

Zentralabitur 2007	Mathematik	Schülermaterial
Rechnertyp: GTR	Grundkurs	Gymnasium Gesamtschule

Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

1. Wählen Sie **eine der Analysis-Aufgaben 1A oder 1B** aus.
2. Wählen Sie **einen der Aufgabenblöcke 2A oder 2B** aus.
Beide Blöcke bestehen aus je einer Aufgabe zur Analytischen Geometrie und einer zur Stochastik.
 - a. Block 2A hat den *Schwerpunkt Stochastik*
 - b. Block 2B hat den *Schwerpunkt Geometrie*

Sie müssen insgesamt eine Analysis-Aufgabe und einen Aufgabenblock bearbeiten.
Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Hilfsmittel

1. Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
2. Zeichenmittel
3. Duden und Fremdwörterlexikon
4. Eingeführter Rechnertyp wie im Kopf der Aufgabe beschrieben (mit Handbuch)

Aufgabe 1A

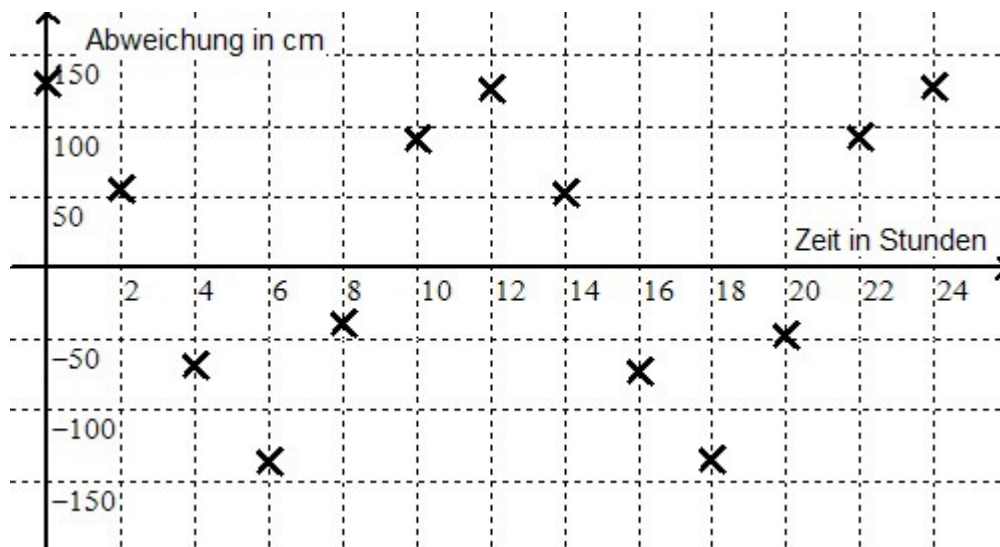
In einem Nordseehafen wurden ab 0 Uhr über einen Zeitraum von 24 Stunden in einem 2-Stunden-Rhythmus die Wasserstände in Abweichung von Normalnull aufgezeichnet und in der Abbildung 1 grafisch dargestellt:

Zeit in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Abweichung in cm	130	55	-69	-137	-39	91	126	53	-73	-135	-48	93	128

- a) Durch die Funktion g mit $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ soll der Zusammenhang zwischen dem Zeitpunkt und der Abweichung des Wasserstandes von Normalnull modelliert werden. Die Modellierung wird durch die Funktion g mit $g(x) = 134 \cdot \sin(0,53 \cdot (x + 3)) - 3$ beschrieben. Bewerten Sie die Werte der einzelnen Parameter a bis d auf der Grundlage der Tabelle. Bestimmen Sie mithilfe der Funktion g die Wasserstände um 4 Uhr und 14 Uhr. Erläutern Sie im Zusammenhang mit der Modellierung zwei mögliche Gründe für die Abweichung der Funktionswerte von den Messwerten zu diesen Zeitpunkten.
- b) Berechnen Sie mithilfe der Funktion g für die nächsten 24 Stunden diejenigen Zeitpunkte, 1. zu denen die Abweichung des Wasserstandes von Normalnull null cm beträgt, 2. zu denen die Wasserstände minimal beziehungsweise maximal sind. Dokumentieren Sie **zu 1.** einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz des GTR nachvollziehbar ist.
- c) Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(x) = -\frac{13400}{53} \cdot \cos(0,53 \cdot (x + 3)) - 3 \cdot x$ eine Stammfunktion der Funktion g ist. Bestimmen Sie $\int_1^{10} g(x) dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis. Im Bereich $1 \leq x \leq 14$ hat die Gleichung $\int_1^u g(x) dx = 0$ drei Lösungen. Interpretieren Sie die Näherungslösungen $u_1 = 1$, $u_2 = 4,7548$ und $u_3 = 13,1958$ bzgl. des Graphen von g .
- d) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin(x + c) + d$ und der Punkt $P(3|2)$. Untersuchen Sie, welche Bedingungen die Parameter c und d erfüllen müssen, so dass der Graph über dem Definitionsbereich \mathbb{R} punktsymmetrisch zum Punkt P ist. Untersuchen Sie in der Funktion k mit $k(x) = \sin(2(x + c)) + d$ den Einfluss des Faktors 2 auf die Werte der Parameter c und d hinsichtlich der Punktsymmetrie zum Punkt P .

Fortsetzung Aufgabe 1A**Material**

Abbildung 1



Aufgabe 1B

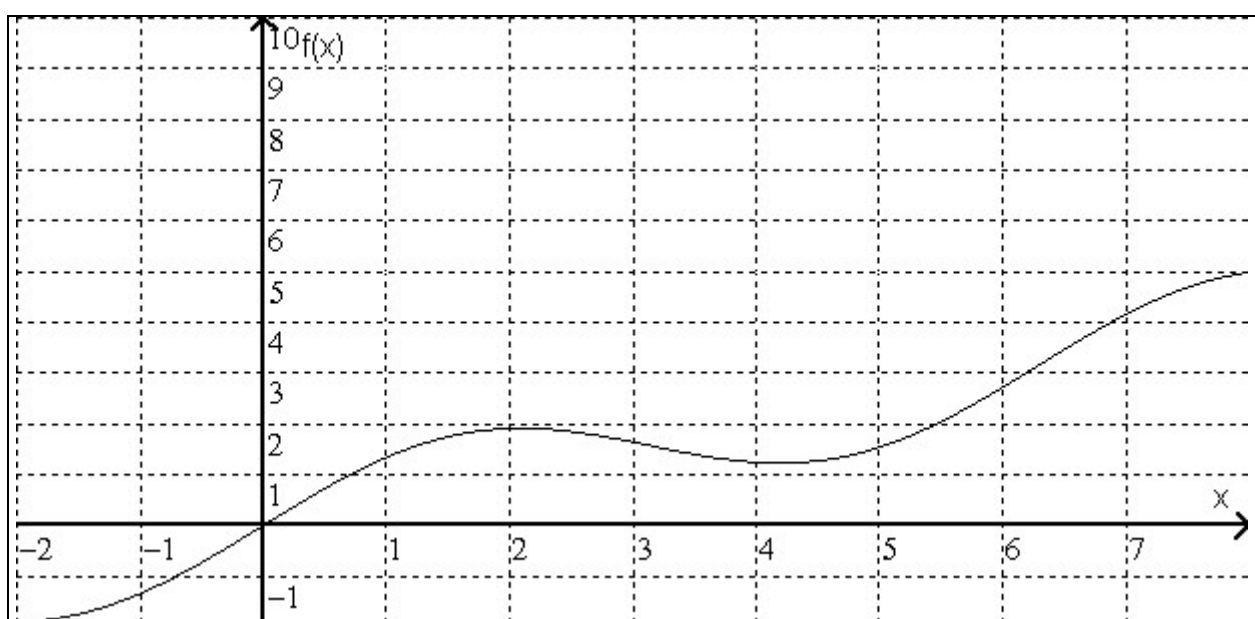
Gegeben ist die Funktionenschar f_k durch $f_k(x) = k \cdot x + \sin(x)$ mit $0 \leq k \leq 2$ und $0 \leq x \leq 2\pi$.

Für $k = 0,5$ ist der Graph der Funktion $f_{0,5}$ in der Anlage zu sehen.

- Weisen Sie für $k = 0,5$ algebraisch die Extrempunkte des Graphen von $f_{0,5}$ nach.
Skizzieren Sie in das vorgelegte Koordinatensystem die zu den Parameterwerten 1 und 1,5 gehörenden Graphen der Schar.
Klassifizieren Sie für $0 \leq k \leq 2$ die Graphen der Schar nach der Anzahl ihrer Extrempunkte.
- Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -0,1x^2 + 0,8x + 0,4$ begrenzt mit dem Graphen von $f_{0,5}$ zwei abgeschlossene Flächenstücke.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das vorgelegte Koordinatensystem und schraffieren Sie die beiden Flächenstücke.
Erläutern Sie an diesem konkreten Beispiel ein Verfahren zur Bestimmung des Inhaltes von Flächen, die von zwei Graphen begrenzt werden.
Bestimmen Sie den Inhalt der Gesamtfläche.
- Für $k = 0,5$ soll der Graph von $f_{0,5}$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion h mit dem Grad 3 angenähert werden. Die Funktionswerte von $f_{0,5}$ und h an den Randstellen 0 und 2π sollen übereinstimmen. Außerdem sollen beide Graphen an den Stellen $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$ dieselbe Steigung besitzen.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von h .
- Die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle π wird mit t_k bezeichnet.
Weisen Sie nach, dass sich alle Geraden t_k in einem Punkt schneiden. Veranschaulichen Sie das Problem anhand einer Skizze. (Dazu können Sie das vorhandene Koordinatensystem nutzen.)

Material

Anlage: Graph zu $f_{0,5}$ mit $f_{0,5}(x) = 0,5 \cdot x + \sin(x)$



Block 2A – Aufgabe 1

- a) In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, die rot bzw. blau sind. Eine Probenentnahme besteht daraus, dass 10 Kugeln (mit einem Griff) gezogen werden. Dabei ist k die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe. Dann werden für die nächste Probenentnahme die 10 Kugeln wieder zu den anderen gegeben und vermisch. Die Ziehung wurde zwölfmal durchgeführt; dies führte zu folgender Tabelle:

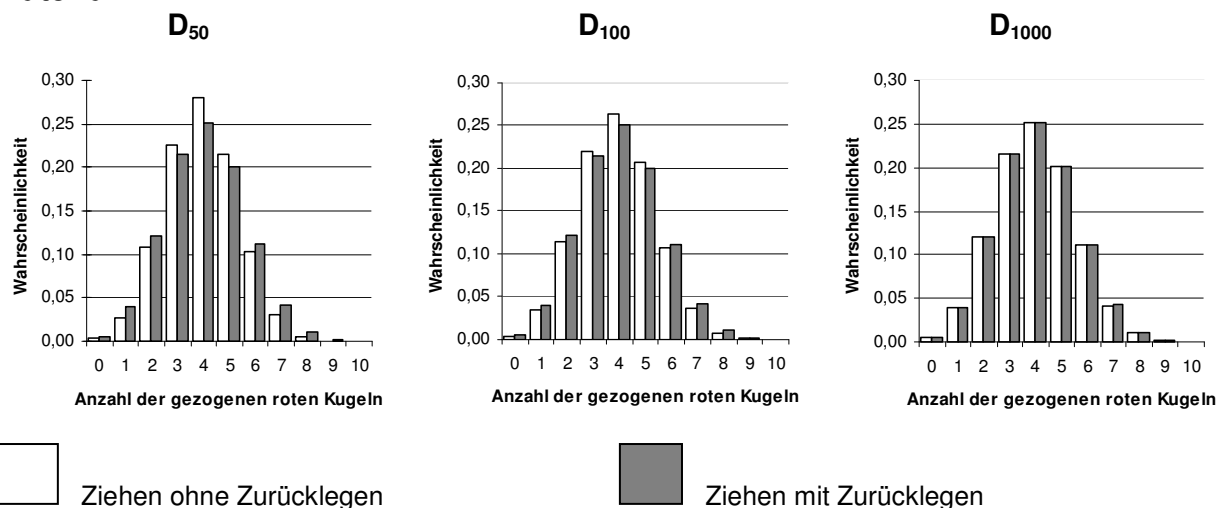
k (Anzahl der roten Kugeln)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Probenentnahmen mit k roten Kugeln	0	0	2	4	3	1	2	0	0	0	0

Bestimmen Sie die mittlere Anzahl der erhaltenen roten Kugeln und die Standardabweichung (Streuung).

Geben Sie eine begründete Prognose für die Anzahl der roten Kugeln in der Urne an.

- b) In einer Urne U_{50} befinden sich 20 rote und 30 blaue Kugeln. Es werden 10 Kugeln nacheinander gezogen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass
- genau 4 rote Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen entnommen werden.
 - mindestens 2 rote Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen entnommen werden.
 - genau 4 rote Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen entnommen werden.
- c) Zusätzlich zu der Urne U_{50} sind zwei Urnen U_{100} (40 rote und 60 blaue Kugeln) und U_{1000} (400 rote und 600 blaue Kugeln) vorhanden. Es wird wieder jeweils das Ziehen von 10 Kugeln nacheinander betrachtet. In den Diagrammen D_{50} , D_{100} , und D_{1000} (siehe unten) sind die Wahrscheinlichkeiten dafür dargestellt, dass 0 bis 10 rote Kugeln gezogen werden.
- Begründen Sie, dass folgende Aussage wahr ist: „Die Wahrscheinlichkeiten, beim Ziehen mit Zurücklegen k rote Kugeln zu erhalten, hängen für gleiche Werte von k nicht davon ab, aus welcher Urne man zieht.“
 - Beschreiben Sie anhand der Diagramme, wie sich die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen ohne Zurücklegen mit steigender Kugelzahl in der Urne verändert.
 - Erläutern Sie die folgende Aussage ohne weitere Berechnungen: „Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von 10 Kugeln ohne Zurücklegen genau 4 rote Kugeln zu erhalten, wird mit zunehmender Anzahl der Kugeln in der Urne kleiner.“

Material



Block 2A – Aufgabe 2

Die vier Punkte $A(-1|-3|-2)$, $B(7|9|-8)$, $C(17|23|13)$ und $D(5|5|22)$ liegen in der Ebene E mit

der Gleichung $\begin{pmatrix} 84 \\ -57 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 91$.

- a) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist.
Entscheiden Sie, ob das Trapez symmetrisch ist.
- b) Eine Geradenschar g_k hat die Darstellung

$$g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 28 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie allgemein in Abhängigkeit von k die Lagebeziehung zwischen der Ebene E und den Geraden der Schar g_k .

Berechnen Sie für den Fall, dass sich eine Gerade der Schar und die Ebene E schneiden, die Koordinaten des Schnittpunktes.

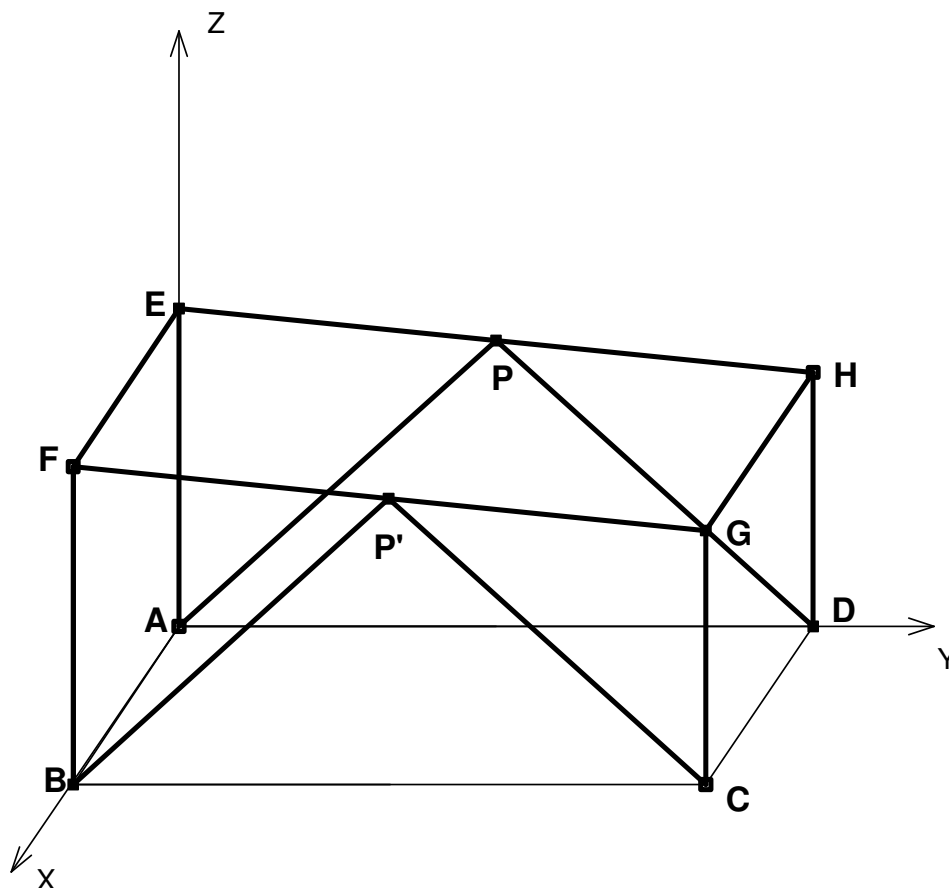
Block 2B – Aufgabe 1

Eine Familie plant einen Carport aus Balken aufzubauen. Eine Planskizze ist in der Anlage zu sehen. An der Einfahrt soll er 2,5 m hoch sein, die Rückwand ist mit 2 m Höhe geplant. Die Breite soll 2 m und die Länge 5 m betragen. So haben die Punkte E und C die Koordinaten $E(0|0|2,5)$ und $C(2|5|0)$.

- Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte des Carports.
Die Punkte P und P' halbieren die Strecken \overline{EH} und \overline{FG} . Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Bestimmen Sie die Längen der Balken \overline{EH} , \overline{AP} und \overline{PD} .
Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, in der die Dachfläche liegt, in Koordinatenform.
- Am Punkt $L(1|0|3)$ oberhalb des Carports befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.
Bestimmen Sie die vier Eckpunkte des Dachschatens in der xy - Ebene.
Entscheiden Sie, welche geometrische Form der Dachschaten hat.
- Ein Punkt Q liegt so auf der Strecke \overline{EH} , dass die Gesamtlänge der beiden Balken \overline{AQ} und \overline{QD} minimal wird.
Bestimmen Sie die minimale Gesamtlänge dieser beiden Holzbalken.

Material

Anlage: Planskizze



Block 2B – Aufgabe 2

- a) Für ein Glücksspiel simuliert ein Computerprogramm den Wurf einer idealen Münze.

Die Spielregeln:

- Der Einsatz für ein Spiel beträgt 2 €.
- Das Spiel endet, wenn „Zahl“ oben liegt.
- Liegt „Wappen“ oben, wird das Spiel fortgesetzt.
- Es werden höchstens 4 Münzwürfe simuliert.

Die Auszahlung beträgt bei

„Zahl“ im ersten Wurf	1 €	„Trostpreis“
„Zahl“ im zweiten Wurf	2 €	Einsatz zurück
„Zahl“ im dritten Wurf	3 €	Gewinn
„Zahl“ im vierten Wurf	4 €	Hauptgewinn
„Zahl“ tritt nicht auf	0 €	

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für eine Auszahlung von 0 €; 1 €; 2 €; 3 € und 4 €. Beurteilen Sie, ob es sich um ein faires Spiel handelt.

- b) Das Computerprogramm kann auch so eingestellt werden, dass es eine manipulierte Münze simuliert, bei der Wappen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,4$ auftritt.

Es werden jeweils die Ergebnisse von 100 Münzwürfen notiert. Sie sollen anhand der Anzahl von geworfenen Wappen entscheiden, ob gerade die ideale oder die manipulierte Münze simuliert wurde.

Bestimmen Sie für das durch $\alpha = 5\%$ gegebene Signifikanzniveau den Ablehnungsbereich und die Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Fehler für die Hypothese, dass eine manipulierte Münze simuliert wurde.

Block 2B - Fortsetzung Aufgabe 2

Material

1. Binomialverteilung für $n=100$, $p=0,4$

k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000
12	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000
16	0,0000	0,0000
17	0,0000	0,0000
18	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000
21	0,0000	0,0000
22	0,0001	0,0001
23	0,0001	0,0003
24	0,0003	0,0006

k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
25	0,0006	0,0012
26	0,0012	0,0024
27	0,0022	0,0046
28	0,0038	0,0084
29	0,0063	0,0148
30	0,0100	0,0248
31	0,0151	0,0398
32	0,0217	0,0615
33	0,0297	0,0913
34	0,0391	0,1303
35	0,0491	0,1795
36	0,0591	0,2386
37	0,0682	0,3068
38	0,0754	0,3822
39	0,0799	0,4621
40	0,0812	0,5433
41	0,0792	0,6225
42	0,0742	0,6967
43	0,0667	0,7635
44	0,0576	0,8211
45	0,0478	0,8689
46	0,0381	0,9070
47	0,0292	0,9362
48	0,0215	0,9577
49	0,0152	0,9729

k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
50	0,0103	0,9832
51	0,0068	0,9900
52	0,0042	0,9942
53	0,0026	0,9968
54	0,0015	0,9983
55	0,0008	0,9991
56	0,0004	0,9996
57	0,0002	0,9998
58	0,0001	0,9999
59	0,0001	1,0000
60	0,0000	1,0000
61	0,0000	1,0000
62	0,0000	1,0000
63	0,0000	1,0000
64	0,0000	1,0000
65	0,0000	1,0000
66	0,0000	1,0000
67	0,0000	1,0000
68	0,0000	1,0000
69	0,0000	1,0000
70	0,0000	1,0000
71	0,0000	1,0000
72	0,0000	1,0000
73	0,0000	1,0000

Die weiteren Werte sind 0 bzw. 1.

2. Binomialverteilung für $n=100$, $p=0,5$

k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000
12	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000
16	0,0000	0,0000
17	0,0000	0,0000
18	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000
21	0,0000	0,0000
22	0,0000	0,0000
23	0,0000	0,0000
24	0,0000	0,0000

k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
25	0,0000	0,0000
26	0,0000	0,0000
27	0,0000	0,0000
28	0,0000	0,0000
29	0,0000	0,0000
30	0,0000	0,0000
31	0,0001	0,0001
32	0,0001	0,0002
33	0,0002	0,0004
34	0,0005	0,0009
35	0,0009	0,0018
36	0,0016	0,0033
37	0,0027	0,0060
38	0,0045	0,0105
39	0,0071	0,0176
40	0,0108	0,0284
41	0,0159	0,0443
42	0,0223	0,0666
43	0,0301	0,0967
44	0,0390	0,1356
45	0,0485	0,1841
46	0,0580	0,2421
47	0,0666	0,3086
48	0,0735	0,3822
49	0,0780	0,4602

k	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
50	0,0796	0,5398
51	0,0780	0,6178
52	0,0735	0,6914
53	0,0666	0,7579
54	0,0580	0,8159
55	0,0485	0,8644
56	0,0390	0,9033
57	0,0301	0,9334
58	0,0223	0,9557
59	0,0159	0,9716
60	0,0108	0,9824
61	0,0071	0,9895
62	0,0045	0,9940
63	0,0027	0,9967
64	0,0016	0,9982
65	0,0009	0,9991
66	0,0005	0,9996
67	0,0002	0,9998
68	0,0001	0,9999
69	0,0001	1,0000
70	0,0000	1,0000
71	0,0000	1,0000
72	0,0000	1,0000
73	0,0000	1,0000

Die weiteren Werte sind 0 bzw. 1.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 1: Analysis

Wahlaufgaben 1A, 1B

Aufgabe 1A (Analysis):

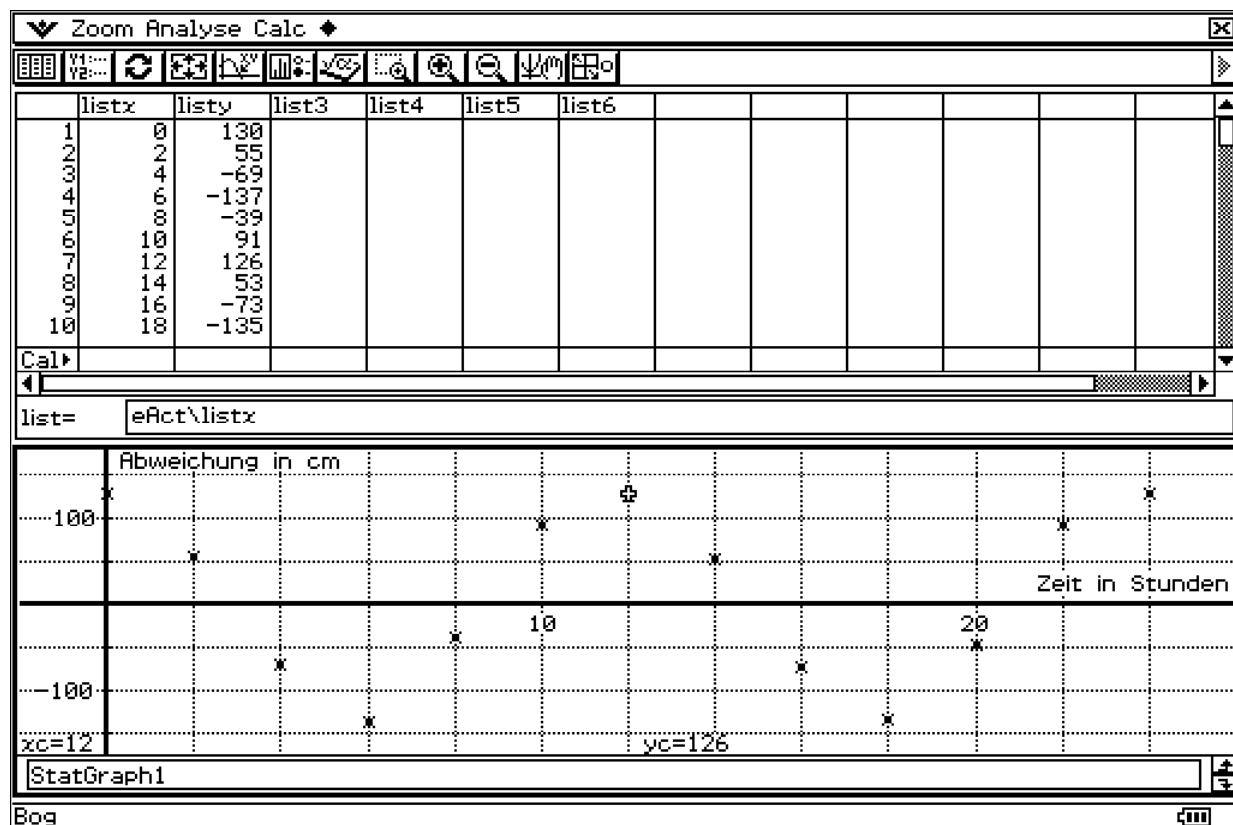
geg. Datenerfassung (Wasserstände über bzw. unter Normalnull im 2-h-Rhythmus)

Zeit (in h)		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Abweichung (in cm)		130	55	-69	-137	-39	91	126	53	-73	-135	-48	93	128

$\text{seq}(x, x, 0, 24, 2) \Rightarrow \text{listx}$ ergibt $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$

$\{130, 55, -69, -137, -39, 91, 126, 53, -73, -135, -48, 93, 128\} \Rightarrow \text{listy}$

Punkteplot der Datenpaare (x_k, y_k) :



Teilaufgabe a)

geg. Modellierung einer Funktion g : $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x+c)) + d$ (sin-Regression)
 zum vermuteten Zusammenhang zwischen den erfassten Abweichungen y_k (Messwerte)
 und den entsprechenden Zeitpunkten x_k (Messstellen), $k = 1, 2, \dots, 13$.
 (Es liegen 13 Datenpaare vor)
 konkret: $y = g(x) = 134 \cdot \sin(0,53 \cdot (x+3)) - 3$

Kontrolle im GTR(CAS): sin-Regression mit 12 Tageswerten von 0 bis 22 Uhr

subList(listx,1,12) \Rightarrow listxx ergibt {0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22}

subList(listy,1,12) \Rightarrow listyy ergibt {130,55,-69,-137,-39,91,126,53,-73,-135,-48,93}

SinReg listxx, listyy, y1, On

done

y1(x) ergibt $132.5816905 \cdot \sin(0.5253962684 \cdot x + 1.692204725) + 3.475872615$

sum(residual^2) ergibt 484.6926939 entspricht $\text{sum}((\text{listyy} - y1(\text{listxx}))^2)$

Define y2(x)=134*sin(0.53*(x+3))-3

done

sum((listyy-y2(listxx))^2) ergibt 1172.423526

1.692204725/0.5261224376 ergibt 3.216370571

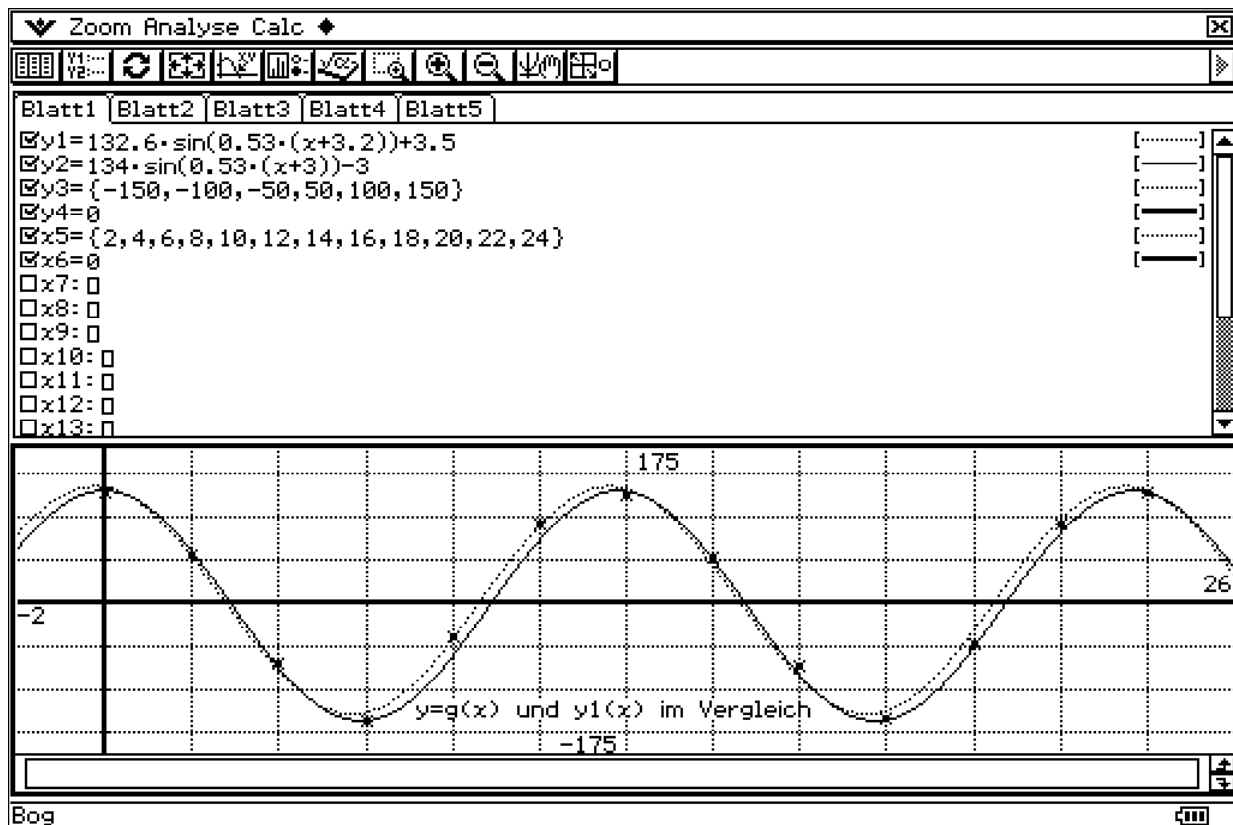
Die Kontrollrechnung zeigt, dass die gegebene Funktion

$$y = g(x) = 134 \cdot \sin(0,53 \cdot (x+3)) - 3$$

etwas verschoben ist im Vergleich zur sin-Regressionsfunktion

$$y_1(x) = 132,6 \cdot \sin(0,53 \cdot (x+3,2)) + 3,5$$

$y = g(x)$ und $y = y_1(x)$ im Vergleich:



ges. Bewertung der Parameter a, b, c und d anhand der Datentabelle

Lösung:

Parameter a=134:

Amplitude der sin-Schwingung, in der Tabelle liegen die Maxima bei 130, 126 und 128 (im Mittel bei 128) und die Minima bei -137 und -135 (im Mittel bei -136).

Es ergibt sich eine mittlere Amplitude von $\pm 132,4$.

Unter Beachtung einer senkrechten Verschiebung um -4 (Parameter d) würden die Extrema von ± 132 auf 128 und -136 verschoben.

Der Parameter a=132 wäre im Mittel gesehen etwas günstiger.

Parameter d=-3:

Verschiebung der sin-Schwingung nach unten (Richtung negative y-Achse)

Ausgehend von der mittleren Amplitude 132 wäre aus Sicht der Extrema eine Verschiebung um -4 etwas günstiger.

Parameter b=0,53:

Anpassung der Periodenlänge $T=2\pi$ an die Periodenlänge $T=12$:

$\omega=2\pi/T=2\pi/12$ ergibt 0,52, was etwa dem Parameter b entspricht.

$2*\pi/12$ ergibt 0.5235987756

Parameter c=3:

Verschiebung um $c = 3 = T/4$ nach links

($b*c$ etwa $\pi/2$ bzw. $c=3=T/4$ ist eine viertel Periode von $T=12$)

Damit beginnt die Schwingung zum Zeitpunkt 0 im Hochpunkt.

ges. $g(4)$ und $g(14)$ und Interpretation

der Unterschiede zum tabellierten Wert (zwei mögliche Ursachen erläutern)

Lösung:

Define $g(x)=y2(x)$

done

$g(x)$ ergibt $134*\sin(0.53*(x+3))-3$

$g(4)$ ergibt -75.13092811

$g(14)$ ergibt 51.00022165

$x=4$: gemessener Wert: -69, modellierter Wert: -75

$x=14$: gemessener Wert: 53, modellierter Wert: 51

mögliche Ursachen für die Unterschiede:

1. Modellanpassung ist nicht optimal (bessere Parameteranpassung oder $g(x)$ könnte besser eine Überlagerung unterschiedlicher trigonometrischer Funktionen sein: Fourieranalyse)
2. statistische Datenerhebung ist mit (zufälligen) Fehlern behaftet: Messfehler in der Datenerfassung, die zu den festgestellten Unterschieden zur Modellfunktion führen könnten. Bereits die Rundung erfasster Daten kann zu Messfehlern führen.

Teilaufgabe b)

geg. Modellfunktion $g(x)=134\cdot\sin(0.53\cdot(x+3))-3$, $24\leq x\leq 48$,

ges. Zeitpunkte für die kommenden 24 Stunden (nach der Datenerfassung) mit

- Abweichung 0 (auf Normalnull) (einen Lösungsweg ohne GTR angeben)
- extremale Abweichungen (nach unten: Minima, nach oben Maxima)

Lösung:**Nullstellen von $g(x)$:**

$\text{solve}(g(x)=0,x,24,24,36)$ ergibt $\{x=26.59542139, x=32.607445\}$

$\text{solve}(g(x)=0,x,36,36,48)$ ergibt $\{x=38.45048801, x=44.46251162\}$

Es gibt vier Nullstellen:

$x_{n1} \approx 26.6$, $x_{n2} \approx 32.6$, $x_{n3} \approx 38.5$ und $x_{n4} \approx 44.5$

Umrechnung der Dezimalzahlen in Stunden und Minuten (und Sekunden):

$\text{toDMS}(26.59542139)$ ergibt $\text{dms}(26,35,43.517004)$

$\text{toDMS}(32.607445)$ ergibt $\text{dms}(32,36,26.802)$

$\text{toDMS}(38.45048801)$ ergibt $\text{dms}(38,27,1.756836)$

$\text{toDMS}(44.46251162)$ ergibt $\text{dms}(44,27,45.041832)$

Es handelt sich damit am Folgetag um die Uhrzeiten:

2:36Uhr, 8:36Uhr, 14:27Uhr und 20:28Uhr

Rechnung per Hand (mittels arcsin-Funktion):

$134\cdot\sin(0.53\cdot(x+3))-3 = 0$ ergibt $\sin(0.53\cdot(x+3)) = 3/134$

Im Hauptargumentbereich der sin-Funktion ($-\pi/2$ bis $\pi/2$) hat man die Umkehrfunktion:

$0.53\cdot(x+3) = \arcsin(3/134) \in [-\pi/2, \pi/2]$

Hieraus ergeben sich unter Beachtung der weiteren Kurvenanteile der sin-Funktion die anderen Lösungen wie folgt:

$0.53\cdot(x+3) = \arcsin(3/134)$ und

$0.53\cdot(x+3) = \pi - \arcsin(3/134)$ für die erste Periode.

Notwendige Rechnung im GTR:

$\sin^{-1}(3/134)$ ergibt 0.02238993037

$\pi - \sin^{-1}(3/134)$ ergibt 3.119202723

Hieraus für die k-te Periode:

$0.53\cdot(x+3) = \arcsin(3/134) + k\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi + \arcsin(3/134)$

$0.53\cdot(x+3) = \pi - \arcsin(3/134) + k\cdot 2\pi = (2k+1)\cdot\pi - \arcsin(3/134)$

nach x umgestellt:

$x = (k\cdot 2\pi + \arcsin(3/134)) / 0.53 - 3$ und $x = ((2k+1)\cdot\pi - \arcsin(3/134)) / 0.53 - 3$,

$k \in \mathbb{N}$ derart, dass die x-Werte im Intervall $[24, 48]$ liegen.

Kontrolle im GTR:

$x = (5 \cdot \pi - \sin^{-1}(3/134))/0.53 - 3$ ergibt $x = 26.59542139$
 $x = (6 \cdot \pi + \sin^{-1}(3/134))/0.53 - 3$ ergibt $x = 32.607445$
 $x = (7 \cdot \pi - \sin^{-1}(3/134))/0.53 - 3$ ergibt $x = 38.45048801$
 $x = (8 \cdot \pi + \sin^{-1}(3/134))/0.53 - 3$ ergibt $x = 44.46251162$

Extremstellen:

$fMin(g(x), x, 24, 36)$ ergibt $\{MinValue=-137, x=29.6014332\}$
 $fMax(g(x), x, 24, 36)$ ergibt $\{MaxValue=131, x=35.52896651\}$
 $fMin(g(x), x, 36, 48)$ ergibt $\{MinValue=-137, x=41.45649981\}$
 $fMax(g(x), x, 36, 48)$ ergibt $\{MaxValue=131, x=47.38403312\}$

Umrechnung der Dezimalzahlen in Stunden und Minuten (und Sekunden):

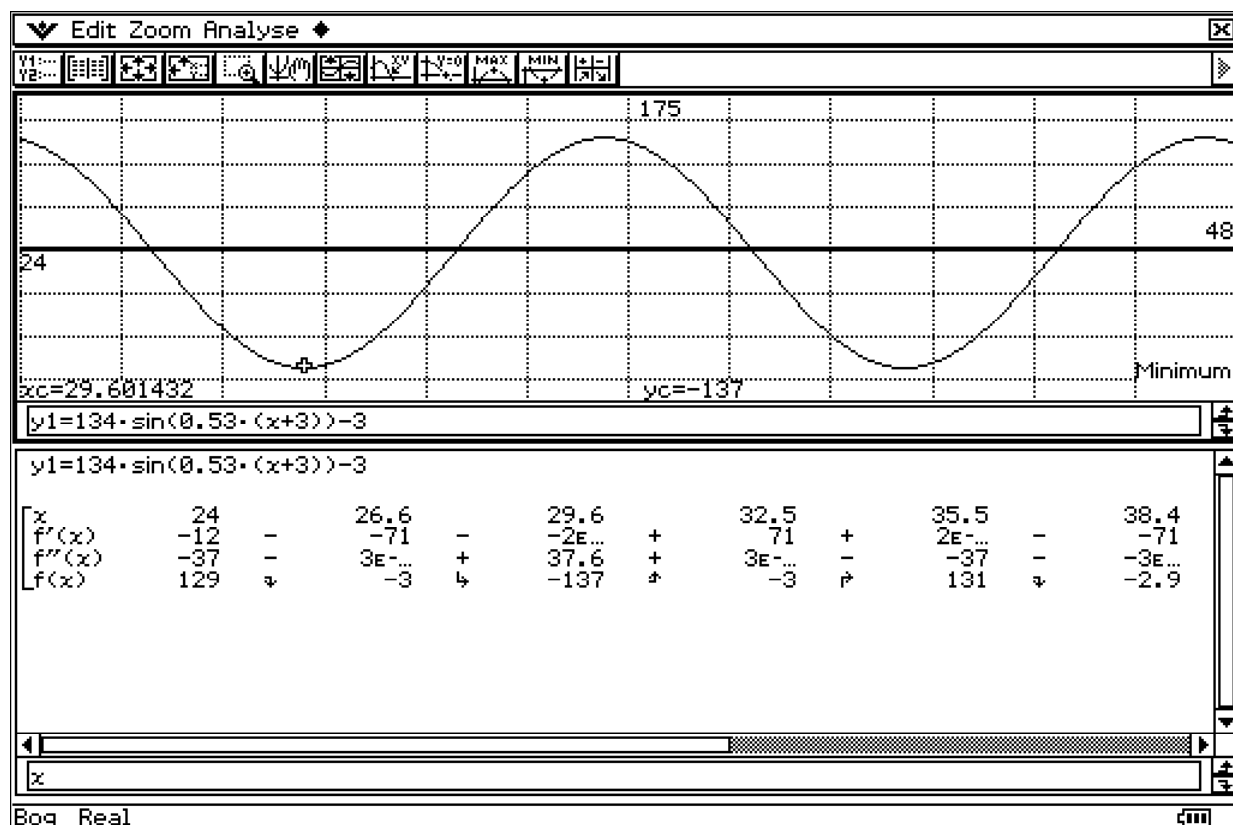
$toDMS(29.6014332)$ ergibt $dms(29,36,5.15952)$
 $toDMS(35.52896651)$ ergibt $dms(35,31,44.279436)$
 $toDMS(41.45649981)$ ergibt $dms(41,27,23.399316)$
 $toDMS(47.38403312)$ ergibt $dms(47,23,2.519232)$

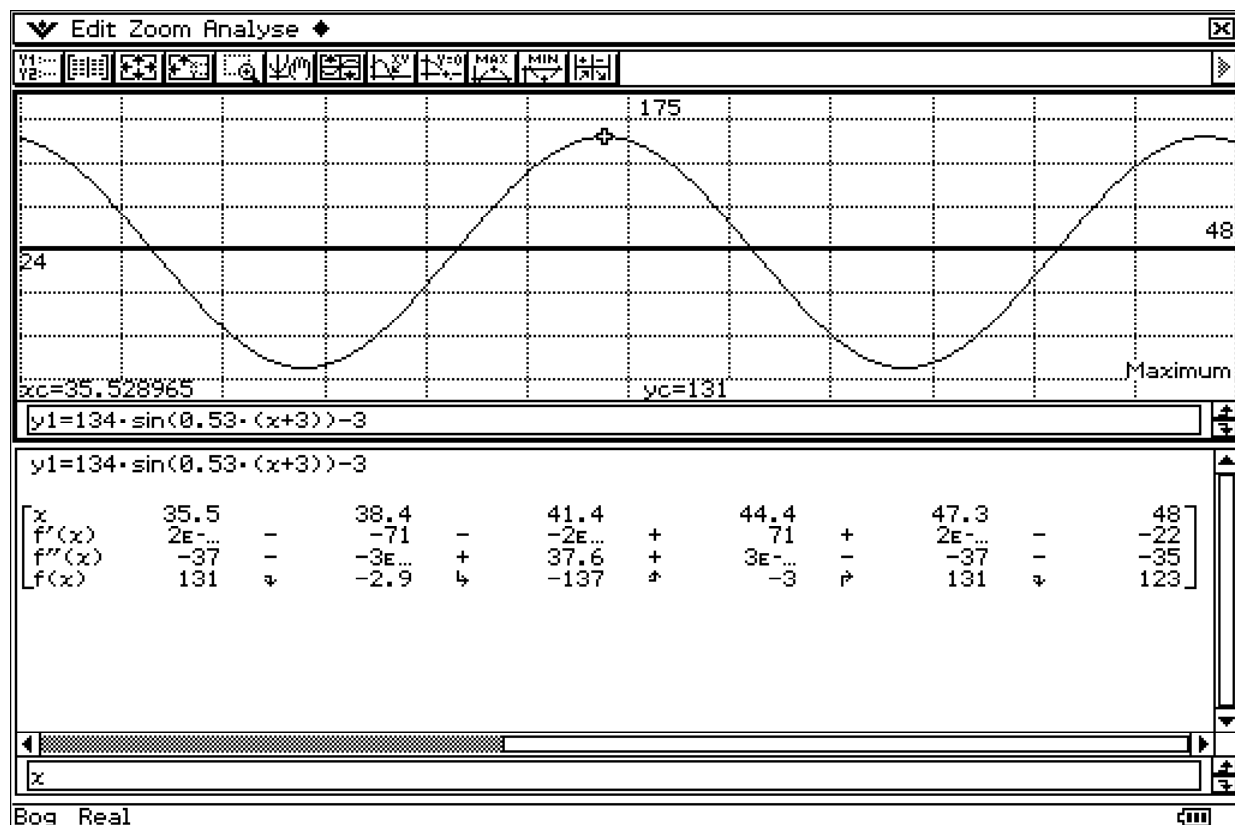
Es handelt sich damit am Folgetag um die Uhrzeiten:

Min: 5:36Uhr, Max: 11:32Uhr, Min: 17:27Uhr und Max: 23:23Uhr

Alternativer Lösungsweg zum Auffinden der Extrema:

graphische Darstellung mit zusammenfassender Ergebnistabelle

graphische Auswertung der Extrema



Die zusammenfassende Tabelle enthält neben Informationen an den Intervallendpunkten (hier 24 bis 48) Angaben zu den Extremstellen ($f'(x)=0$) und Wendestellen ($f''(x)=0$) sowie Hinweise auf das Monotonieverhalten zwischen den Nullstellen der 1. bzw. 2. Ableitung.

Weitere Möglichkeit zum Auffinden der Extrema ist denkbar:

analytische Auswertung der Nullstellengleichung $g'(x)=0$ (notwendige Bedingung für Extremstellen) im Intervall von 24 bis 48:

Define $g(x)=134*\sin(0.53*(x+3))-3$

done

Define $g1(x)=\text{diff}(g(x),x)$

done

$g1(x)$ ergibt $71.02*\cos(0.53*(x+3))$

$\text{solve}(g1(x)=0,x,24,48)$ ergibt

$\{x=29.6014332, x=35.52896651, x=41.45649981, x=47.38403312\}$

Damit gibt es vier extremwertverdächtige Stellen.

Hinreichende Bedingung:

Define $g2(x)=\text{diff}(g(x),x,2)$

done

$\text{signum}(g2(x)|x=29.6014332)$ ergibt 1

$\text{signum}(g2(x)|x=35.52896651)$ ergibt -1

$\text{signum}(g2(x)|x=41.45649981)$ ergibt 1

$\text{signum}(g2(x)|x=47.38403312)$ ergibt -1

signum +1 bedeutet Minimumstelle (konvexer Kurvenverlauf)

signum -1 bedeutet Maximumstelle (konkaver Kurvenverlauf)

Teilaufgabe c)

geg. $G(x) = -((13400)/(53)) * \cos(0,53*(x+3)) - 3x$

ges. Nachweis: $G(x)$ ist eine Stammfunktion von $g(x)$

Lösung:

$$G'(x) = ((13400)/(53)) * \sin(0,53*(x+3)) * 0,53 - 3 = 134 * \sin(0,53*(x+3)) - 3$$

ges. $\int(g(x), x, 1, 10)$, Interpretation des Ergebnisses

Lösung:

$$\int(g(x), x, 1, 10) = G(10) - G(1) =$$

Rechnung im GTR(CAS):

Define $G(x) = -(13400/53) * \cos(0.53*(x+3)) - 3x$ done

$G(10) - G(1)$ ergibt -366.6714905

$\int(g(x), x, 1, 10)$ ergibt ebenfalls -366.6714905

Interpretation des negativen Ergebnisses:

Das Integral summiert vorzeichenbehaftete Flächenanteile, in diesem Fall liegt der größere Flächenanteil unterhalb der x-Achse. Das Ergebnis ist nicht die insgesamt eingeschlossene Fläche zwischen x-Achse und der Funktion im Intervall von 1 bis 10.

geg. Gleichung $\int(g(x), x, 1, u) = 0$ mit $1 \leq u \leq 14$ und den Lösungen,
 $u_1=1$, $u_2=4,7548$, $u_3=13,1958$

ges. Interpretation der Näherungslösungen der gegebenen Gleichung.

Lösung:

Kontrolle der Näherungslösungen:

$\text{solve}(G(u) - G(1) = 0, u, 1, 1, 14)$ ergibt $\{u=4.754833251, u=13.1958121\}$

Interpretation:

$u_1=1$ bedeutet:

Integral über das Intervall $[1, 1]$ der Länge 0. Es entsteht kein Flächeninhalt.

$u_2=4,7548$ bedeutet:

Ein positiver und ein negativer Flächenanteil heben sich auf.
 $g(x)$ hat eine Nullstelle im Integrationsintervall.

$u_3=13,1958$ bedeutet:

Zwei positive und ein negativer Flächenanteil heben sich auf.
 $g(x)$ hat zwei Nullstellen im Integrationsintervall.

Teilaufgabe d)

geg. $f(x) = \sin(x+c)+d$ und Punkt $P(3|2)$

ges. Bedingung an c und d derart, dass f punktsymmetrisch zu P im gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} ist.

Lösung:

$y = \sin(x)$ ist punktsymmetrisch zu $O(0|0)$, d.h. ungerade Funktion.

$y = \sin(x-3)$ ist punktsymmetrisch zu $Q(3|0)$ (Verschiebung nach rechts)

$y = \sin(x-3)+2$ ist punktsymmetrisch zu $P(3|2)$ (Verschiebung nach oben)

Antwort: $c = -3$ und $d = 2$.

geg. $k(x) = \sin(2*(x+c))+d$

ges. Einfluss des Faktors 2 auf die Parameter c und d im Zusammenhang mit der Punktsymmetrie zu P

Lösung:

Der Faktor 2 verändert die Periodizität $T=2\pi$ in $T=\pi$ und ist ansonsten ohne Einfluss auf die Verschiebung im Argumentbereich x und Wertebereich y .

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

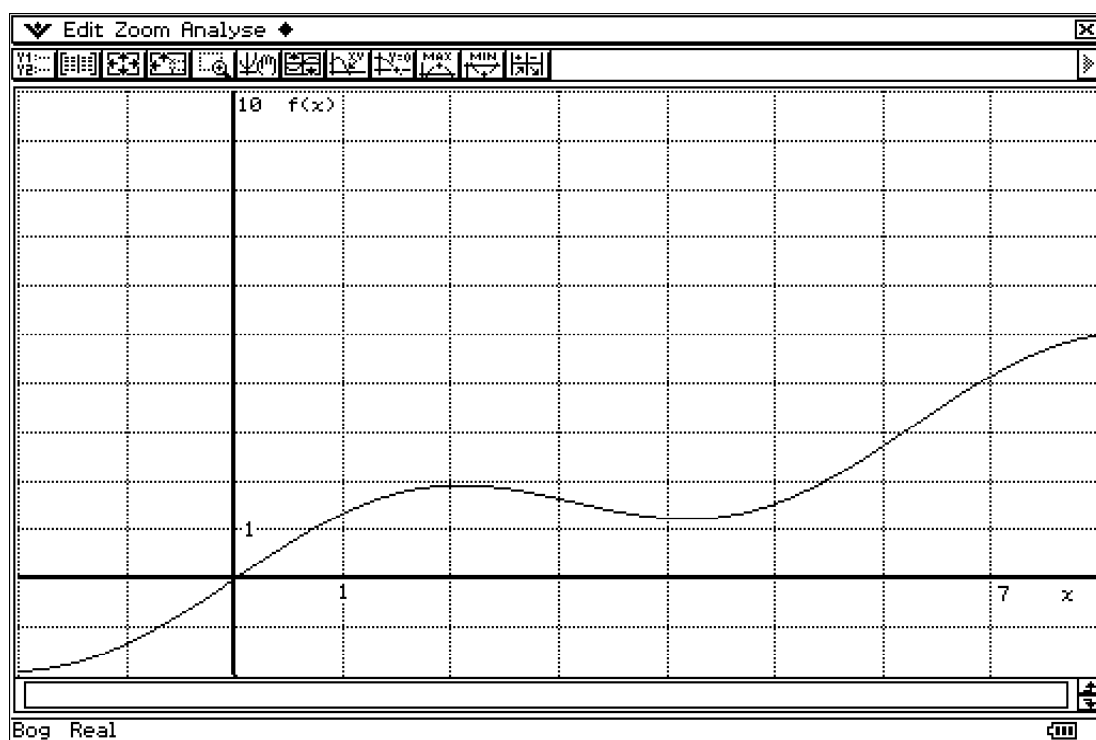
Pflichtaufgabenteil 1: Analysis

Wahlaufgaben 1A, 1B

Aufgabe 1B (Analysis):

geg. Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = k \cdot x + \sin(x)$, $0 \leq k \leq 2$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

Graph für f_k mit $k=1/2$



Teilaufgabe a)

ges. analytische Berechnung der Extrempunkte für f_k mit $k=1/2$

Lösung:

Define $f(x)=x/2+\sin(x)$

done

Define $f1(x)=\text{diff}(f(x),x)$

done

```
Define f2(x)=diff(f1(x),x,2)
done
simplify(f1(x)) ergibt cos(x)+1/2
simplify(f2(x)) ergibt -sin(x)
```

notwendige Bedingung:

allgemeine Lösung:

```
solve(f1(x)=0,x) ergibt {x=2*π*constn(1)-2*π/3,x=2*π*constn(2)+2*π/3}
```

spezielle Lösungen:

```
solve(f1(x)=0,x,0,0,2*π) ergibt {x=2.094395102,x=4.188790205}
```

Es gibt zwei extremwertverdächtige Stellen

$$x = 2\pi/3 = 2.094395102 \text{ und } x = 2\pi - 2\pi/3 = 4\pi/3 = 4.188790205$$
Kontrolle:

$$2\pi/3 \text{ ergibt } 2.094395102$$

$$4\pi/3 \text{ ergibt } 4.188790205$$
hinreichende Bedingung:

$$\text{signum}(f_2(x)|x=2\pi/3) \text{ ergibt } -1$$

$$\text{signum}(f_2(x)|x=4\pi/3) \text{ ergibt } 1$$
Ergebnis:
Hochpunkt $H(2\pi/3 | f(2\pi/3))$ mit $f(2\pi/3) = \pi/3 + \sqrt{3}/2 \approx 1,91$
Tiefpunkt $T(4\pi/3 | f(4\pi/3))$ mit $f(4\pi/3) = 2\pi/3 - \sqrt{3}/2 \approx 1,23$
Rechnung im GTR(CAS):

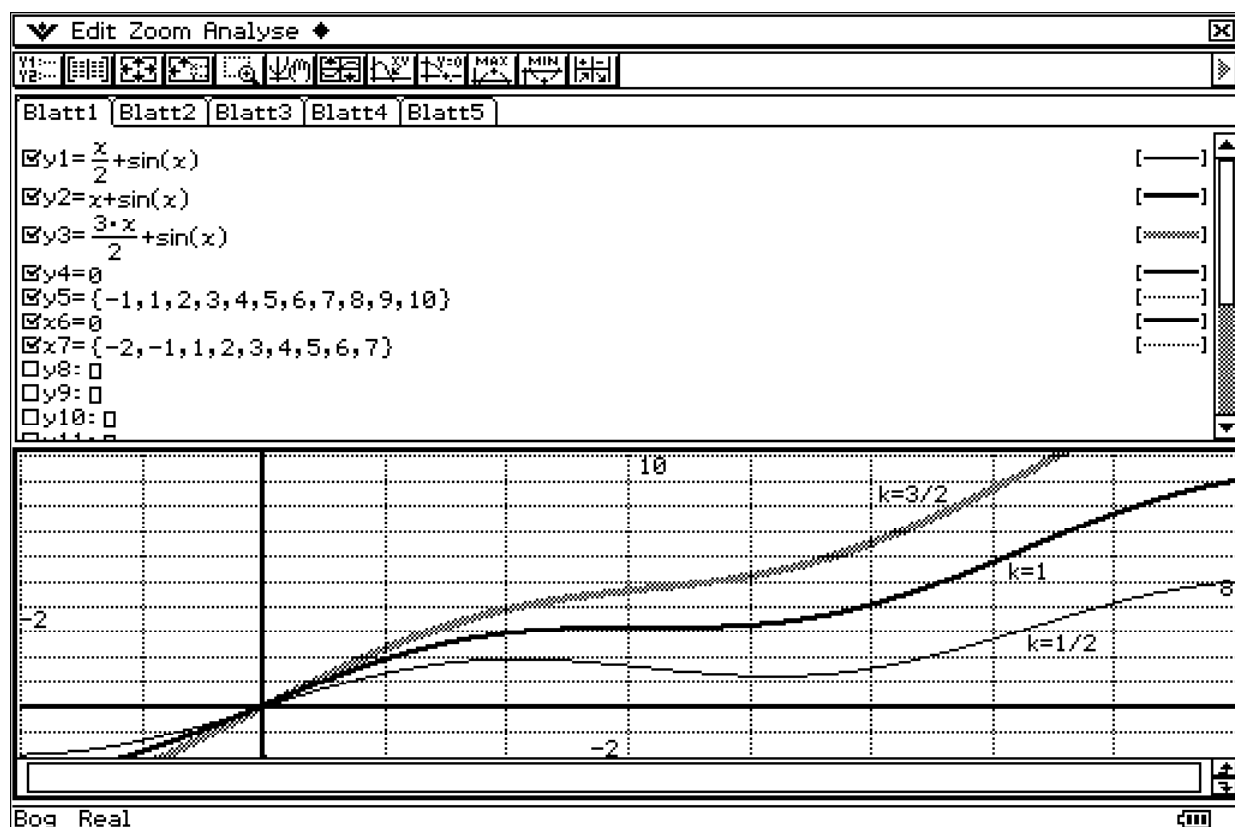
```
f(2*π/3)          ergibt π/3 + 3^(1/2)/2
approx(ans)       ergibt 1.913222955
f(4*π/3)          ergibt 2*π/3 - 3^(1/2)/2
approx(ans)       ergibt 1.228369699
```

Weitere (globale) Extrempunkte befinden sich in den Randpunkten des betrachteten Kurvenastes in Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$:

Tiefpunkt (global): $T(0|0)$ **und** **Hochpunkt (global):** $H(2\pi|2\pi)$

ges. Skizzen für $k=1$ und $k=3/2$

Lösung:
Graph für f_k mit $k=1$ und $k=3/2$ (neben $k=1/2$):



ges. Klassifikation der Graphen für $0 \leq k \leq 2$ hinsichtlich vorhandener (lokaler) Extrempunkte

Lösung:

Define $f(x,k)=k*x+\sin(x)$

done

Define $f_1(x,k)=k+\cos(x)$

done

Define $f_2(x,k)=-\sin(x)$

done

$\text{solve}(f_1(x,k)=0,x)$ ergibt $\{x=\cos^{-1}(k)+2*\pi*\text{constn}(1)-\pi, x=-\cos^{-1}(k)+2*\pi*\text{constn}(2)+\pi\}$

Die arccos-Funktion ist nur für Argumente zwischen -1 und 1 definiert, d.h.

für $k>1$ gibt es keine Lösung, d.h. keine lokalen Extremstellen.

für $k=1$ ist $\arccos(1)=0$,

d.h. es gibt genau eine Lösung $x=\pi$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

$\text{solve}(f_1(x,1)=0,x,0,2*\pi)$ ergibt $\{x=3.141592654\}$

Hinreichende Bedingung:

Es gilt $f_1'(x) = 1+\cos(x) \geq 1-1 = 0$, d.h. der Kurvenverlauf ist im betrachteten Intervall überall monoton wachsend (1. Ableitung nichtnegativ).

Damit gibt es keine lokalen Extrempunkte (nur globale Randextrema).

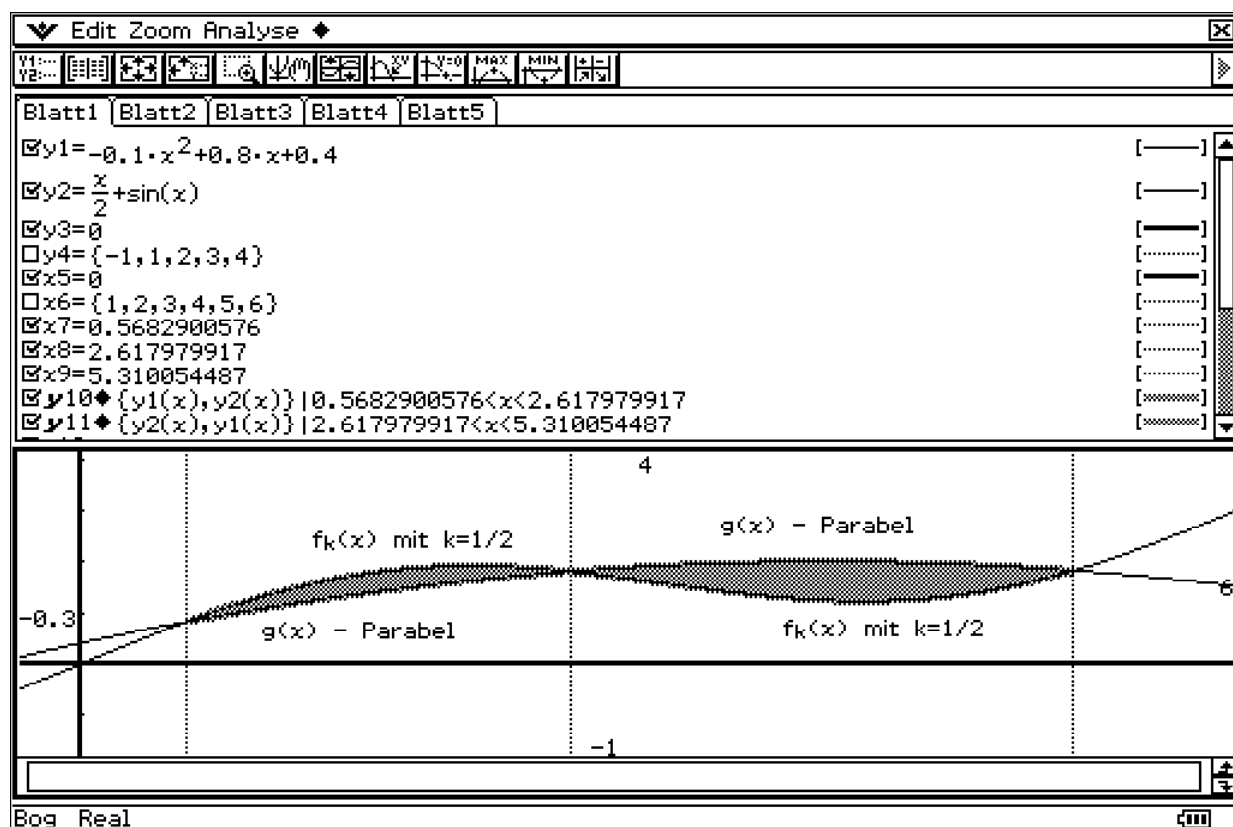
für $0 \leq k < 1$ gibt es zwei lokale Extremstellen im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$: $x = \pi \pm \arccos(k)$, da die 2. Ableitung nicht 0 ist:

$$f_2(x,k)|_{x=\pi+\cos^{-1}(k)} \text{ ergibt } (-k^2+1)^{1/2}$$

$$f_2(x,k)|_{x=\pi-\cos^{-1}(k)} \text{ ergibt } -(-k^2+1)^{1/2}$$

abschließende Klassifikation der Kurvenschar:für $0 \leq k < 1$: zwei lokale Extrempunktefür $1 \leq k \leq 2$: keine lokalen Extrempunkte**Teilaufgabe b)**geg. $g(x) = -0.1x^2 + 0.8x + 0.4$ und $f_k(x) = kx + \sin(x)$ mit $k=1/2$ g und f_k begrenzen zwei abgeschlossene Flächenstücke

ges. Skizze der Graphen und Schraffur der Flächenstücke

Lösung:**Schraffur der Flächenstücke:**

ges. Flächeninhalt der Gesamtfläche,
Vorgehen bei vorzeichenbehafteten Flächenanteilen in diesem Beispiel

Lösung: Schnittstellen ermitteln:

Define $g(x) = -0.1x^2 + 0.8x + 0.4$
done

Define $f(x) = x/2 + \sin(x)$
done

$\text{solve}(f(x)=g(x),x)$ ergibt $\{x=-2.247693029, x=0.5682900576, x=2.617979917, x=5.310054487\}$
 $0.5682900576 \Rightarrow x_{n1} \quad 2.617979917 \Rightarrow x_{n2} \quad 5.310054487 \Rightarrow x_{n3}$

Die erste Lösung entfällt (nicht im Intervall von f)

Zerlegung des Integrals in zwei positive Teilintegrale:

$$\int (|f(x)-g(x)|, x, x_{n1}, x_{n3}) = \int (f(x)-g(x), x, x_{n1}, x_{n2}) + \int (g(x)-f(x), x, x_{n2}, x_{n3})$$

Rechnung im GTR(CAS):

$$\int (f(x)-g(x), x, x_{n1}, x_{n2}) + \int (g(x)-f(x), x, x_{n2}, x_{n3}) \text{ ergibt } 1.815556222$$

Ergebnis: die Gesamtfläche beträgt ca. 1,82 Flächeneinheiten.

Teilaufgabe c)

geg. Polynomapproximation für f_k ($k=1/2$) im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ durch

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\text{mit } h(0) = f_k(0), h(2\pi) = f_k(2\pi), h'(2\pi/3) = f_k'(2\pi/3) \text{ und } h'(4\pi/3) = f_k'(4\pi/3)$$

ges. h mit den Koeffizienten a, b, c, d

Lösung: $d=0$ ist auch sofort aus der ersten Bedingung erkennbar.

Define $f(x)=x/2+\sin(x)$

done

Define $h(x)=a*x^3+b*x^2+c*x+d$

done

$$\text{solve}(\{h(0)=f(0), h(2*\pi)=f(2*\pi), \text{diff}(h(x),x,1,2*\pi/3)=\text{diff}(f(x),x,1,2*\pi/3), \\ \text{diff}(h(x),x,1,4*\pi/3)=\text{diff}(f(x),x,1,4*\pi/3)\}, \{a,b,c,d\})$$

$$\text{ergibt } \{a=3/(4*\pi^2), b=-9/(4*\pi), c=2, d=0\}$$

$$\{a=3/(4*\pi^2), b=-9/(4*\pi), c=2, d=0\} \text{ ergibt } \{a=0.07599088773, b=-0.7161972439, c=2, d=0\}$$

Ergebnis: $h(x) = 3/(4*\pi^2)*x^3 - 9/(4*\pi)*x^2 + 2*x \approx 0.076*x^3 - 0.716*x^2 + 2*x$

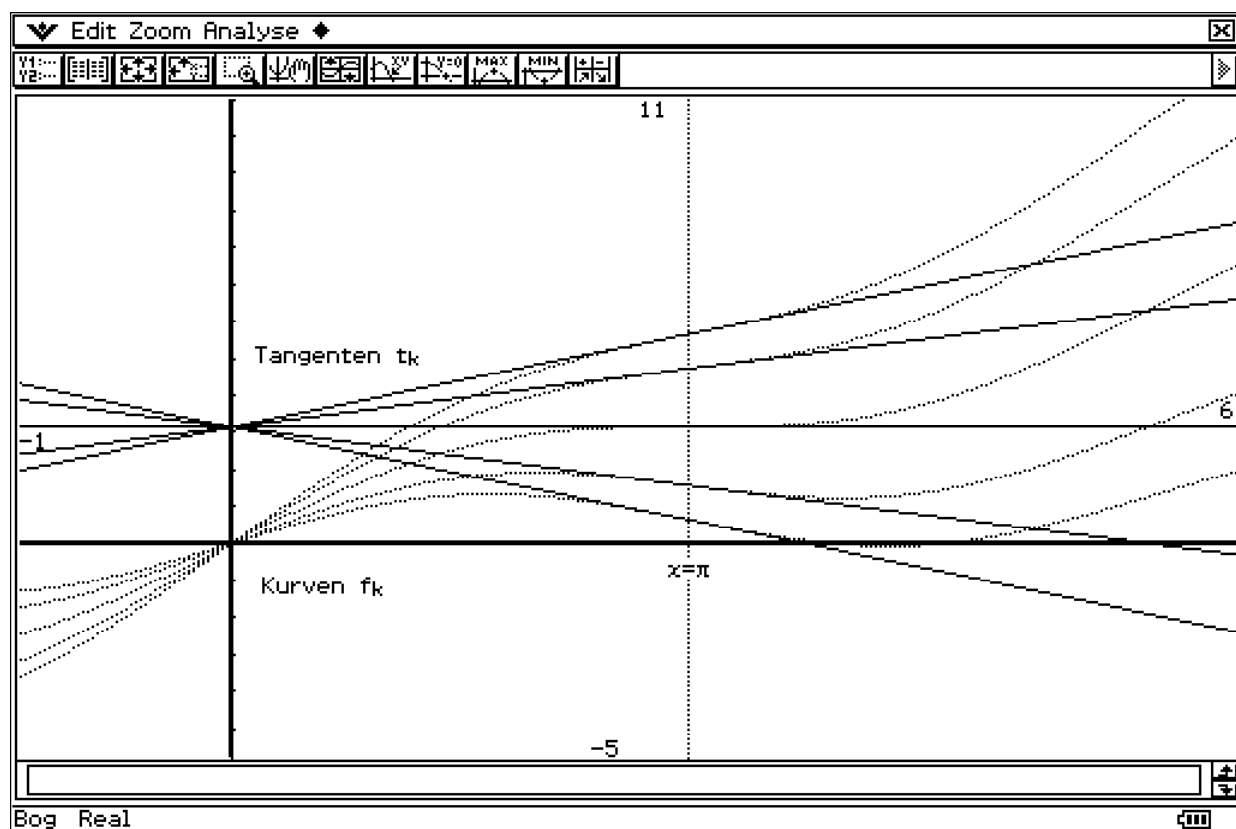
Teilaufgabe d)

geg. Tangenten t_k an f_k an der Stelle π

ges. Nachweis eines gemeinsamen Schnittpunkts aller Tangenten, Skizze

Lösung:

Skizze der Tangenten:



Rechnung:

Tangentengleichung: $y = t_k(x) = f'_k(\pi) \cdot (x - \pi) + f_k(\pi)$, d.h.

$$y = t_k(x) = (k + \cos(\pi)) \cdot (x - \pi) + k \cdot \pi + \sin(\pi) = (k - 1) \cdot (x - \pi) + k \cdot \pi = (k - 1) \cdot x + \pi$$

Damit haben alle Tangenten das Absolutglied π (Schnittpunkt mit y-Achse $S(0|\pi)$).

Der gemeinsame Schnittpunkt ist $S(0|\pi)$.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 1 (Block 2A, Stochastik):

Teilaufgabe a)

geg. Urne mit $N=1000$ Kugeln (M rote und $N-M$ blaue Kugeln)
 Probenentnahme von $n=10$ Kugeln (ohne Zurücklegen), dabei k rote Kugeln erhalten.
 Nach Zurücklegen der 10 Kugeln die Probenentnahme wiederholen.
 Insgesamt gibt es 12 derartiger Probenentnahmen aus stets der gleichen
 Grundgesamtheit mit folgendem Gesamtergebnis
 (Verteilungstabelle einer Zufallsgröße X)

k (Anzahl der roten Kugeln)		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<hr/>												
Anzahl h_k der Proben mit k roten Kugeln		0	0	2	4	3	1	2	0	0	0	0

ges. Parameterschätzungen für $\mu = E(X)$ und $\sigma = D(X)$ zur gegebenen Verteilungstabelle einer Zufallsgröße X

Lösung:

Schätzung für $E(X)$: empirischer Mittelwert

$$\bar{x} = (1/12) * \sum(k * h_{k,k,0,10}) = 3,75$$

Rechnung im GTR(CAS):

$\text{seq}(k,k,0,10,1) \Rightarrow \text{listk}$ ergibt $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
 $\{0,0,2,4,3,1,2,0,0,0,0\} \Rightarrow \text{listh}$ ergibt $\{0,0,2,4,3,1,2,0,0,0,0\}$
 $\text{sum}(\text{listh})$ ergibt 12
 $\text{sum}(\text{listk} * \text{listh}) / 12 \Rightarrow \text{xquer}$ ergibt 3.75

Schätzung für $D(X)$: empirische Standardabweichung

$$s = \sqrt{(1/11) * \sum((k - \bar{x})^2 * h_{k,k,0,10})} = 1,299 \approx 1,36.$$

Rechnung im GTR(CAS):

$$(1/11 * \text{sum}((\text{listk} - \text{xquer})^2 * \text{listh}))^{(1/2)} \Rightarrow s \text{ ergibt } 1.356801051$$

Anmerkung:

Die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X ist eine hypergeometrische Verteilung $H(N, M, n)$, wobei M unbekannt ist.

Es gilt hierbei $P(X=k) = \frac{nCr(M, k) \cdot nCr(N-M, n-k)}{nCr(N, n)}$, $k=0, 1, 2, \dots, 10$, sofern $10 \leq M \leq 990$ gilt (andernfalls sind bestimmte k -Werte unmöglich).

$$E(X) = n \cdot M/N \quad \text{und} \quad D^2(X) = n \cdot (M/N) \cdot (1 - M/N) \cdot (N-n)/(N-1)$$

Mit $n \cdot M/N = 3,75$, d.h. $M/N = 0,375$ ergibt sich theoretisch $D^2(X) = 3,75 \cdot 0,625 \cdot 990/999 = 2,32$

$3,75 \cdot 0,625 \cdot 990/999$ ergibt 2.322635135

$\text{ans}^{(1/2)}$ ergibt 1.524019401

d.h. $D(X) = 1,52$.

ges. begründete Prognose für M

Lösung:

Mit dem empirischen Mittelwert 3,75 als Schätzung für $E(X) = n \cdot M/N$ ergibt sich $M = 3,75 \cdot N/n = 375$.

andere Begründung:

Mit einer Probenentnahme ($n=10$) erhält man im Mittel 3,75 rote Kugeln. Das sind 37,5% des Stichprobenumfanges. Somit könnte man vermuten, dass 37,5% aller Kugeln rot sind, d.h. 375 bei $N=1000$ Kugeln insgesamt.

Intervallschätzung für μ (Vertrauensintervall):

Der empirische Mittelwert \bar{x} ist näherungsweise normalverteilt.

Die zentrierte und normierte Größe $(\bar{x} - \mu) / (s / \sqrt{12})$ ist näherungsweise t -verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Mit einem Vertrauensniveau von 95% erhält man folgende Intervallschätzung für μ :

OneSampleTInt 0.95, 3.75, 1.3568, 12

done

DispStat

done

ergibt für das 1-Stichproben- t -Intervall für μ :

linke Grenze (Left): 2.8879

rechte Grenze (Right): 4.6121

d.h. $2.8879 \leq \mu \leq 4.6121$

Hinweis:**Intervallschätzung für σ (Vertrauensintervall):**

Die empirische Größe $(n-1) \cdot s^2$, normiert mit σ^2 , ist näherungsweise Chi-Quadrat-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden.

Mit einem Vertrauensniveau von 95% erhält man folgende Intervallschätzung für σ :

$$\left((n-1) \cdot s^2 / \text{invChiCDf}(0.025, 11) \right)^{1/2} \leq \sigma \leq \left((n-1) \cdot s^2 / \text{invChiCDf}(0.975, 11) \right)^{1/2}$$

$$1.3568 \Rightarrow s \quad 12 \Rightarrow n$$

$$\left((n-1) \cdot s^2 / \text{invChiCDf}(0.025, 11) \right)^{1/2} \text{ ergibt } 0.9611505407$$

$$\left((n-1) \cdot s^2 / \text{invChiCDf}(0.975, 11) \right)^{1/2} \text{ ergibt } 2.303680894$$

$$\text{d.h. } 0.9612 \leq \sigma \leq 2.3037$$

Teilaufgabe b)

geg. Urne U_{50} mit $M=20$ roten und $N-M=30$ blauen Kugeln (d.h. $N=50$).

Probenentnahme (mit oder ohne Zurücklegen) vom Umfang $n=10$.

ges. Wahrscheinlichkeiten

$P(\{\text{genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen mit Zurücklegen}\})$,

$P(\{\text{mindestens 2 rote Kugeln entnommen beim Ziehen mit Zurücklegen}\})$,

$P(\{\text{genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen ohne Zurücklegen}\})$.

Lösung:

Ziehen mit Zurücklegen: Binomialverteilung

$P(\{\text{genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen mit Zurücklegen}\}) =$

$$\text{binomialPDF}(4, 10, 0.4) = 0.2508 \approx 0.251$$

$P(\{\text{mindestens 2 rote Kugeln entnommen beim Ziehen mit Zurücklegen}\}) =$

$$1 - \text{binomialCDF}(1, 10, 0.4) = 0.9536 \approx 0.954$$

Ziehen ohne Zurücklegen: hypergeometrische Verteilung

$P(\{\text{genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen ohne Zurücklegen}\}) =$

$$\frac{nCr(20, 4) \cdot nCr(30, 6)}{nCr(50, 10)} = 0.2801 \approx 0.280$$

Rechnung im GTR(CAS):

$$\text{binomialPDF}(4, 10, 0.4) \quad \text{ergibt} \quad 0.250822656$$

$$1 - \text{binomialCDF}(1, 10, 0.4) \quad \text{ergibt} \quad 0.9536425984$$

$$nCr(20, 4) \cdot nCr(30, 6) / nCr(50, 10) \quad \text{ergibt} \quad 0.2800586031$$

Teilaufgabe c)

geg. drei Urnen U_{50} (20 rote, 30 blaue Kugeln),

U_{100} (40 rote, 60 blaue Kugeln),

U_{1000} (400 rote, 600 blaue Kugeln).

jeweils Probenentnahmen (Stichprobenumfang $n=10$)

Zufallsgröße X ist die zufällige Anzahl der roten Kugeln in der Probe.

Diagramme D_{50} , D_{100} , D_{1000} für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgröße X .

Erzeugung der Daten für die gegebenen Diagramme D_{50} , D_{100} , D_{1000}

$$\text{seq}(k, k, 0, 21, 1) \Rightarrow \text{listk} \quad \text{ergibt} \quad \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$$

$\text{approx}(\text{seq}(\text{nCr}(10, k/2) \cdot 0.4^{(k/2)} \cdot 0.6^{(10-k/2)} \cdot (1 + \cos(k \cdot \pi))/2, k, -1, 20, 1)) \Rightarrow \text{listb}$ ergibt
 $\{0, \mathbf{6.05E-3}, 0, \mathbf{0.040}, 0, \mathbf{0.121}, 0, \mathbf{0.215}, 0, \mathbf{0.251}, 0, \mathbf{0.201}, 0, \mathbf{0.111}, 0, \mathbf{0.042}, 0, \mathbf{0.011}, 0, \mathbf{1.57E-3}, 0, \mathbf{1.05E-4}\}$

$\text{approx}(\text{seq}(\text{nCr}(20, k/2) \cdot \text{nCr}(30, 10-k/2) / \text{nCr}(50, 10) \cdot (1 + \cos(k \cdot \pi))/2, k, 0, 21, 1)) \Rightarrow \text{listh5}$ ergibt
 $\{2.92E-3, 0, \mathbf{0.028}, 0, \mathbf{0.108}, 0, \mathbf{0.226}, 0, \mathbf{0.280}, 0, \mathbf{0.215}, 0, \mathbf{0.103}, 0, \mathbf{0.031}, 0, \mathbf{5.33E-3}, 0, \mathbf{4.91E-4}, 0, \mathbf{1.80E-5}, 0\}$

$\text{approx}(\text{seq}(\text{nCr}(40, k/2) \cdot \text{nCr}(60, 10-k/2) / \text{nCr}(100, 10) \cdot (1 + \cos(k \cdot \pi))/2, k, 0, 21, 1)) \Rightarrow \text{listh10}$ ergibt
 $\{4.36E-3, 0, \mathbf{0.034}, 0, \mathbf{0.115}, 0, \mathbf{0.220}, 0, \mathbf{0.264}, 0, \mathbf{0.208}, 0, \mathbf{0.108}, 0, \mathbf{0.037}, 0, \mathbf{7.86E-3}, 0, \mathbf{9.48E-4}, 0, \mathbf{4.90E-5}, 0\}$

$\text{approx}(\text{seq}(\prod((400-i)/(i+1)), i, 0, k/2-1) \cdot \prod((600-i)/(i+1)), i, 0, 10-k/2-1) / \prod((1000-i)/(i+1)), i, 0, 9) \cdot (1 + \cos(k \cdot \pi))/2, k, 0, 21, 1) \Rightarrow \text{listh100}$ ergibt
 $\{5.87E-3, 0, \mathbf{0.040}, 0, \mathbf{0.120}, 0, \mathbf{0.216}, 0, \mathbf{0.252}, 0, \mathbf{0.201}, 0, \mathbf{0.111}, 0, \mathbf{0.042}, 0, \mathbf{0.010}, 0, \mathbf{1.50E-3}, 0, \mathbf{9.79E-5}, 0\}$

Mischung der Listen: wechselweise $H(N, 0.4 \cdot N, 10)$ und $B(10, 0.4)$

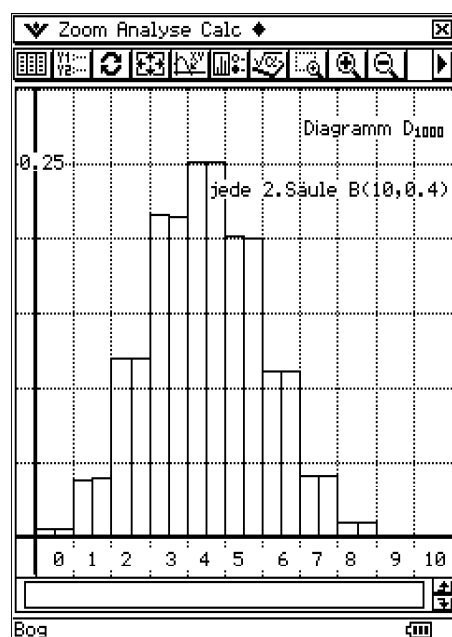
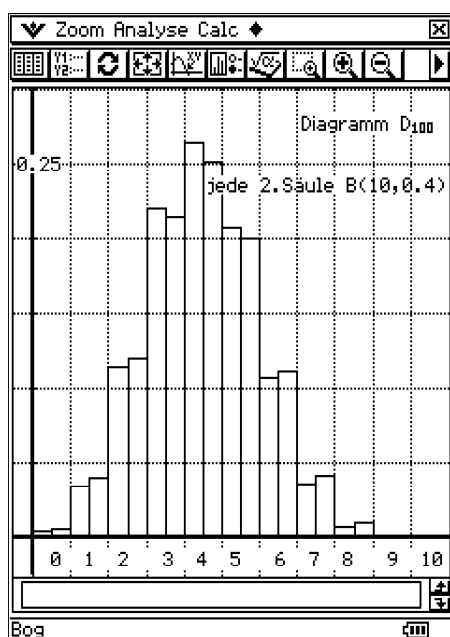
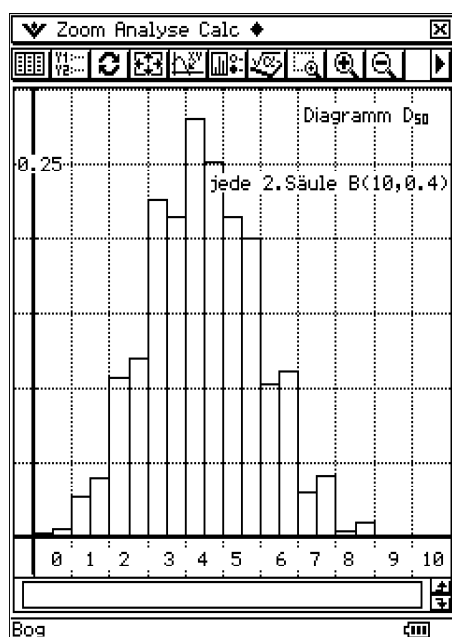
$\text{approx}(\text{listb} + \text{listh5}) \Rightarrow \text{list50}$ ergibt
 $\{2.92E-3, \mathbf{6.05E-3}, 0.028, \mathbf{0.040}, 0.108, \mathbf{0.121}, 0.226, \mathbf{0.215}, 0.280, \mathbf{0.251}, 0.215, \mathbf{0.201}, 0.103, \mathbf{0.111}, 0.031, \mathbf{0.042}, 5.33E-3, \mathbf{0.011}, 4.91E-4, \mathbf{1.571E-3}, 1.80E-5, \mathbf{1.05E-4}\}$

$\text{approx}(\text{listb} + \text{listh10}) \Rightarrow \text{list100}$ ergibt
 $\{4.36E-3, \mathbf{6.05E-3}, 0.034, \mathbf{0.040}, 0.115, \mathbf{0.121}, 0.220, \mathbf{0.215}, 0.264, \mathbf{0.251}, 0.208, \mathbf{0.201}, 0.108, \mathbf{0.111}, 0.037, \mathbf{0.042}, 7.86E-3, \mathbf{0.011}, 9.48E-4, \mathbf{1.57E-3}, 4.90E-5, \mathbf{1.05E-4}\}$

$\text{approx}(\text{listb} + \text{listh100}) \Rightarrow \text{list1000}$ ergibt
 $\{5.87E-3, \mathbf{6.05E-3}, 0.040, \mathbf{0.040}, 0.120, \mathbf{0.121}, 0.216, \mathbf{0.215}, 0.252, \mathbf{0.251}, 0.201, \mathbf{0.201}, 0.111, \mathbf{0.111}, 0.042, \mathbf{0.042}, 0.010, \mathbf{0.011}, 1.50E-3, \mathbf{1.57E-3}, 9.80E-5, \mathbf{1.05E-4}\}$

Stabdiagramme (Histogramme):

Man erkennt Säulenpaare, jeweils links $H(N, 0.4 \cdot N, 10)$ - und rechts $B(10, 0.4)$ -Säulen zur Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$. Mit wachsendem N nähern sich die $H(N, M, 10)$ -Wahrscheinlichkeiten den $B(10, 0.4)$ -Wahrscheinlichkeiten an:



ges. Begründung für die Unabhängigkeit der $B(10,0.4)$ -Einzelwahrscheinlichkeiten für $P(X=k)$ von der benutzten Urne U_{50} , U_{100} , U_{1000}

Lösung:

Ziehen mit Zurücklegen gleicht dem Bernoulli-Schema mit dem 10maligen Ziehen bei einer Erfolgswahrscheinlichkeit 0.4 (eine rote Kugel zu ziehen). Jede Urne hat die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit 0.4. Damit ist es egal, mit welcher Urne experimentiert wird.

ges. Beschreibung der Veränderung der Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ beim Ziehen aus Urnen mit zunehmender Größe N (50, 100, 1000) anhand der Diagramme

Lösung:

Mit zunehmendem N nähern sich die $H(N,M,10)$ -Einzelwahrscheinlichkeiten den $B(10,0.4)$ -Einzelwahrscheinlichkeiten an.

Faustregel:

Für $n/N = 10/N \leq 0.05$ gilt mit $p=M/N$ eine näherungsweise Übereinstimmung von $H(N,M,n)$ - und $B(n,p)$ -Einzelwahrscheinlichkeiten.

D.h., für kleine n und große N ist es rein rechnerisch ohne Bedeutung, ob die wenigen n entnommenen Kugeln nach jeder Einzelentnahme wieder zurückgelegt wurden oder nicht. Die stochastischen Verhältnisse in einer sehr großen Urne ändern sich dabei nur noch unwesentlich.

ges. Erläuterung der Aussage (ohne Berechnungen):

" $P(X=4)$ ist beim Ziehen ohne Zurücklegen monoton fallend, wenn N anwächst ($n=10$ bleibt dabei unverändert)"

Lösung:

Anhand der Diagramme erkennt man das monotone Abfallen der Einzelwahrscheinlichkeit $P(X=4)$ beim Ziehen ohne Zurücklegen und gleichzeitig das Anwachsen für extreme X .

Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ stellt sich die Einzelwahrscheinlichkeit der Binomialverteilung ein, die unabhängig von der Urnengröße gilt:

$$nCr(10,4) \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 0.2508.$$

Theoretisch gilt:

$P(X=4) = \frac{nCr(M,4) \cdot nCr(N-M,6)}{nCr(N,10)}$ (Einzelwahrscheinlichkeit der hypergeometrischen Verteilung) mit $M = 0.4 \cdot N$.

Hieraus: $P(X=4) = \frac{nCr(0.4 \cdot N,4) \cdot nCr(N-0.4 \cdot N,6)}{nCr(N,10)}$

$$\frac{\text{simplify}(\text{simplify}(nCr(0.4 \cdot N,4)) \cdot \text{simplify}(nCr(0.6 \cdot N,6)))}{\text{simplify}(nCr(N,10))} \text{ ergibt } \frac{N \cdot (N-5) \cdot (4536 \cdot N - 37800) \cdot (3 \cdot N - 5) \cdot (3 \cdot N - 10) \cdot (3 \cdot N - 20) \cdot (2 \cdot N - 5) \cdot (2 \cdot N - 15)}{(1953125 \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot (N-4) \cdot (N-6) \cdot (N-7) \cdot (N-8) \cdot (N-9))}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N \cdot (N-5) \cdot (4536 \cdot N - 37800) \cdot (3 \cdot N - 5) \cdot (3 \cdot N - 10) \cdot (3 \cdot N - 20) \cdot (2 \cdot N - 5) \cdot (2 \cdot N - 15)}{(1953125 \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot (N-4) \cdot (N-6) \cdot (N-7) \cdot (N-8) \cdot (N-9))} = 0.2508$$

ergibt 0.2508

$$\frac{\text{expand}(N \cdot (N-5) \cdot (4536 \cdot N - 37800) \cdot (3 \cdot N - 5) \cdot (3 \cdot N - 10) \cdot (3 \cdot N - 20) \cdot (2 \cdot N - 5) \cdot (2 \cdot N - 15))}{(1953125 \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \cdot (N-4) \cdot (N-6) \cdot (N-7) \cdot (N-8) \cdot (N-9))}$$

$$\text{ergibt } 0.063/(N-1) + 0.032/(N-2) + 0.041/(N-3) + 0.132/(N-4) + 0.197/(N-6) + 0.095/(N-7) + 0.129/(N-8) + 0.565/(N-9) + 0.2508$$

Anhand der Partialbruchzerlegung (nur positive echt gebrochen rationale Anteile) erkennt man die strenge Monotonie bei wachsendem N .

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik

=====

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 2 (Block 2A, Analytische Geometrie):

geg. vier Punkte A(-1|-3|-2), B(7|9|-8), C(17|23|13), D(5|5|22) in der Ebene E,

Ebenengleichung der Ebene E: $[[84],[-57],[-2]] \cdot [[x],[y],[z]] = 91$

Kontrolle:

$-[[1,3,2]] \Rightarrow A \quad [[7,9,-8]] \Rightarrow B \quad [[17,23,13]] \Rightarrow C \quad [[5,5,22]] \Rightarrow D$

$\text{dotP}(\text{crossP}(B-A,C-A),D-A)$ ergibt 0

Damit liegen A, B, C und D in einer Ebene.

$\text{crossP}(B-A,C-A)/4$ ergibt $[[84,-57,-2]]$

$\text{dotP}(\text{ans},A)$ ergibt 91

Damit gilt die obige Ebenengleichung.

Teilaufgabe a)

ges. Nachweis, dass ABCD ein Trapez ist. Untersuchung auf Symmetrie

Lösung:

B-A ergibt $[[8,12,-6]]$

D-C ergibt $[[12,-18,9]]$

$-1.5 \cdot (B-A)$ ergibt $[[12,-18,9]]$

d.h. $-1.5 \cdot (B-A) = D-C$, damit liegen zwei parallele Seiten vor.

Untersuchung der Winkel:

$\cos^{-1}(\text{dotP}(B-A,D-A)/(\text{norm}(B-A) \cdot \text{norm}(D-A)))$ ergibt 90°

$\cos^{-1}(\text{dotP}(C-B,A-B)/(\text{norm}(C-B) \cdot \text{norm}(A-B)))$ ergibt 106.719964°

$\cos^{-1}(\text{dotP}(D-C,B-C)/(\text{norm}(D-C) \cdot \text{norm}(B-C)))$ ergibt 73.28003596°

$\cos^{-1}(\text{dotP}(C-D,A-D)/(\text{norm}(C-D) \cdot \text{norm}(A-D)))$ ergibt 90°

Damit ist das Trapez unsymmetrisch. Die Winkel in den Eckpunkten A und sind jeweils 90° .

Die Winkel in den Eckpunkten betragen $106,72^\circ$ bzw. $73,28^\circ$.

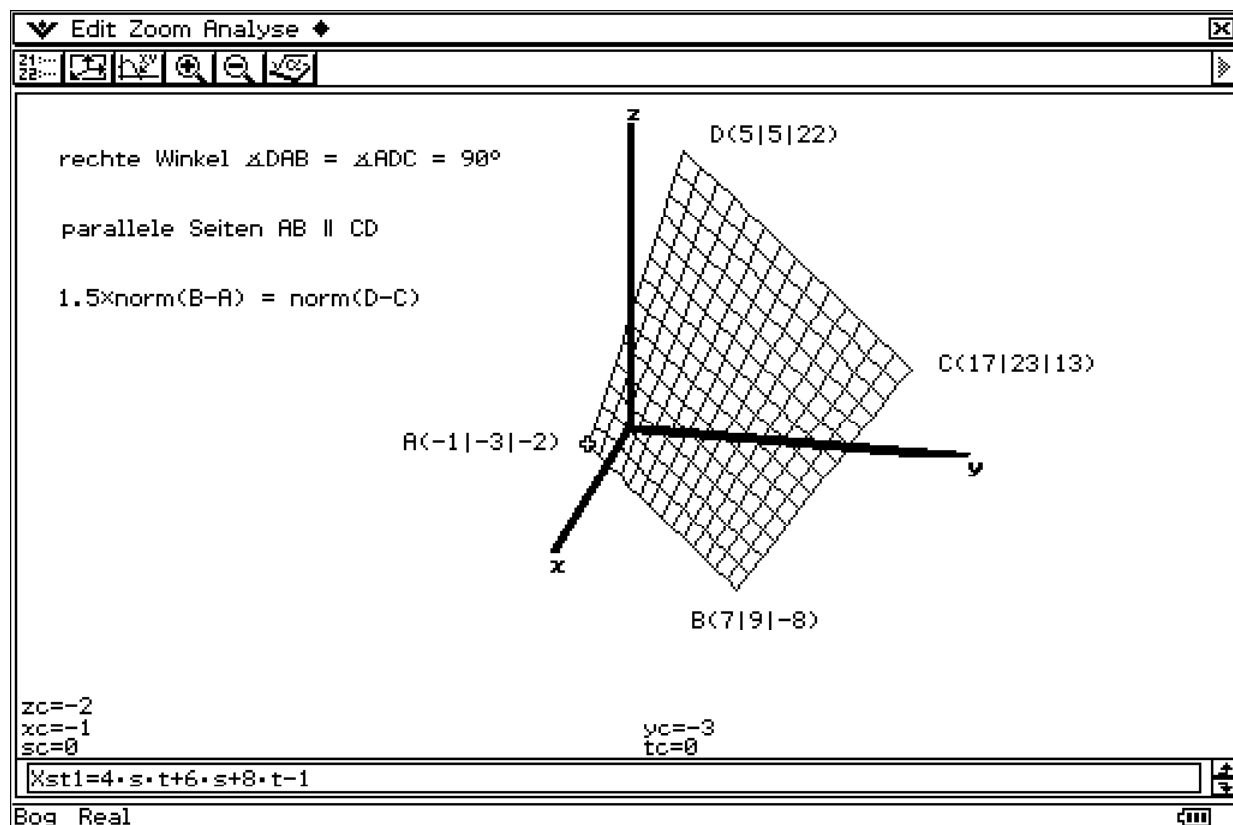
3D-Grafik des Trapezes:

Parameterdarstellung:

$$X(s,t) = A + s \cdot (D-A) + t \cdot (1+s/2) \cdot (B-A) \text{ mit } 0 \leq s \leq 1 \text{ und } 0 \leq t \leq 1.$$

simplify(A + s*(D-A) + t*(1+s/2)*(B-A)) ergibt

$$[[4 \cdot s \cdot t + 6 \cdot s + 8 \cdot t - 1, 6 \cdot s \cdot t + 8 \cdot s + 12 \cdot t - 3, -3 \cdot s \cdot t + 24 \cdot s - 6 \cdot t - 2]]$$

**Teilaufgabe b)**geg. Geradenschar g_k mit $[[x],[y],[z]] = [[2],[1],[9]] + t \cdot [[19],[28],[k]]$, $k \in \mathbb{R}$.ges. Lagebeziehungen von g_k zur Ebene E in Abhängigkeit von k , Schnittpunkte**Lösung:**

Schnittpunkt:

$$[[84],[-57],[-2]] \cdot [[x],[y],[z]] = 91 \text{ ergibt } [[84],[-57],[-2]] \cdot ([[2],[1],[9]] + t \cdot [[19],[28],[k]]) = 91, \text{ d.h.}$$

$$\text{dotP}([84,-57,-2], [2,1,9] + t \cdot [19,28,k]) = 91 \text{ ergibt}$$

$$-2 \cdot (k \cdot t + 9) - 57 \cdot (28 \cdot t + 1) + 84 \cdot (19 \cdot t + 2) = 91$$

$$\text{simplify(ans)} \text{ ergibt } -2 \cdot k \cdot t + 93 = 91$$

d.h. für $k \cdot t = 1$ bzw. $t = 1/k$ ($k \neq 0$) gibt es einen Schnittpunkt.

$$[[2],[1],[9]] + t \cdot [[19],[28],[k]] \text{ mit } t = 1/k \text{ ergibt: } [[19/k+2],[28/k+1],[10]]$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(2+19/k | 1+28/k | 10)$.

Für $k=0$ gibt es keinen Schnittpunkt, d.h. g_0 liegt parallel zu E (aber nicht in E). Würde g_0 in E verlaufen, müsste es unendlich viele Schnittpunkte geben, was aber nicht der Fall ist.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

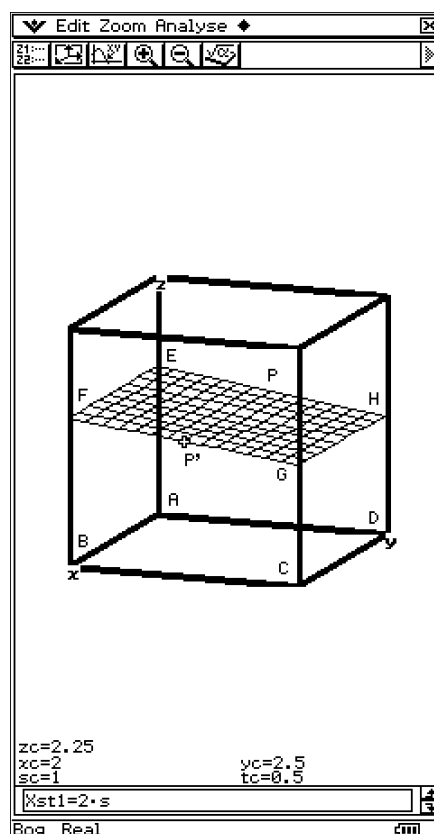
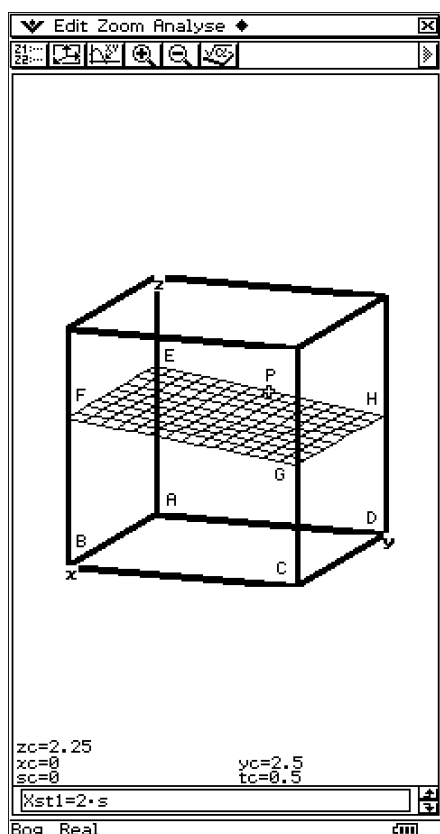
Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 1 (Block 2B, Analytische Geometrie):

geg. Planskizze (Carport, Lage im 1. Oktanten),
 vgl. Skizze (Breite 2m, Tiefe 5m, Höhe 2,5m vorn, 2m hinten)
 Grundfläche A, B, C und D mit $C(2|5|0)$ und A im Koordinatenursprung
 Dachfläche E, F, G und H mit $E(0|0|2,5)$

3D-Grafik (Planskizze):



Die Stützbalken AP, DP und BP', CP' sind in den Bildern nicht eingezeichnet.

Teilaufgabe a)

ges. fehlende Koordinaten der Eckpunkte (aus Skizze erkennbar, E und C vorgegeben)

Lösung:

Grundfläche A, B, C und D mit A(0|0|0), B(2|0|0), C(2|5|0), D(0|5|0)

Dachfläche E, F, G und H mit $E(0|0|2,5)$, $F(2|0|2,5)$, $G(2|5|2)$, $H(0|5|2)$

3D-Skizze:

$$\begin{array}{llll} [[0,0,0]] \Rightarrow A & [[2,0,0]] \Rightarrow B & [[2,5,0]] \Rightarrow C & [[0,5,0]] \Rightarrow D \\ [[0,0,2,5]] \Rightarrow E & [[2,0,2,5]] \Rightarrow F & [[2,5,2]] \Rightarrow G & [[0,5,2]] \Rightarrow H \end{array}$$

Dachebene in Parameterdarstellung (für 3D-Grafik, Planskizze):

$$X(s,t) = E + s \cdot (F-E) + t \cdot (H-E), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ d.h.}$$

$$E + s \cdot (F-E) + t \cdot (H-E) \text{ ergibt } [[2 \cdot s, 5 \cdot t, -0.5 \cdot t + 2.5]]$$

ges. Koordinaten von P und P' in der Mitte der Strecken EH bzw. FG

Lösung:

$$(E+H)/2 \Rightarrow P \quad \text{ergibt } [[0,2.5,2.25]]$$

$$(F+G)/2 \Rightarrow P_{\text{strich}} \quad \text{ergibt } [[2,2.5,2.25]]$$

vgl. 3D-Grafik,

Antwort: $P(0|2,5|2,25)$ und $P'(2|2,5|2,25)$

ges. Balkenlängen zu EH, AP und PD

Lösung:

$$\text{norm}(H-E) \text{ ergibt } 5.024937811$$

$$\text{norm}(P-A) \text{ ergibt } 3.363406012$$

$$\text{norm}(P-D) \text{ ergibt } 3.363406012$$

Antwort: Die Längen sind $||EH|| \approx 5,02\text{m}$, $||AP|| = ||PD|| \approx 3,36\text{m}$

ges. Ebenengleichung (Dachebene) in Koordinatenform

Lösung:

$$\text{cross}(F-E, H-E) \Rightarrow N \text{ ergibt } [[0,1,10]]$$

$$\text{dot}(P(N, [[x,y,z]]) = \text{dot}(P(N, E) \text{ ergibt } y + 10 \cdot z = 25$$

Die Ebenengleichung lautet: **$0x + 1y + 10z = 25$** (d.h. x ohne Einfluss auf die Gleichung)

Teilaufgabe b)

geg. Lichtquelle in $L(1|0|3)$ (oberhalb der Dachebene)

ges. Eckpunkte des Dachschattens in x-y-Ebene

Lösung:

Geradengleichungen für LE, LF, LG, LH bestimmen und $z=0$ setzen

$$[[1,0,3]] \Rightarrow L$$

Schattenpunkt E':

$L+t^*(E-L)$ ergibt $[-t+1, 0, -0.5*t+3]$

`solve(ans[1,3]=0,t)` ergibt $\{t=6\}$

$L+t^*(E-L)|_{t=6}$ ergibt $[-5,0,0]$

Schattenpunkt F':

$L+t^*(F-L)$ ergibt $[[t+1,0,-0.5*t+3]]$

`solve(ans[1,3]=0,t)` ergibt $\{t=6\}$

$L+t^*(F-L)|_{t=6}$ ergibt $[[7,0,0]]$

Schattenpunkt G':

$L+t^*(G-L)$ ergibt $[[t+1,5*t,-t+3]]$

```
solve(ans[1,3]=0,t) ergibt {t=3}
```

$L+t^*(G-L)|_{t=3}$ ergibt $[[4,15,0]]$

Schattenpunkt H':

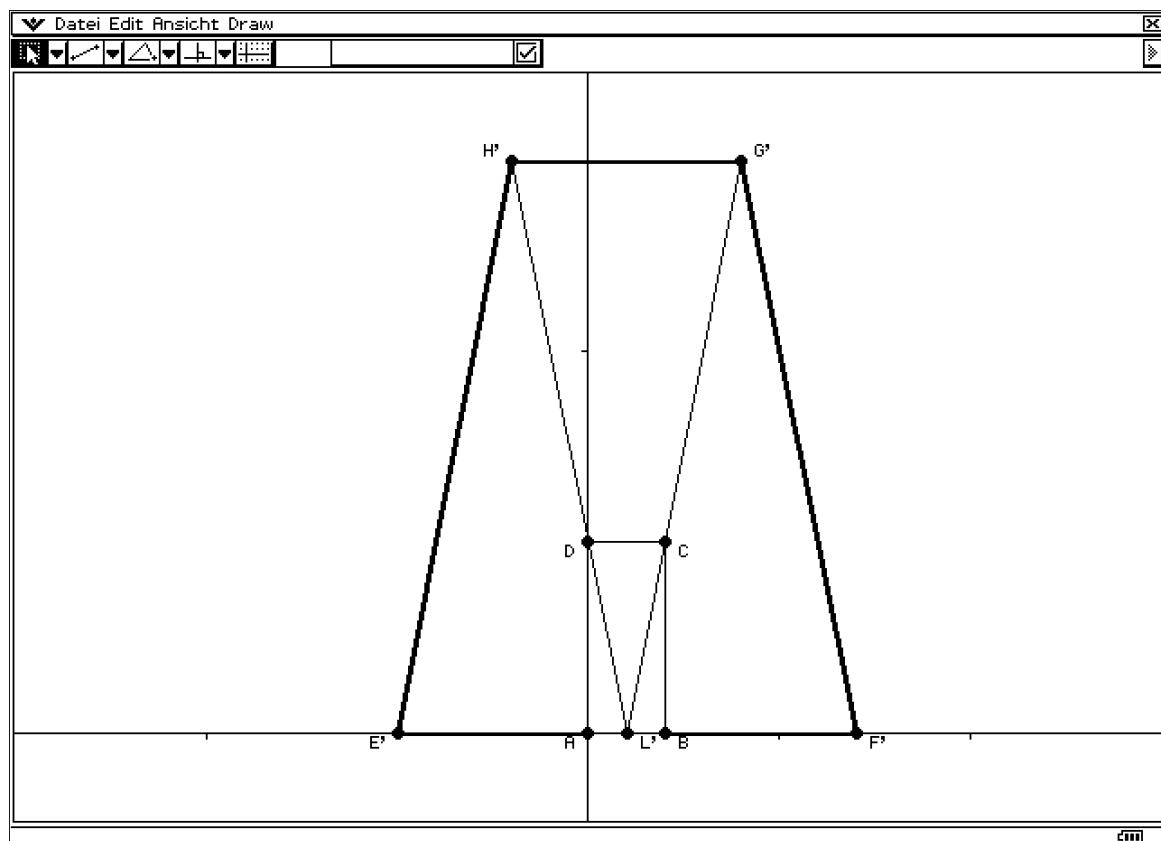
$L+t^*(H-L)$ ergibt $[-t+1,5*t,-t+3]$

`solve(ans[1,3]=0,t)` ergibt $\{t=3\}$

$L+t^*(H-L)|_{t=3}$ ergibt $[-2,15,0]$

Antwort: Die Schattenpunkte sind $E'(-5|0|0)$, $F'(7|0|0)$, $G'(4|15|0)$ und $H'(-2|15|0)$

Skizze der Schattenfläche im Geometriemenü:



ges. Geometrische Form der Schattenfläche

Lösung:

Es handelt sich um ein Trapez, da die Seiten E'F' (auf der x-Achse liegend) und G'H' zueinander parallel sind.

vgl. auch Skizze im Geometriemenü.

Teilaufgabe c)

geg. Q auf EH derart, dass Gesamtlänge der Balken AQ und QD minimal wird.

ges. minimale Gesamtlänge

Lösung:

Ansatz für Q: $Q(0|y|z)$

$[[0,y,z]] \Rightarrow Q$

Define $f(y,z) = \text{norm}(A-Q) + \text{norm}(Q-D)$

done

$f(y,z)$ ergibt $(y^2 + z^2 - 10y + 25)^{1/2} + (y^2 + z^2)^{1/2}$

Nebenbedingung:

Q auf EH, d.h. $Q = E + t(H-E)$ mit $0 \leq t \leq 1$

Hieraus folgt:

$E + t(H-E)$ ergibt $[[0, 5t, -0.5t + 2.5]]$

Einsetzen in Zielfunktion $f(y,z)$ ergibt:

$f(y,z)|\{y=5t, z=-0.5t+2.5\}$ ergibt $(101t^2 - 10t + 25)^{1/2}/2 + (101t^2 - 210t + 125)^{1/2}/2$

Define $g(t) = \sqrt{(101t^2 - 10t + 25)/2} + \sqrt{(101t^2 - 210t + 125)/2}$

done

$fMin(g(t), t, 0, 1)$ ergibt $\{\text{MinValue} = 5 \cdot (18281)^{1/2}/101, t = 545/909\}$

$approx(ans)$ ergibt $\{\text{MinValue} = 6.693428135, t = 0.599559956\}$

$E + t(H-E)|t=545/909$ ergibt $[[0, 2.99779978, 2.200220022]]$

Ergebnis:

Wird Q in $Q(0|3|2,2)$ gelegt, entsteht eine minimale Gesamtlänge $5 \cdot \sqrt{(18281)/101} \approx 6,69$ m.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik

=====

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 2 (Block 2B, Stochastik):

Teilaufgabe a)

geg. Simulationsprogramm zum Münzwurf (Glücksspiel per Computer)

Spielregeln:

Spieleinsatz (ein Spiel) 2€

Spielende, wenn "Zahl" oben liegt

Spiel fortsetzung, wenn "Wappen" oben liegt

Spielabbruch, wenn 4mal "Wappen" oben liegt.

Auszahlung (Gewinn):

"Zahl" im 1. Wurf: 1€ (Trostpreis)

"Zahl" im 2. Wurf: 2€ (Einsatz zurück)

"Zahl" im 3. Wurf: 3€ (Gewinn)

"Zahl" im 4. Wurf: 4€ (Hauptgewinn)

4mal "Wappen": 0€ (Einsatz verspielt)

ges. Wahrscheinlichkeitsverteilung für die zufällige Auszahlung $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Lösung:

$$P(X=1)=1/2$$

$$P(X=2) = (1/2)^2 = 1/4$$

$$P(X=3) = (1/2)^3 = 1/8$$

$$P(X=4) = (1/2)^4 = 1/16$$

$$P(X=0) = 1 - (1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + (1/2)^4) = 1 - \sum_{k=1,4} (1/2)^k = 1/16$$

Rechnung im GTR(CAS):

`seq(0.5^k,k,1,4,1) ⇒ listp` ergibt $\{1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$

`1-sum(listp)` ergibt $1/16$

Antwort: $P(X=k) = (1/2)^k$ für $k=1,2,3,4$ und $P(X=0) = 1/16$.

ges. Beurteilung der Fairness des Spiels

Lösung:

erwarteter Gewinn $G = 0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.125 \cdot 3 + 0.0625 \cdot 4 - 2 = -0.375$

$0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.125 \cdot 3 + 0.0625 \cdot 4 - 2$ ergibt -0.375

Ergebnis:

Es handelt sich um ein unfaires Spiel, da im Mittel ein Verlust für den Spieler entsteht.

Teilaufgabe b)

geg. Simulationsprogramm auch mit $p = P(\{\text{"Wappen" liegt oben}\}) = 0.4$ möglich,
(neue Ausgangssituation)
neben der vorher betrachteten Simulation (Alternative) $p = 0.5$,
Bernoulli-Schema mit $n=100$ Münzwürfen und Feststellung des Auftretens von "Wappen"
(zufällige Anzahl S_n)

ges. Entscheidung anhand von S_n darüber,
ob Simulation mit $p=0,4$ (gezinkte Münze) oder mit $p=0,5$ (ideale Münze, Alternative) erfolgte.

Lösung:

S_n ist binomialverteilt mit den Parametern p und $n=100$.

Es sei b die Entscheidungsgrenze derart,

dass bei S_n zu klein, d.h. $S_n < b$, auf $p=0.4$ (manipulierte Münze)

und bei $S_n \geq b$, d.h. S_n nicht zu klein, auf $p=0.5$ (nicht manipulierte Münze) getippt wird.

Ansatz:

b sei nicht ganzzahlig, dann gilt

$P(S_n < b) = \text{binomialCDF}(b, 100, 0.4)$

$P(S_n \geq b) = 1 - \text{binomialCDF}(b, 100, 0.5)$

b sollte derart gewählt sein, dass $P(S_n < b) = P(S_n \geq b)$ gilt.

Beispiele der Suche nach b (GTR oder Tabelle nutzen)

$40 \Rightarrow b$

$\{\text{binomialCDF}(b, 100, 0.4), 1 - \text{binomialCDF}(b, 100, 0.5),$
 $|\text{binomialCDF}(b, 100, 0.4) - \text{binomialCDF}(b, 100, 0.5)|\}$
ergibt $\{0.5433, 0.9716, 0.4283\}$

$41 \Rightarrow b$

$\{\text{binomialCDF}(b, 100, 0.4), 1 - \text{binomialCDF}(b, 100, 0.5),$
 $|\text{binomialCDF}(b, 100, 0.4) - \text{binomialCDF}(b, 100, 0.5)|\}$
ergibt $\{0.6225, 0.9557, 0.3332\}$

$42 \Rightarrow b$

$\{\text{binomialCDF}(b, 100, 0.4), 1 - \text{binomialCDF}(b, 100, 0.5),$
 $|\text{binomialCDF}(b, 100, 0.4) - \text{binomialCDF}(b, 100, 0.5)|\}$
ergibt $\{0.6967, 0.9334, 0.2367\}$

43 \Rightarrow b

{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.7635, 0.9033, 0.1399}

44 \Rightarrow b

{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.8211, 0.8644, **0.0433**}

45 \Rightarrow b

{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.8689, 0.8159, 0.0530}

Damit erscheint folgende Entscheidungsregel sinnvoll:

Falls höchstens 44mal "Wappen" erscheint, ist die Simulation vermutlich manipuliert, falls mindestens 45mal "Wappen" erscheint, ist die Simulation vermutlich nicht manipuliert.

b = 44.5 bedeutet, dass sich hier die Wahrscheinlichkeiten $P(S_n < 44.5)$ und $P(S_n \geq 44.5)$ am stärksten gleichen:

$P(S_n < 44.5) = 0.8211$ und $P(S_n \geq 44.5) = 0.8644$ (Unterschied lediglich 0.0433).

geg. Präzisierung der Entscheidungsregel:

Es wird zunächst von der gegebenen manipulierten Simulation (Nullhypothese) ausgegangen, d.h. $H_0: p = p_0 = 0,4$.

Der Fehler 1.Art (Ablehnung von H_0 wegen " S_n zu groß", obwohl eine manipulierte Simulation erfolgte) soll höchstens 5% betragen (Signifikanzniveau $\alpha=0.05$), d.h. einseitige Alternative $H_a: p > p_0$

ges. Ablehnungsbereich K^* auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$

und Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (Nichtablehnung von H_0 , obwohl eine nichtmanipulierte Simulation vorlag.)

Lösung:

unter H_0 gilt:

$P(S_n \in K^*) = P(S_n > b) = \alpha = 0.05$, d.h. $b = \text{invBinomialCDf}(0.95, 100, 0.4) = 48$

Kontrolle: GTR bzw. Tabelle nutzen

$\text{invBinomialCDf}(0.95, 100, 0.4)$ ergibt 48

$1 - \text{binomialCDf}(48, 100, 0.4)$ ergibt 0.04230142019

$1 - \text{binomialCDf}(47, 100, 0.4)$ ergibt 0.0637891769

Ergebnis: Der Ablehnungsbereich ist $K^* = \{49, 50, \dots, 100\}$

Ist S_n größer als 48 muss H_0 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ (exakter **4,23%**, Irrtumswahrscheinlichkeit) abgelehnt werden.

Wird H_0 nicht abgelehnt, kann ein Fehler 2. Art entstehen mit der Wahrscheinlichkeit:
 $P(S_n \geq 49) = 1 - \text{binomialCDF}(48, 100, 0.5) = 0.3822 \approx \mathbf{38,2\%}$.

Rechnung im GTR(CAS): bzw. Tabelle nutzen

$\text{binomialCDF}(48, 100, 0.5)$ ergibt 0.3821767172

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art **0.3822** und ist damit merklich größer als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

Weiter oben wurde bereits darüber diskutiert, dass $b = 44,5$ beide Fehler optimiert.
In diesem Fall wäre $\alpha = 1 - \text{binomialCDF}(44, 100, 0.4) = 0.1789 \approx 17,9\%$

Rechnung im GTR(CAS): bzw. Tabelle nutzen

$1 - \text{binomialCDF}(44, 100, 0.4)$ ergibt 0.1789016327