1,4]] ⇒ C   [[4,-1,4]] ⇒ D

norm(B-A)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(C-B)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(D-C)	ergibt	2*2^(1/2)
norm(A-D)	ergibt	2*2^(1/2)
dotP(D-A,B-A)/8	ergibt	-1/2
dotP(A-B,C-B)/8	ergibt	1/2
dotP(B-C,D-C)/8	ergibt	-1/2
dotP(C-D,A-D)/8	ergibt	1/2

ges. Koordinaten des Diagonalschnittpunktes S:

Lösung:

S = A + AC/2 = A + (C-A)/2 = [[4],[1],[2]] + (1/2) × [[-2],[0],[2]] = [[3],[1],[3]]

Kontrolle im GTR(CAS):

A+(C-A)/2 ergibt [[3,1,3]]

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Lage des Punktes E(3|2|1) zur Seite AB

Lösung:

Geradengleichung für Seite AB ist $x(t) = A + t\times(B-A)$, $0\leq t>1$,

Untersuchung der Gleichung E = A + t×(B-A) bzw. E - A = t×(B-A), d.h.

[[3-4],[2-1],[1-2]] = t×[[2-4],[3-1],[2-2]] und zusammengefasst [[-1],[1],[-1]] = t×[[2],[2],[0]] .

Es gibt keine Lösung für t (Die Vektoren AB und AE sind linear unabhängig.),
d.h. E liegt nicht auf AB.

Andere (anschauliche) Lösung:

Die Seite AB liegt in Höhe z=2 und Punkt E liegt tiefer: z=1. Damit kann E nicht auf AB liegen.

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A0: (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 3 (Stochastik):

geg. Fehlerquote in der Produktion bei gleichem Produktionsumfang an allen Wochentagen (Mo bis Fr):

M_k = {Produkt am k-ten Wochentag hergestellt} mit $P(M_k) = 1/5 = 0{,}2$ für k=1,2,3,4,5.

C = {Produkt fehlerhaft}

$P(C|M_k) = 0{,}10$ und $P(C|M_k) = 0{,}05$ für k>1.

ges. Wahrscheinlichkeiten für

$A = M_k \cap \text{nicht}C$ sowie $B = \text{nicht}C$

Lösung:

Es gilt: $P(M_k) = P(M_k \cap \text{nicht}C) + P(M_k \cap C)$, d.h.

$P(A) = P(M_k \cap \text{nicht}C) = P(M_k) - P(M_k \cap C) = P(M_k) - P(C|M_k) \times P(M_k)$, d.h.

P(A) = 0,20 - 0,10×0,20 = 0,20 - 0,02 = **0,18** = 9/50 .

Weiter:

P(C) = ∑(P(C|Mk)×P(Mk),k,1,5) (Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)
= (1/5)×(0,10 + 4×0,05) = (1/5)×0,30 = 0,06.

Hieraus folgt **P(B) = P(nichtC) = 0,94** = 47/50 .

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A1 (Analysis):

Pflichtaufgabe 1.1

geg. ganzrationale Funktion 3. Grades y = p_3(x) = ∑(a_k*x^k,k,0,3)

ges. maximale Anzahl der Extremstellen, Begründung

Lösung:

Notwendige Bedingung für Extremstellen:
y' = p_3'(x) = ∑(k*a_k*x^(k-1),k,1,3) = 0,
d.h.
y' = 3*a_3*x^2 + 2*a_2*x + a_1 = 0.

Diese quadratische Nullstellengleichung hat höchstens 2 verschiedene reelle Lösungen.
Damit kann es höchstens 2 Extremstellen geben, sofern zusätzlich weitere Bedingungen erfüllt sind (hinreichende Bedingung.)

Pflichtaufgabe 1.2

geg. f(x) = -(1/60)x^3 - (1/20)x^2 + (3/2)x + 2, x∈R, wobei G den Graphen von f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.2.1

ges. Nullstellen von f

Lösung:

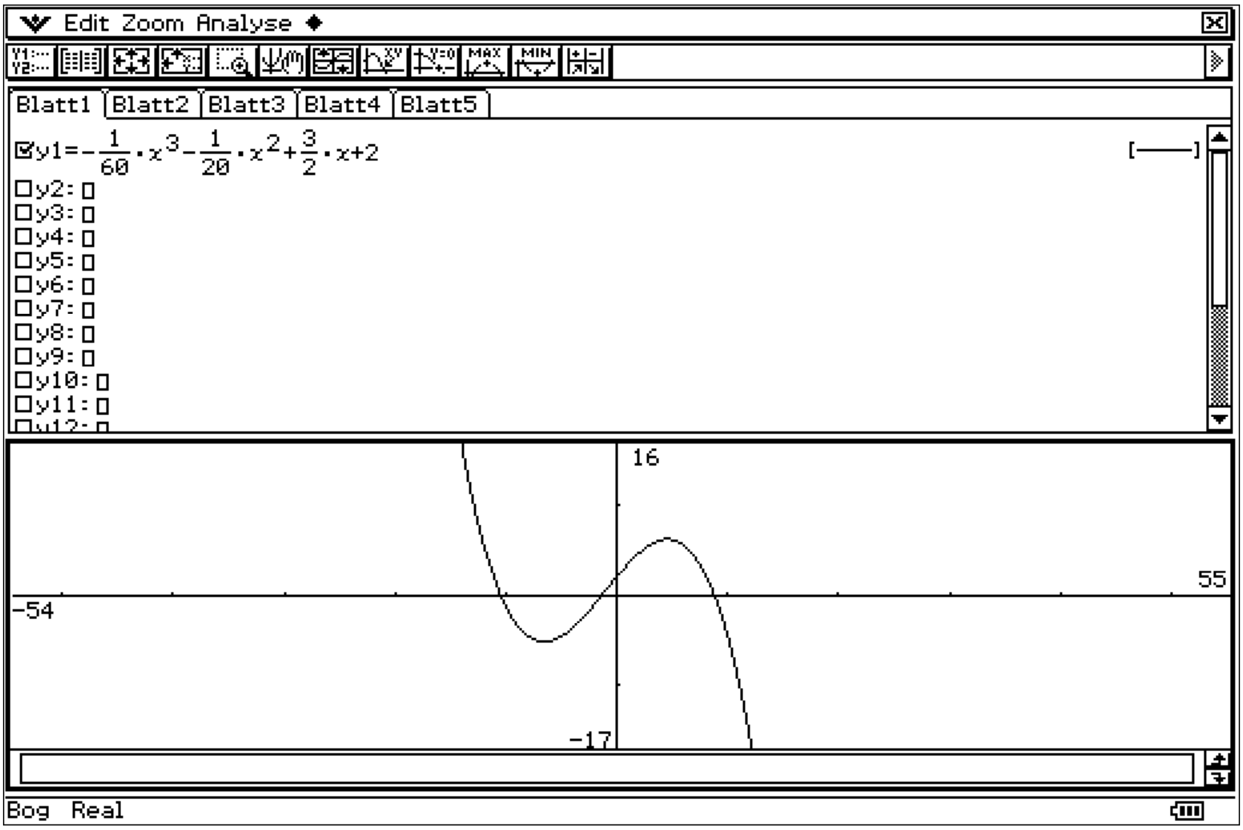
Rechnung im GTR(CAS):

Define f(x) = -(1/60)x^3 - (1/20)x^2 + (3/2)x + 2

done

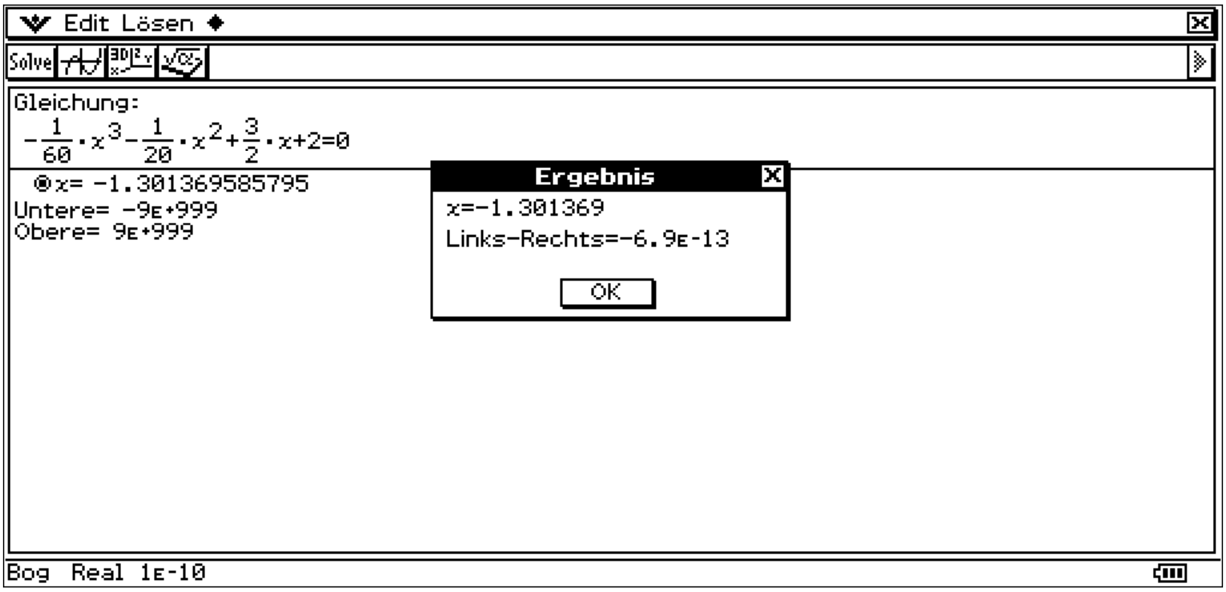
solve(f(x)=0,x) ergibt {x = -10.48943358, x = -1.301369586, x = 8.790803168}

Graph der Funktion:



Im folgenden Menü werden jeweils ein Startwert und ein Suchintervall benötigt, um die numerische Lösungssuche zu aktivieren:

Menü zur numerischen Lösung einer nichtlinearen Gleichung: (z.B. Startwert x=0)



Ergebnis:

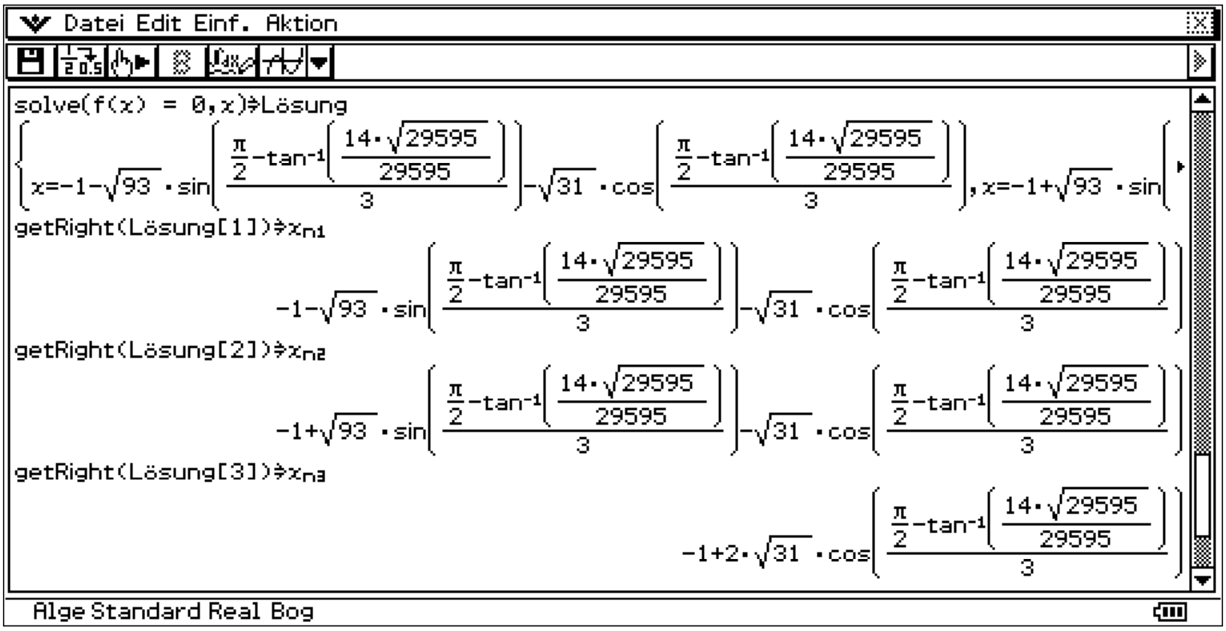
Es gibt 3 verschiedene reelle Nullstellen, wie im Schaubild erkennbar:
$x_{n1} = -10.48943358 \approx -10.49$, $x_{n2} = -1.301369586 \approx -1.30$, $x_{n3} = 8.790803168 \approx 8.79$

Da die Nullstellen nichtrational sind, handelt es sich um gerundete Werte.

Das CAS kann die exakten Lösungen angeben:

DelVar x

done



Mit den folgenden Abkürzungen erkennt man die Struktur der Zahlen:

(π/2 – $\tan^{-1}$(14 / 29595^(1/2))) / 3 $\Rightarrow$ φ

31^(1/2) $\Rightarrow$ r

Damit hat man die exakte Darstellung der Nullstellen:

x_{n1} = -1 - r*cos(φ) - 3^(1/2)*r*sin(φ)

x_{n2} = -1 - r*cos(φ) + 3^(1/2)*r*sin(φ)

x_{n3} = -1 + 2*r*cos(φ)

Probe: (Linearfaktoren wieder ausmultiplizieren)

DelVar x

done

(x - (-1-3^(1/2)*r*sin(φ) - r*cos(φ))) * (x - (-1+3^(1/2)*r*sin(φ) - r*cos(φ))) * (x - (-1+2*r*cos(φ)))

ergibt (x+10.48943358) * (x+1.301369586) * (x-8.790803168)

expand(ans) ergibt x^3 + 3*x^2 - 90*x - 120

expand(ans/(-60)) ergibt -0.01666666667*x^3 - 0.05*x^2 + 1.5*x+ 2

ans ergibt -x^3/60 - x^2/20 + 3*x/2 + 199999999999999/100000000000000

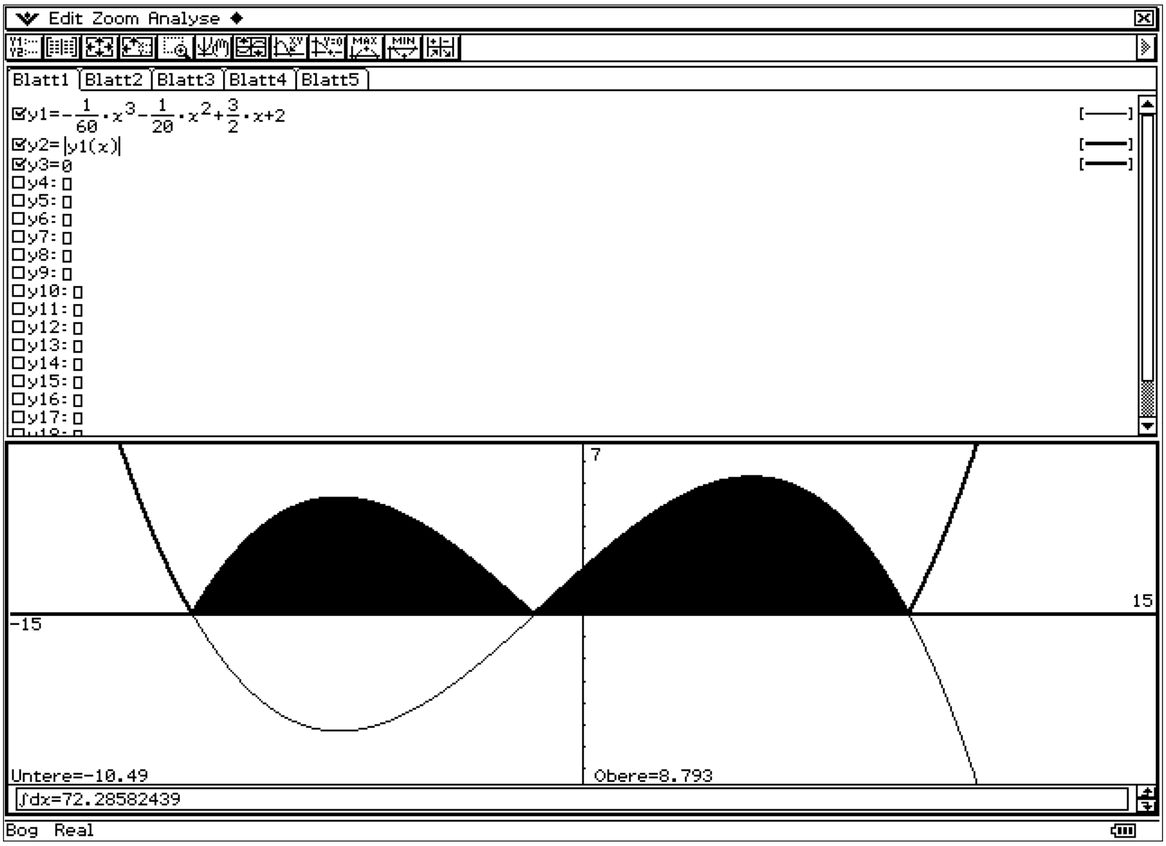
Damit ist die Probe erfüllt, wenn man

199999999999999/100000000000000 = 1.999 999 999 999 99 = 2

setzt und damit die interne Zahlendarstellung im GTR korrigiert.

ges. Flächeninhalt der Fläche, die durch G und die x-Achse vollständig begrenzt wird.

2D-Darstellung der Flächenanteile (der linke negative Anteil ist nach oben gespiegelt)



Lösung:

Ein Blick in das Schaubild zeigt, dass unterhalb der x-Achse zwischen x_{n1} und x_{n2} ein vollständig begrenztes Flächenstück liegt, ebenso oberhalb der x-Achse zwischen x_{n2} und x_{n3} (die y-Achse bleibt unbeachtet, da sie in dieser Teilaufgabe keine Erwähnung findet)

Ansatz:

A = ∫(abs(f(x)),x,x_{n1},x_{n3}) = ∫((-f(x)),x,x_{n1},x_{n2}) + ∫(f(x),x,x_{n2},x_{n3})

Rechnung im GTR(CAS):

f(x) ist (-x^3)/60-x^2/20+3*x/2+2

x_{n1} ist -10.48943358

x_{n2} ist -1.301369586

x_{n3} ist 8.790803168

∫(-f(x),x,approx(x_{n1}),approx(x_{n2})) + ∫(f(x),x,approx(x_{n2}),approx(x_{n3})) ergibt 72.2858556 ≈ 72.3

Der approx-Befehl zerstört die exakten Zahlenstrukturen, die der CAS-Rechner im Hintergrund behält. Damit wird die numerische Rechnung erheblich beschleunigt.
Die Flächenanteile sind:

∫(-f(x),x,approx(x_{n1}),approx(x_{n2})) ergibt 31.64310646

und

∫(f(x),x,approx(x_{n2}),approx(x_{n3})) ergibt 40.64274914 geg. Fläche im 1. Quadranten, begrenzt durch G, die Koordinatenachsen und x=k (senkrechte Gerade). Der Flächeninhalt beträgt 30 Flächeneinheiten.

ges. x-Wert k

Lösung:

Ansatz: ∫(f(x),x,0,k) = 30 mit k > 0 and k < x_{n3} = 8.790803168

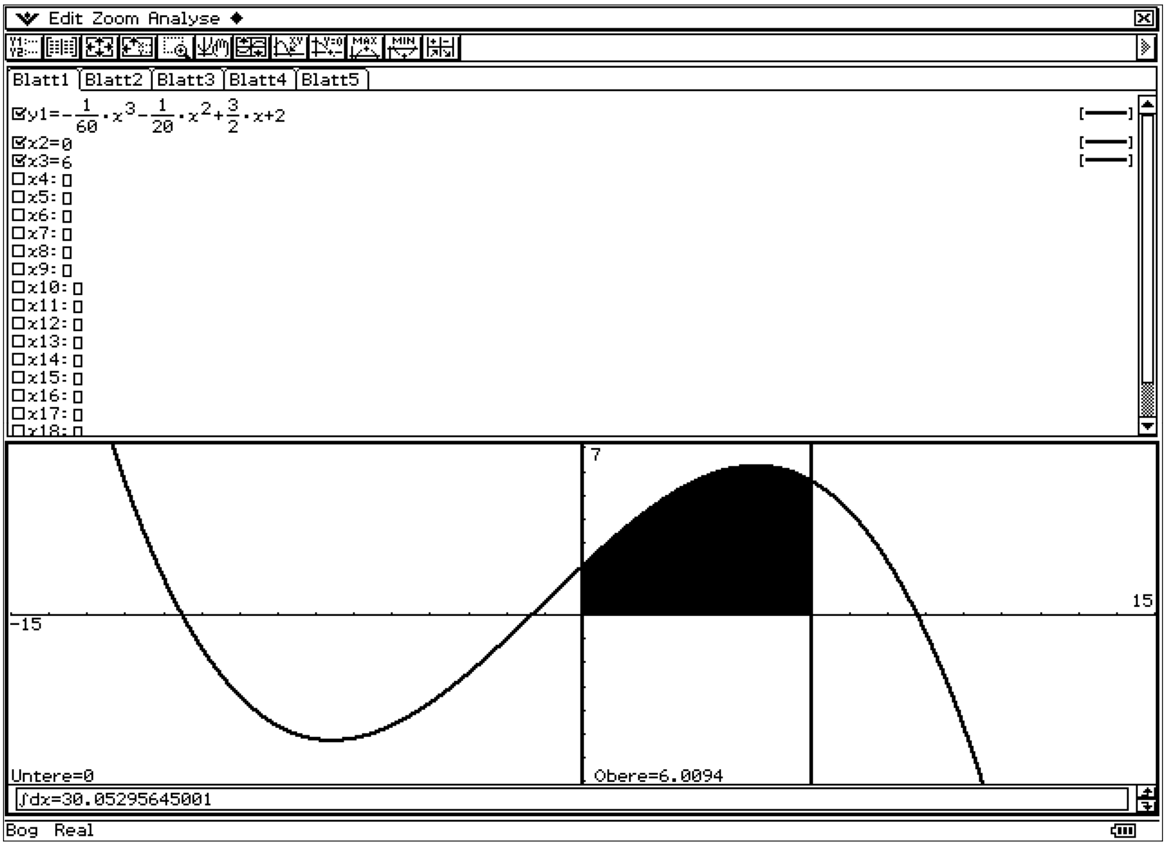
Rechnung im GTR(CAS):

∫(f(x),x,0,k)=30 ergibt (-k^4)/240-k^3/60+3*k^2/4+2*k=30
solve(ans|k>0 and k<approx(x_{n3}),k) ergibt {k=6}

Probe:

judge(∫(f(x),x,0,6)=30) ergibt TRUE

Ansicht als 2D-Grafik



Teilaufgabe 1.2.2

ges. Gleichung der Wendetangente und Gleichung der Normalen im Wendepunkt

Lösung:

Die Wendestelle ist eine Extremstelle der 1. Ableitung, d.h. (f'(x))' = f''(x) = 0 an dieser Stelle.

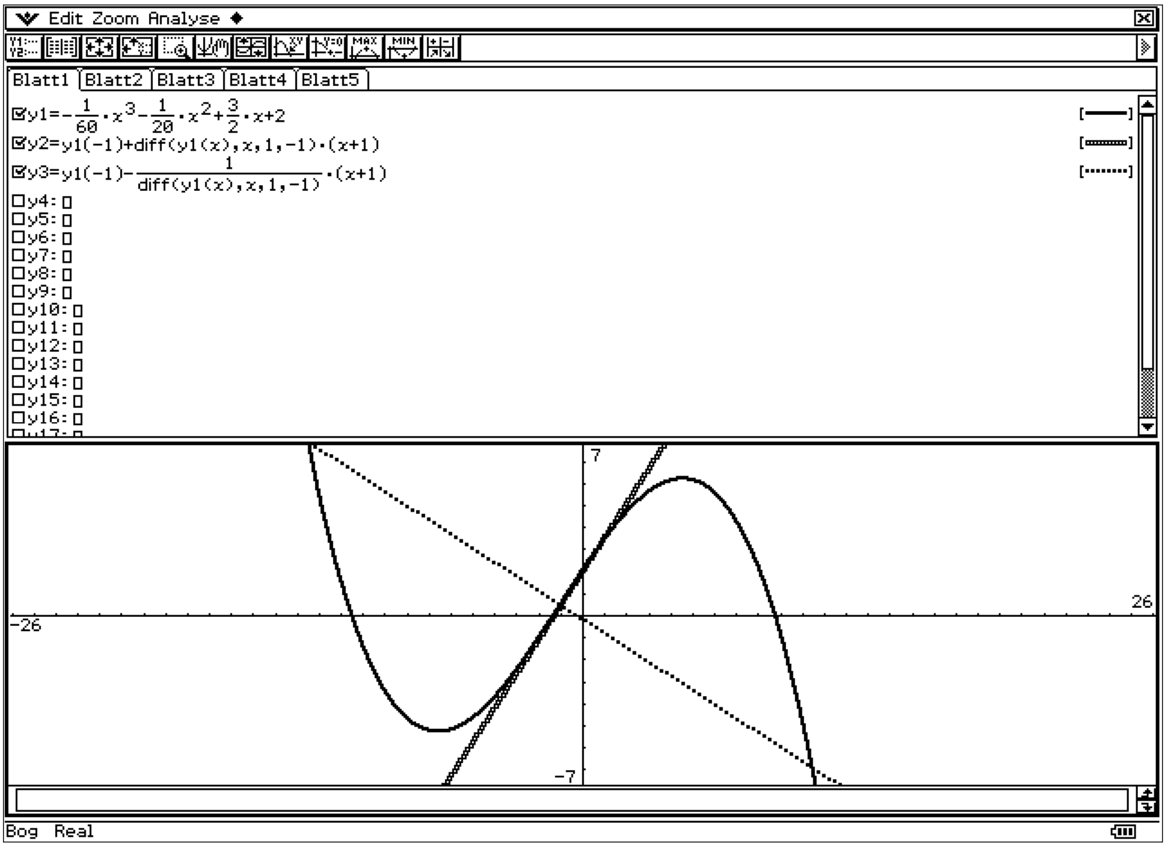
Rechnung im GTR(CAS):

diff(f(x),x,2)=0 ergibt (-(x+1))/10=0, d.h. **x = -1** und **f(-1) = 7/15**.

Gleichung der Wendetangente: y = t(x) = f(-1) + f'(-1) × (x+1) = 1.55x + 2.02

Gleichung der Normalen: y = n(x) = f(-1) - 1/(f'(-1) × (x+1) = -0.65x-0.18

2D-Darstellung der Kurven:



Teilaufgabe 1.2.3

geg. Dreieck OAB mit O=O(0|0), A=A(x_{n3}|0) und B(x,f(x)) im 1. Quadranten

ges. maximal möglicher Flächeninhalt von ΔOAB

Lösung:

Ansatz mittels Vektorrechnung
(Δ-Fläche = halbe Parallelogrammfläche = Norm des Kreuzproduktvektors):

Define Inhalt(x) = (1/2)×norm(crossP([[approx(x_{n3})],[0],[0]], [[x],[f(x)],[0]]))

done

Define g(x) = (Inhalt(x))^2

done

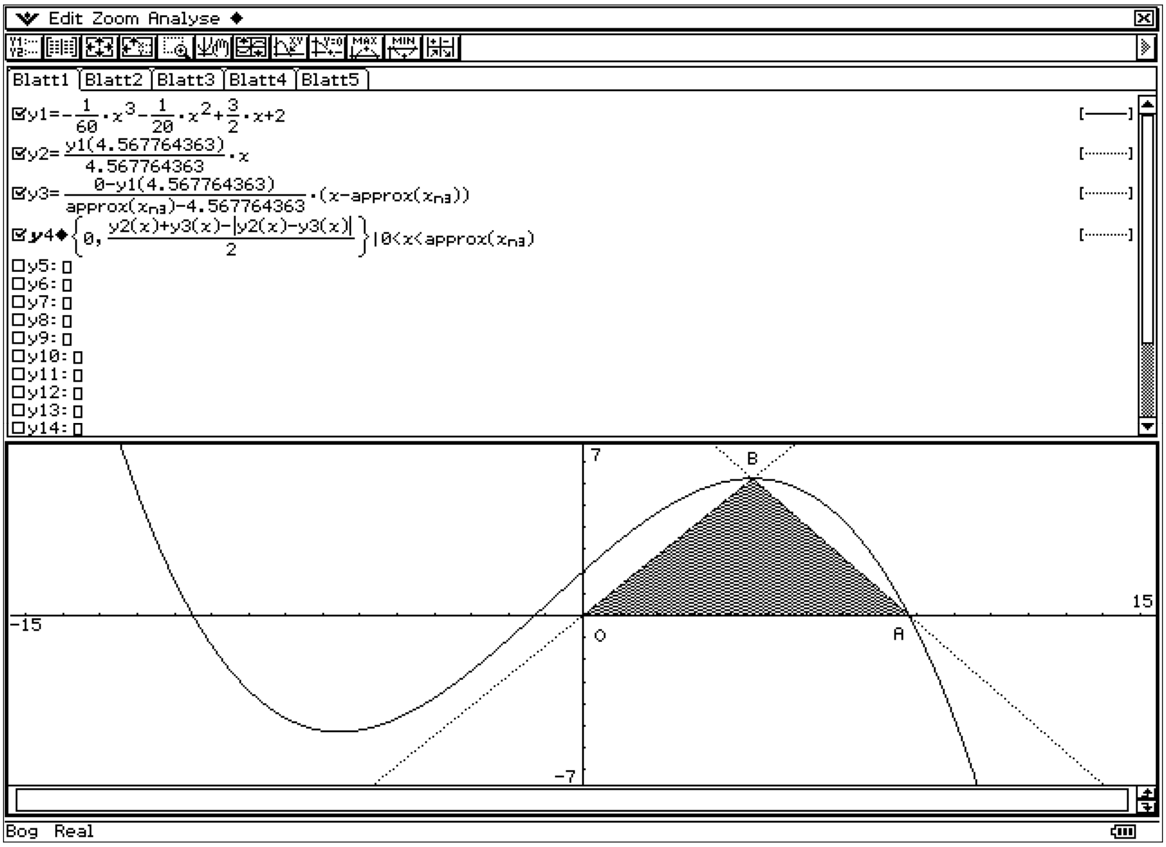
fMax(g(x),x,0,approx(x_{n3})) ergibt {MaxValue = 747.4482446, x = 4.567764363}

747.4482446^(1/2) ergibt 27.33949971
Inhalt(4.567764363) ergibt 27.33949971

Ergebnis:

An der Stelle x = 4,567764363 wird der maximale Flächeninhalt mit 27,34 Flächeneinheiten erreicht.

Darstellung der Dreiecksfläche OAB:



anderer Lösungsansatz:
elementare Formel mit Grundseite x_{n3} und Höhe f(x) im Dreieck OAB

Define Inhalt(x) = (1/2)×approx(x_{n3})×f(x)

done

fMax(Inhalt(x),x,0,approx(x_{n3})) ergibt {MaxValue = 27.33949971,x = 31^(1/2)-1}
approx(31^(1/2)-1) ergibt 4.567764363

Pflichtaufgabe 1.3

geg. Funktionenschar g_a(x) = (a/60)x^3 - (1/20)x^2 + (3/2)x + 2, a,x∈R, a>0
ges. Beschreibung des Krümmungsverhaltens

Lösung:

Es gilt:
$g_a''(x) \geq 0 \Rightarrow$ konvexe Krümmung
$g_a''(x) \leq 0 \Rightarrow$ konkave Krümmung

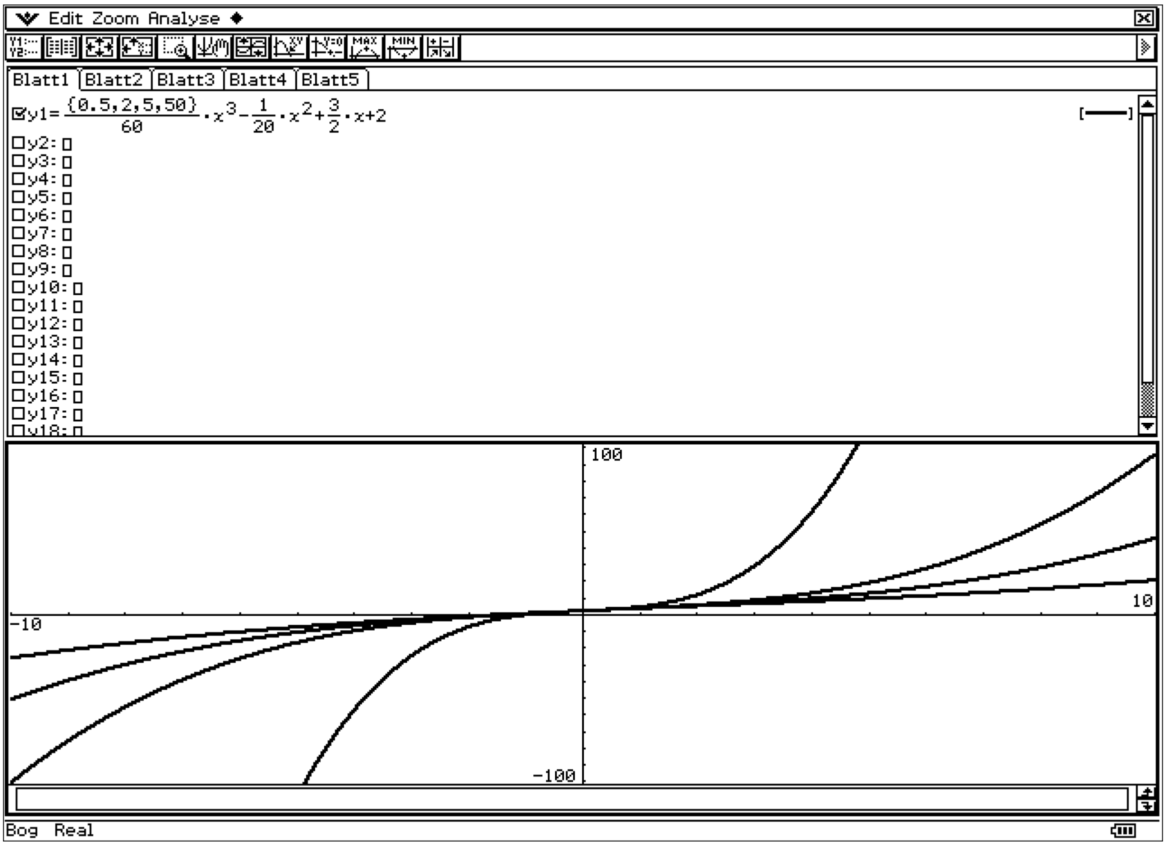
Rechnung im GTR(CAS):

Define g(a,x) = (a/60)x^3 - (1/20)x^2 + (3/2)x + 2
done

diff(g(a,x),x,2)	ergibt	(a*x - 1)/10
solve((a*x-1)/10≥0,x)	ergibt	{a*x ≥ 1}

Wegen a>0 folgt: **konvexe Krümmung (Linkskrümmung) für x ≥ 1/a,**
konkave Krümmung (Rechtskrümmung) für x ≤ 1/a.
x = 1/a ist die Wendestelle.

Darstellung der Kurvenschar:



Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A2 (Analytische Geometrie):

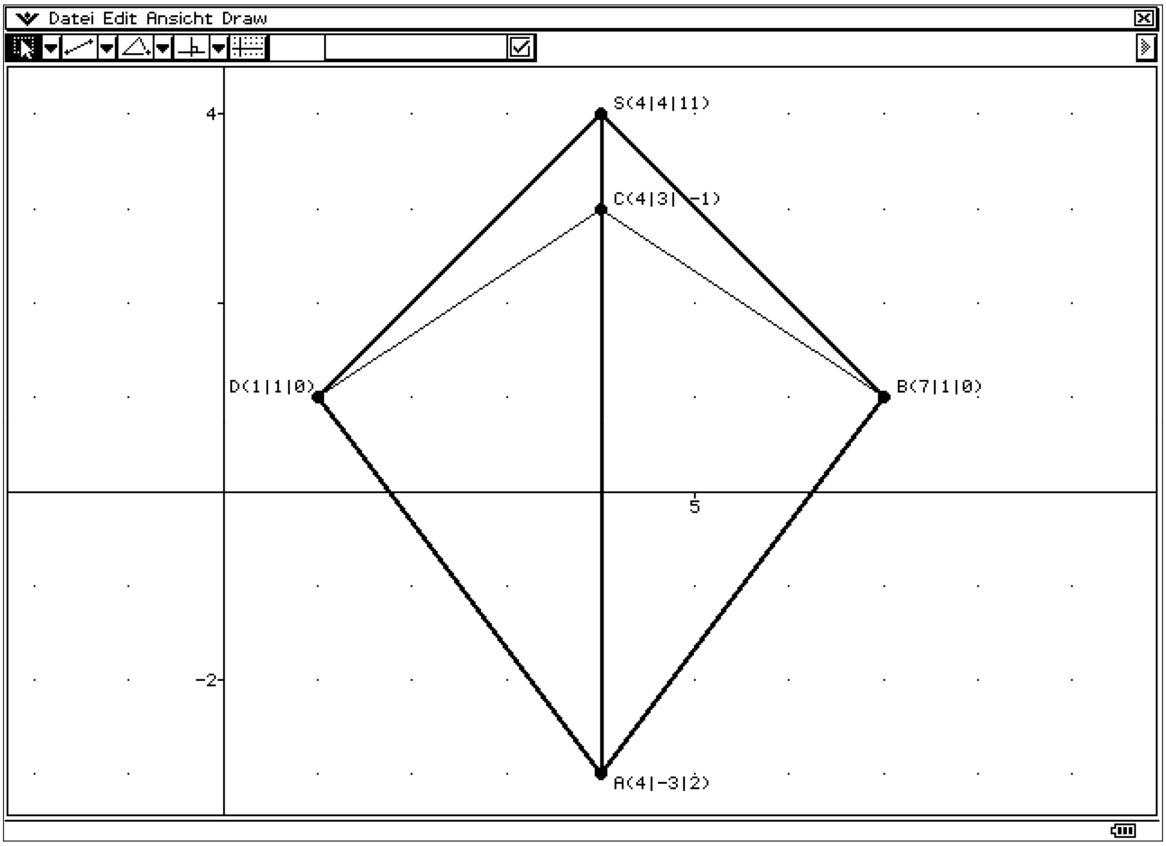
geg. pyramidenförmiger Körper ABCDS mit Grundfläche ABCD und Spitze S:
A(4| -3| 2), B(7| 1| 0), C(4| 3| -1), D(1| 1| 0) und S(4| 4| 11)
(kartesisches Koordinatensystem)

Pflichtaufgabe 2.1

ges. Zeichnung des Körpers ABCDS

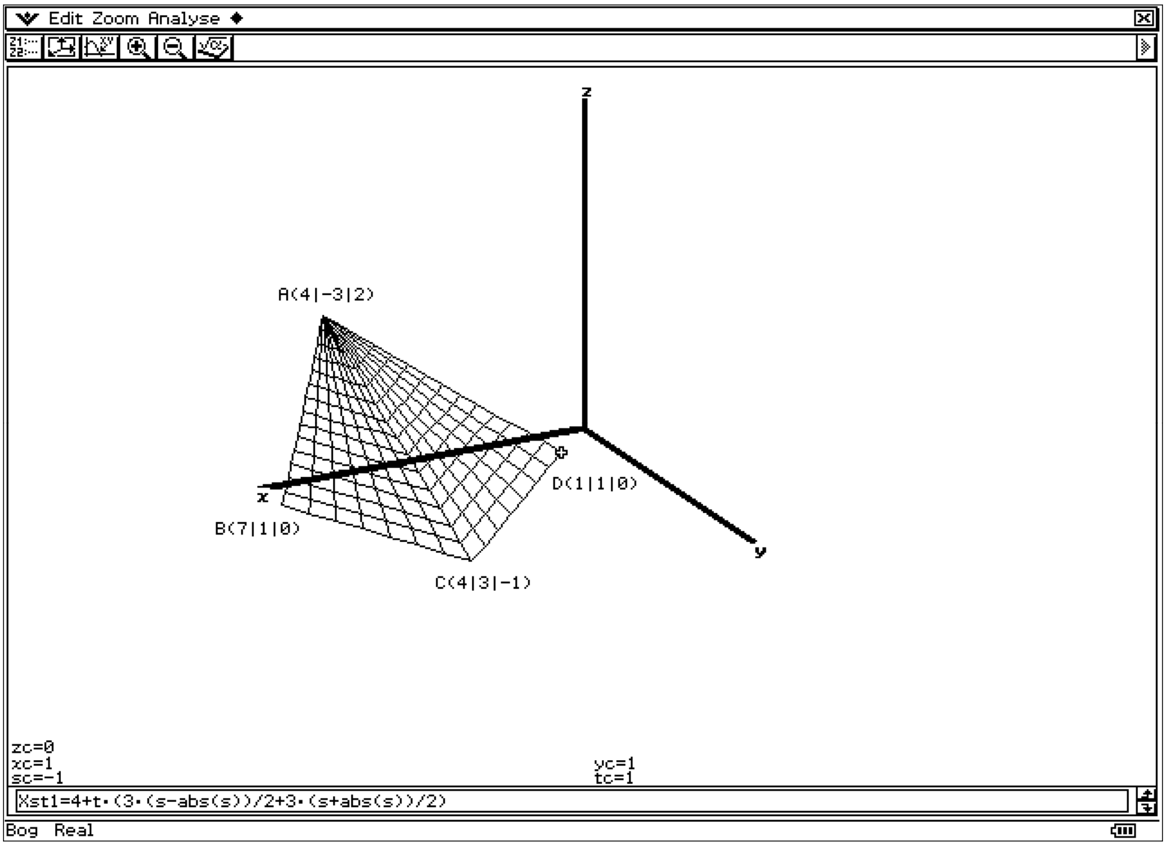
Lösung:

Grafik im Geometrie-Menü, Grundfläche und S in x-y-Ebene projiziert:

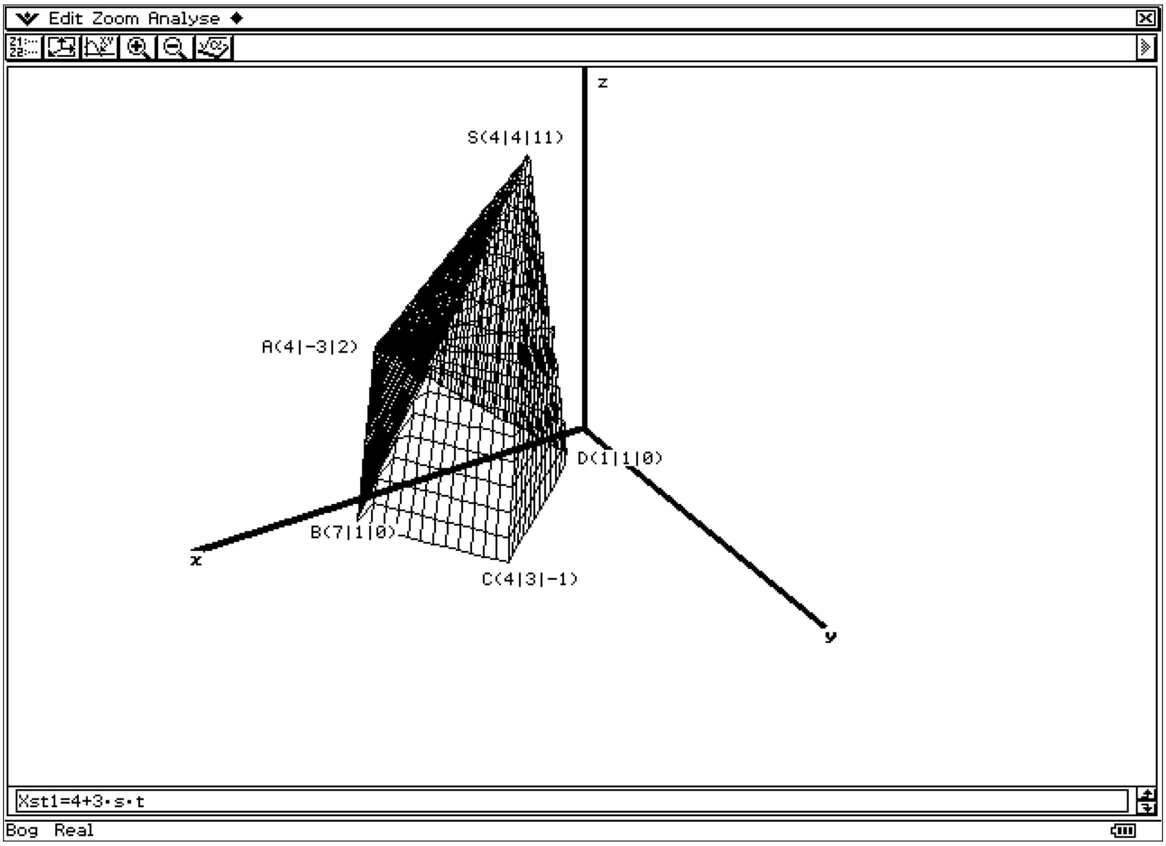


Man erkennt die Grundfläche als Drachenviereck.

Grafik im 3D-Menü, Darstellung der Grundfläche ABCD:

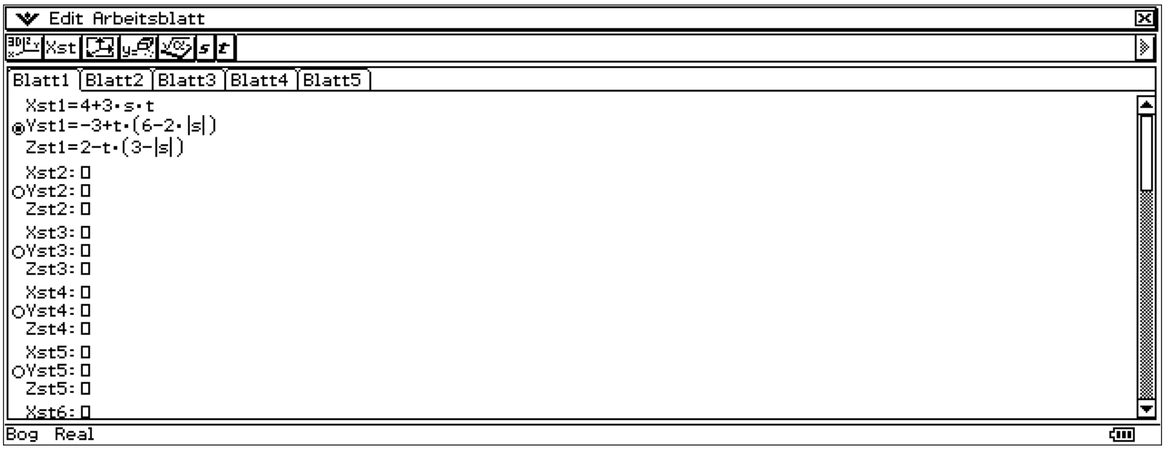


Grafik im 3D-Menü, Darstellung der Pyramide ABCDS:

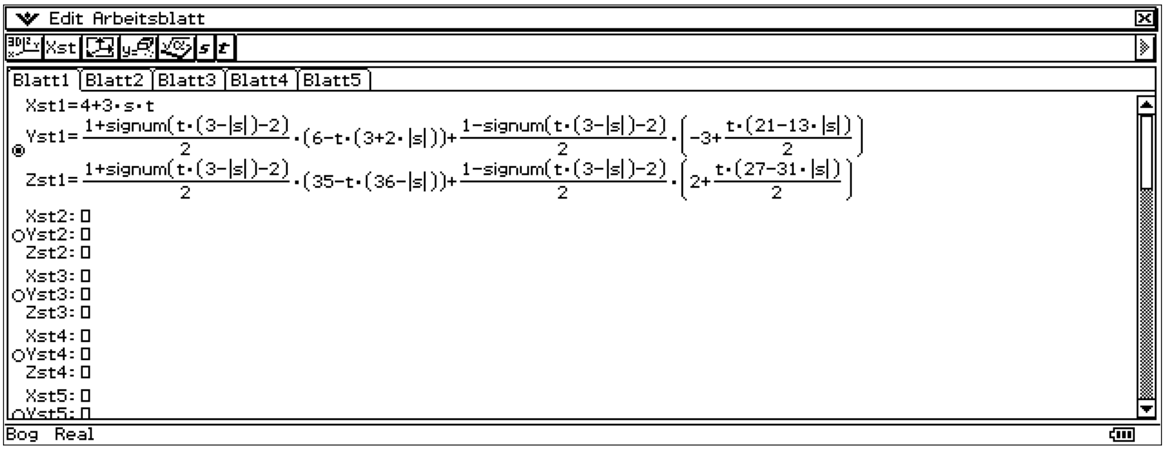


Ein Blick in die benutzten Formeln (Parameterdarstellungen):

3D-Grafik der Grundfläche ABCD:



3D-Grafik der Pyramidenoberfläche ABCDS:



Hinweise zur Herleitung der Parameterdarstellungen im 3D-Menü:

Rechnung im GTR(CAS):

[[4,-3,2]] ⇒ A [[7,1,0]] ⇒ B [[4,3,-1]] ⇒ C [[1,1,0]] ⇒ D

algebraische Beschreibung des Drachenvierecks mittels Vektorrechnung:

X(s,t) = A + t×((|s|+s)/2)×(B-A) + ((|s|-s)/2)×(D-A) + (1- |s|)×(C-A)), -1 ≤ s ≤ 1, 0 ≤ t ≤ 1.

Rechnung im GTR(CAS):

A + t*((|s|+s)/2*(B-A) + (|s|-s)/2*(D-A) + (1-|s|)*(C-A)) ergibt
[[4+t*(3*(s-abs(s))/2+3*(s+|s|)/2),-3+t*(6*(1-|s|)-2*(s-abs(s))+2*(s+|s|)),2-t*(3*(1-|s|)+2*|s|)]]
simplify(trn(ans)) ⇒ X ergibt [[4+3*s*t], [-3+6*t-2*t*|s|], [2-t*(3-|s|)]]

Der Punkt X durchläuft alle Flächenpunkte des Drachenvierecks.

algebraische Beschreibung der Pyramidenoberfläche mittels Vektorrechnung:

Es sei M der Mittelpunkt der Grundfläche (Schnittpunkt der Diagonalen):

(B+D)/2 ⇒ M ergibt [[4, 1, 0]]
[[4,4,11]] ⇒ S ergibt [[4, 4, 11]]

Die Grundfläche ABCD der Pyramide wird von A ausgehend über die gewonnene Parameterdarstellung

X(s,t) = [[4+3*s*t], [-3+6*t-2*t* |s|], [2-t*(3- |s|)]], -1≤s≤1, 0≤t≤1,

beschrieben und besteht aus vier Dreiecken ABM, BCM, CDM und DAM, über denen jeweils die Seitenflächen hin zur Spitze S liegen.

Schnittpunkt T der Geraden durch B und D mit der Geraden durch A und X:

Der Ansatz T = B+u*(D-B) = A + v*(X-A) ergibt: u*(D-B)-v*(X-A) = A-B

Rechnung im GTR(CAS):

trn([[4+3*s*t], [-3+6*t-2*t*|s|], [2-t*(3-|s|)]]) ⇒ X
u*(D-B)-v*(X-A)-(A-B) ergibt [[3-6*u-3*s*t*v,4-v*(6*t-2*t*|s|),-2+t*v*(3-|s|)]]
solve({3-6*u-3*s*t*v=0,4-v*(6*t-2*t*|s|)=0,-2+t*v*(3-|s|)=0},{u,v,w}) ergibt
{u=(3-2*s-|s|)/(2*(3-|s|)),v=2/(t*(3-|s|)),w=w}
(norm(X-A))^2 ergibt t^2*(45-30*|s|+14*s^2)
(norm(B+u*(D-B)-A|u=(3-2*s-|s|)/(2*(3-|s|))))^2 ergibt
4*(45-30*|s|+14*s^2)/(9-6*|s|+s^2)

Hieraus folgt für X auf der Strecke BD:

t^2*(9-6* |s|+s^2) = 4 und t = 2/√(9-6* |s|+s^2) = 2/(3- |s|)

Damit kann über die Parameter s,t das Dreieck ABM, BCM, CDM oder DAM identifiziert werden:

t*(3- |s|)-2 < 0 und s > 0: ΔABM

t*(3- |s|)-2 < 0 und s ≤ 0: ΔDAM

t*(3- |s|)-2 ≥ 0 und s > 0: ΔBCM

t*(3- |s|)-2 ≥ 0 und s ≤ 0: ΔCDM

Mit dem Richtungsvektor MS wird nun die jeweilige Seitenfläche im Punkt Y durchstoßen.

Durchstoßpunkt Y auf ΔABS (s>0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(A-S) + v×(B-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(A-S) + v*(B-S) - w*(S-M) + S-X   ergibt
[[3*v-3*s*t, 7-3*w-3*v-7*u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-11*v-9*u+t*(3-|s|)]]

solve({3*v-3*s*t=0, 7-3*w-3*v-7*u-6*t+2*t*|s|=0, 9-11*w-11*v-9*u+t*(3-|s|)=0}, {u,v,w})
ergibt   {u=(2-t*(3-|s|))/2, v=s*t, w=t*(3-2*s-|s|)/2}

Y(s,t) = X + w×(S-M) = X + (t*(3-2*s- |s|)/2)×(S-M)

simplify(X + t*(3-2*s-|s|)/2*(S-M))   ergibt   [[4+3*s*t, -3+t*(21-6*s-7*|s|)/2, 2+t*(27-22*s-9*|s|)/2]]

Somit Y = [[4+3*s*t, -3+(t*(21-13* |s|)/2, 2+t*(27-31* |s|)/2]]

Durchstoßpunkt Y auf △ADS (s<0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(D-S) + v×(A-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(D-S) + v*(A-S) - w*(S-M) + S-X   ergibt
[[-3*u-3*s*t, 7-3*w-7*v-3*u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-9*v-11*u+t*(3-|s|)]]

solve({-3*v-3*s*t=0, 7-3*w-3*v-7*u-6*t+2*t*|s|=0, 9-11*w-11*v-9*u+t*(3-|s|)=0}, {u,v,w})
ergibt   {u=(2-t*(3-|s|))/2, v=-s*t, w=t*(3+2*s-|s|)/2}

Y(s,t) = X + w×(S-M) = X + (t*(3+2*s- |s|)/2)×(S-M)

simplify(X+t*(3+2*s-|s|)/2*(S-M))   ergibt   [[4+3*s*t, -3+t*(21+6*s-7*|s|)/2, 2+t*(27+22*s-9*|s|)/2]]

Somit Y = [[4 + 3*s*t, -3 + t*(21-13* |s|)/2, 2 + t*(27-31* |s|)/2]]

Durchstoßpunkt Y auf △BCS (s>0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(B-S) + v×(C-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(B-S) + v*(C-S) - w*(S-M) + S-X   ergibt
[[3*u-3*s*t, 7-3*w-v-3*u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-12*v-11*u+t*(3-|s|)]]

solve({3*v-3*s*t=0,7-3*w-3*v-u-6*t+2*t*|s|=0,9-11*w-11*v-12*u+t*(3-|s|)=0},{u,v,w})
ergibt   {u=-2+3*t-t*|s|, v=s*t, w=3-t*(3+s-|s|)}

Y(s,t) = X+w×(S-M) = X + (3-t*(3+s- |s|))×(S-M)

simplify(X+(3-t*(3+s-|s|))*(S-M))   ergibt   [[4+3*s*t, 6-t*(3+3*s-|s|), 35-t*(36+11*s-12*|s|)]]

Somit Y = [[4+3*s*t, 6-t*(3+2* |s|), 35-t*(36- |s|)]]

Durchstoßpunkt Y auf △CDS (s<0):

Der Ansatz ergibt Y = S + u×(C-S) + v×(D-S) = X + w×(S-M), d.h.

u*(C-S) + v*(D-S) - w*(S-M) + S-X   ergibt
[[-3*v-3*s*t, 7-3*w-3*v-u-6*t+2*t*|s|, 9-11*w-11*v-12*u+t*(3-|s|)]]

solve({-3*v-3*s*t=0, 7-3*w-3*v-u-6*t+2*t*|s|=0, 9-11*w-11*v-12*u+t*(3-|s|)=0}, {u,v,w})
ergibt   {u=-2+3*t-t*|s|, v=-s*t, w=3-t*(3-s-|s|)}

Y(s,t) = X+w×(S-M) = X + (3-t*(3-s- |s|))×(S-M)

simplify(X+(3-t*(3-s-|s|))*(S-M))   ergibt   [[4+3*s*t, 6-t*(3-3*s-|s|), 35-t*(36-11*s-12*|s|)]]

Somit Y = [[4+3*s*t, 6-t*(3+2* |s|), 35-t*(36- |s|)]]

Zusammenfassend:

t*(3- |s|)-2 < 0: Y = [[4+3*s*t, -3+t*(21-13* |s|)/2, 2+t*(27-31* |s|)/2]]

t*(3- |s|)-2 ≥ 0: Y = [[4+3*s*t, 6-t*(3+2* |s|), 35-t*(36- |s|)]]

Die Fallunterscheidung wird im 3D-Formeleditor über die signum-Funktion realisiert.

ges. Nachweis, dass A, B, C und D in einer Ebene liegen

Lösung:

Wir berechnen das Spatvolumen, aufgespannt durch die Vektoren AB, AC und AD:

dotP(crossP(B-A,C-A),D-A) ergibt 0

Damit liegen die Vektoren AB, AC und AD in einer Ebene und somit auch die Punkte A, B, C und D.

ges. Nachweis, dass ABCD ein Drachenviereck ist

Lösung:

Aus den vorangehenden Betrachtungen folgt, dass ein ebenes konvexes Viereck vorliegt.
Wir betrachten die Seitenlängen und zeigen ‖AB‖ = ‖AD‖ und ‖BC‖ = ‖CD‖:

norm(B-A) ergibt 29^(1/2)
norm(D-A) ergibt 29^(1/2)
norm(B-C) ergibt 14^(1/2)
norm(D-C) ergibt 14^(1/2)

Damit haben die in A anliegenden Seiten die Länge √(14) und die in C anliegenden Seiten die Länge √(29). Somit liegt ein Drachenviereck vor.

ges. Flächeninhalt des Vierecks ABCD

Lösung:

Die Dreiecke ABC und ADC sind symmetrisch und haben jeweils den Flächeninhalt

1/2*norm(crossP(B-A,C-A)) ergibt 9*5^(1/2)/2
approx(9*5^(1/2)) ergibt 20.1246118

Damit beträgt der Flächeninhalt 9*√(5) = **20,1246 ≈ 20,1 Flächeneinheiten**.

Pflichtaufgabe 2.2

ges. Flächeninhalt ∆ABS

Lösung:

1/2*norm(crossP(S-A,S-B)) ergibt 3670^(1/2)/2
approx(ans) ergibt 30.29026246

Der Flächeninhalt beträgt **30,29 Flächeneinheiten**.

ges. Nachweis, dass L(4|-1|1) der Höhenfußpunkt der Pyramide ABCDS ist

Lösung:

L liegt in der Ebene ABCD:

[[4,-1,1]] ⇒ L
dotP(crossP(B-A,C-A),L-A) ergibt 0

Damit liegt L in der Ebene ABCD.

Richtungsvektor LS und Normalenvektor zur Ebene ABCD sind parallel:

(S-L)/5	ergibt	[[0,1,2]]
crossP(B-A,C-A)/9	ergibt	[[0,1,2]]

Damit ist L der Fußpunkt von S in Richtung des Normalenvektors der Ebene ABCD.

ges. Volumen der Pyramide (1 Längeneinheit = 1mm)

Lösung:

V = (1/3) * Grundfläche * Höhe = (1/3)*9*√(5)*norm(S-L)

Rechnung im GTR(CAS):

1/3*9*5^(1/2)*norm(S-L) ergibt 75

Ergebnis: V = 75 mm^3

Kontrolle über das doppelte Tetraedervolumen = (1/6)*Spatvolumen*2
1/6*dotP(crossP(B-A,C-A),S-A)*2 ergibt 75

Pflichtaufgabe 2.3

geg. (Schnitt-)Ebene BDR mit R(1,5|0,75|3,25) und Kante AS schneiden sich in P

ges. Durchstoßpunkt P

Lösung:

Ebenengleichung	X(s,t) = B + s*(R-B) + t*(D-B), s,t∈R,
Geradengleichung	X(u) = A + u*(S-A), u∈R,

Ansatz für Schnittpunkt:

B+s*(R-B)+t*(D-B)=A+u*(S-A)

Lösung der Vektorgleichung:

s*(R-B) + t*(D-B) - u*(S-A) +(B-A) = Nullvektor

Rechnung im GTR(CAS):

[[1.5,0.75,3.25]] ⇒ R ergibt [[3/2,3/4,13/4]] s*(R-B) + t*(D-B) - u*(S-A) + B-A   ergibt   [[3-6*t-11*s/2, 4-7*u-s/4, -2-9*u+13*s/4]]

solve({3-6*t-11*s/2=0, 4-7*u-s/4=0, -2-9*u+13*s/4=0}, {s,t,u})   ergibt   {s=2, t=-4/3, u=1/2}

A + u*(S-A)|u=1/2 ⇒ P   ergibt   [[4,1/2,13/2]]

P hat die Koordinaten **P(4|0,5|6,5).**

ges. Untersuchung der Form des Dreiecks BDP

Lösung:

norm(P-B)   ergibt   206^(1/2)/2
norm(P-D)   ergibt   206^(1/2)/2
norm(B-D)   ergibt   6

Damit ist das Dreieck **gleichschenklig**: ‖BP‖ = ‖DP‖

Pflichtaufgabe 2.4

geg. Existenz von Schnittebenen, die das Volumen ABCDS halbieren.

ges. Beschreibung einer solchen Schnittebene (Begründung)

Lösung:

Die Ebene ACS halbiert das Pyramidenvolumen in zwei volumengleiche Tetraeder.
Beide Tetraeder haben die gleichen Grundflächen: ∆ABC bzw. ∆ADC
und die gleiche Höhe zum Punkt S.

Volumenkontrolle:

dotP(crossP(B-A,C-A),S-A)/6   ergibt   75/2
dotP(crossP(C-A,D-A),S-A)/6   ergibt   75/2

Mecklenburg-Vorpommern 2008 Abitur Mathe-Grundkurs(GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (Wahlaufgaben A1, A2, A3)

Aufgabe A3 (Stochastik):

Pflichtaufgabe 3.1

geg. Erzeugnis (Taschenlampe) mit 8 LED und 1 Batterie ausgestattet.
Ereignisse:
A_k := {k-te LED ist defekt}, $P(A_k) = 0{,}01$, k = 1, 2, ..., 8,
B := {Batterie ist defekt}, P(B) = 0,02
C := {Erzeugnis fehlerfrei}

ges. P(C)

Lösung:

$C = \text{nicht}A_1 \cap \text{nicht}A_2 \cap \ldots \cap \text{nicht}A_8 \cap \text{nicht}B$
ergibt (Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse)
P(C) = 0,99^8×0,98 = 0.9043

Rechnung im GTR(CAS):

0.99^8*0.98 ergibt 0.9042898005

Antwort:
eine zufällig aus der Produktion entnommene Taschenlampe ist mit der Wahrscheinlichkeit 0,9043 fehlerfrei.

Pflichtaufgabe 3.2

geg. Lieferung mit n=1000 Taschenlampen mit der Fehlerquote 7%

Teilaufgabe 3.2.1

ges. μ = E(Sn) und σ = D(Sn), wobei Sn die zufällige Anzahl der fehlerhaften Erzeugnisse unter n untersuchten Erzeugnissen bezeichnet.

Lösung:
S_n entsteht über ein Bernoulli-Schema mit p = 1-P(C) = 0.07 und Stichprobenumfang n=1000
S_n ist binomialverteilt mit den Parametern p=0,07 und n=1000.
Somit $E(S_n) = n\times p = 70$ und $D(S_n) = \sqrt{(n\times p\times(1-p))} = \sqrt{(70\times 0.93)} = 8.0685 \approx 8.07$

Rechnung im GTR(CAS):

(70*0.93)^(1/2) ergibt 8.068457102

Teilaufgabe 3.2.2

geg. B(1000,0.07)-verteilte Grundgesamtheit. Es werden n=10 Lampen entnommen und geprüft.

ges. P(A), P(B) und P(C), wobei jetzt gilt
A := {genau 1 geprüfte Taschenlampe ist fehlerhaft}
B := {höchstens 2 geprüfte Lampen sind fehlerhaft}
C := {mindestens 3 und höchstens 6 geprüfte Lampen sind fehlerhaft}

Lösung:

P(A) = binomialPDf(1,10,0.07) = 0.3643 ≈ 0.364

P(B) = binomialCDf(2,10,0.07) = 0.9717 ≈ 0.972

$P(3\leq S_{10} \leq 6)$ = binomialCDf(6,10,0.07) - binomialCDf(2,10,0.07) = 0.0283 ≈ 0.028

Rechnung im GTR(CAS):

binomialPDf(1,10,0.07)	ergibt	0.3642877581
binomialCDf(2,10,0.07)	ergibt	0.9716578543
binomialCDf(6,10,0.07) - binomialCDf(2,10,0.07)	ergibt	0.02834132797

Teilaufgabe 3.2.3

geg. $X = S_{10}$ (zufällige Anzahl der fehlerhaften Lampen unter 10 geprüften Lampen)

ges. Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

Lösung:

X ist eine diskrete Zufallsgröße mit eine B(10,0.07)-Verteilung (X entsteht über das Bernoulli-Schema)

Wertebereich von X ist {0, 1, 2, ..., 10}

p_k = P(X=k) = nCr(10,k)×0.07^k×0.93^(10-k), k = 0, 1, 2, ..., 10.

Rechnung im GTR(CAS):

seq(k,k,0,10,1) ⇒ listk ergibt {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

seq(nCr(10,k)*0.07^k*0.93^(10-k),k,0,10,1) ⇒ listp ergibt
{0.4839823072, 0.3642877581, 0.123387789, 0.02476600783, 3.262189204E-3,
2.946493475E-4, 1.848158989E-5, 7.949070922E-7, 2.243689373E-8,
3.752885451E-10, 2.82475249E-12}

augment(listToMat(listk),listToMat(ans)) ⇒ Verteilg ergibt

[[0, 0.4839823072],		gerundet:	[[0, 0.484],
[1, 0.3642877581],			[1, 0.364],
[2, 0.123387789],			[2, 0.123],
[3, 0.02476600783],			[3, 0.025],
[4, 3.262189204E-3],			[4, 0.003],
[5, 2.946493475E-4],			[5, 0.000],
[6, 1.848158989E-5],			[6, 0.000],
[7, 7.949070922E-7],			[7, 0.000],
[8, 2.243689373E-8],			[8, 0.000],
[9, 3.752885451E-10],			[9, 0.000],
[10, 2.82475249E-12]]			[10, 0.000]]

Die zuletzt erzeugte Matrix enthält die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

Kontrolle:
sum(listp) ergibt 1

Interpretation: Wegen der geringen Fehlerquote von 0.07=7% ist es unwahrscheinlich, sehr viele fehlerhafte Taschenlampen zu finden (verschwindend kleine Wahrscheinlichkeiten für große X-Werte). Sehr wenig fehlerhafte Lampen zu finden ist damit hochwahrscheinlich.

Pflichtaufgabe 3.3

geg. Lampen unterschiedlicher Hersteller mit schwankender Fehlerquote p

Teilaufgabe 3.3.1

geg. Fehlerquoten p_1 = 0,20 und p_2 = 0,40, Stichprobenumfang jeweils n=10

ges. P(B) = P({höchstens 2 geprüfte Lampen sind fehlerhaft})

Lösung:

Fall p_1 = 0,20 ergibt P(B) = binomialCDf(2,10,0.20) = 0.6778 ≈ 0.678
Fall p_2 = 0,40 ergibt P(B) = binomialCDf(2,10,0.40) = 0.1673 ≈ 0.167

Rechnung im GTR(CAS):

binomialCDf(2,10,0.2) ergibt 0.6777995264
binomialCDf(2,10,0.4) ergibt 0.1672897536

Teilaufgabe 3.3.2

geg. Fehlerquote p (als Parameter) und n=10

ges. Gleichung für P(B)

Lösung:

$P(B) = P(S_{10} \leq 2) = P(S_1 = 0) + P(S_1 = 1) + P(S_1 = 2)$
= ∑(nCr(10,k)×p^k×(1-p)^(10-k),k,0,2)
= (1-p)^8×(36*p^2 + 8*p + 1)

Rechnung im GTR(CAS):

∑(nCr(10,k)*p^k*(1-p)^(10-k),k,0,2) ergibt (p-1)^10-10*p*(p-1)^9+45*p^2*(p-1)^8
simplify(ans/(1-p)^8) ergibt 36*p^2+8*p+1

ges. Definitionsbereich und Wertebereich f(p) = (1-p)^(8)×(36*p^(2)+8*p+1)

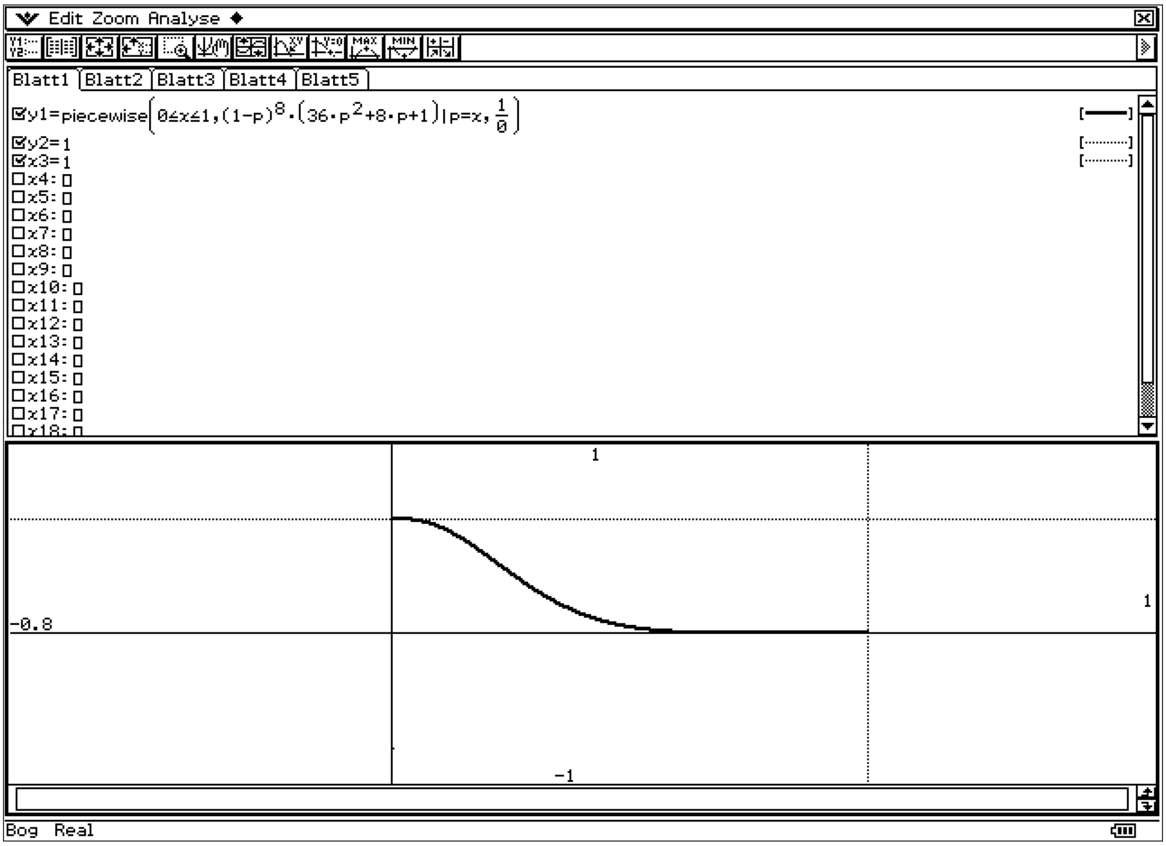
Lösung:

Definitionsbereich (im gegebenen Sachzusammenhang): $0 \le p \le 1$
Wertebereich (im gegebenen Sachzusammenhang): $0 \le f(p) \le 1$

ges. Graph der Funktion und Interpretation des bestehenden Zusammenhanges

Lösung:

Graph der Funktion:



Interpretation:
Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist für kleine Fehlerquoten p sehr groß und fällt mit zunehmendem p schnell auf das Nullniveau ab. Für große Fehlerquoten p ist damit P(B) sehr unwahrscheinlich.