Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

1. Wählen Sie **eine der Analysis-Aufgaben 1A oder 1B** aus.

2. Wählen Sie **einen der Aufgabenblöcke 2A oder 2B** aus.
   Beide Blöcke bestehen aus je einer Aufgabe zur Analytischen Geometrie und einer zur Stochastik.
   a. Block 2A hat den *Schwerpunkt Stochastik*
   b. Block 2B hat den *Schwerpunkt Geometrie*

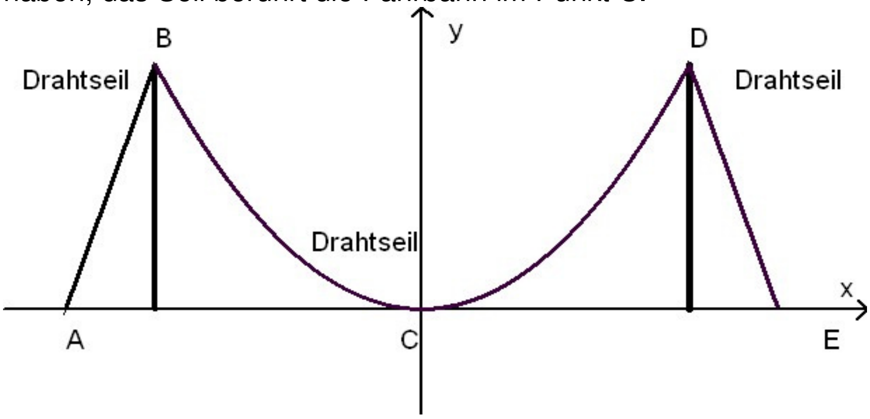
Sie müssen insgesamt eine Analysis-Aufgabe und einen Aufgabenblock bearbeiten. Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Hilfsmittel

1. Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
2. Zeichenmittel
3. Duden und Fremdwörterlexikon
4. Eingeführter Rechnertyp wie im Kopf der Aufgabe beschrieben (mit Handbuch)

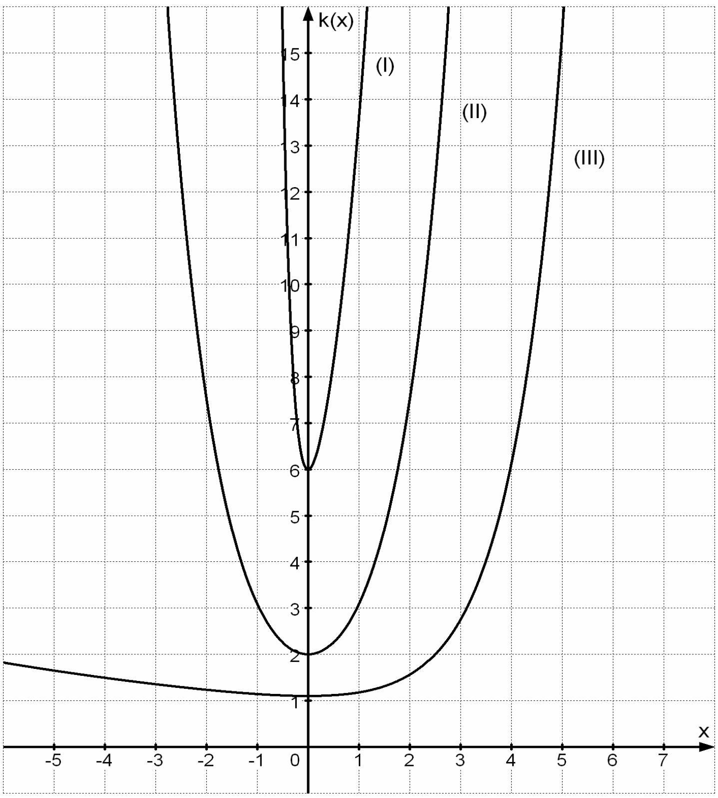
Aufgabe 1A

Unten ist eine Skizze einer Brücke in Seitenansicht dargestellt: Die Seilbefestigungen in den Punkten B und D liegen jeweils 152 m höher als die Fahrbahn; sie haben einen Abstand von 1280 m voneinander. Die Verankerungsseile der beiden Masten durch B und D sind in den Fußpunkten A und E befestigt, die einen Abstand von 337 m von den Fußpunkten der Masten haben, das Seil berührt die Fahrbahn im Punkt C.



a) Modellieren Sie mithilfe von ganzrationalen Funktionen <u>möglichst niedrigen</u> Grades den Verlauf der Spanndrahtseile durch Funktionen f_1, f_2, f_3
(1) von A nach B , (2) von B über C nach D , (3) von D nach E .
Skizzieren Sie die Graphen der Modellierungsfunktionen [x-Achse: 1cm $\hat{=}$ 100m, y-Achse: 1cm $\hat{=}$ 25m, DIN-A4 quer].

b) Gegeben ist die Funktionenschar k_u mit $k_u(x) = u \cdot e^x + e^{-u \cdot x}$, $u > 0$.



Nebenstehend sind drei Graphen der Schar gezeichnet.

Bestimmen Sie Parameterwerte für u zu (I), (II), (III).

Entnehmen Sie der Zeichnung Vermutungen über das Verhalten der Graphen von k_u für große Werte von |x|, Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte. Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters u auf die Graphen.

Weisen Sie ihre Vermutungen bzgl. der Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und des Verhaltens für große Werte von |x| nach.

Hinweis:
Siehe auch (*) Bemerkung zu c).

Fortsetzung Aufgabe 1A

c) Modellieren Sie den Seilverlauf von B über C nach D mit Hilfe einer Funktion aus der Funktionenschar $g_{a,b}$ mit

$$g_{a,b}(x) = a + e^{b\cdot x} + e^{-b\cdot x} \quad ; a < 0, b > 0 . \qquad (*)$$

Erläutern Sie den Einfluss der beiden Parameter a und b für die Modellierung des Seilverlaufs. Bestimmen Sie den Wert von a. Geben Sie einen Ansatz und ein mögliches Lösungsverfahren zur Bestimmung von b an. Bestimmen Sie einen Näherungswert für b. Skizzieren Sie den Graphen der neuen Modellierungsfunktion in das Koordinatensystem aus a) und beschreiben Sie qualitativ den augenscheinlichen Unterschied der beiden Modellierungen. (Falls die Bestimmung von b nicht gelingt, skizzieren Sie ersatzweise den Graphen der Funktion g aus Aufgabenteil d) und nennen Sie zwei augenscheinliche Unterschiede.)

d) Gehen Sie von der von Ihnen bestimmten Modellierungsfunktion g im Bereich zwischen B und D aus Aufgabenteil c) aus. (Wenn Sie Aufgabenteil c nicht gelöst haben, können Sie ersatzweise die Funktion g mit $g(x) = e^{0{,}00785\cdot x} + e^{-0{,}00785\cdot x}$ für $x_B \le x \le x_D$ benutzen.)
In dem Bereich zwischen C und D soll auf der einen Brückenseite eine rechteckige Werbefläche vermietet werden. Die Fläche soll parallel zu AE (i) am Pfeiler, der in D endet, (ii) an einem 1 m hohen Brückengeländer und (iii) am Drahtseil verankert werden. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Fläche mit maximalem Inhalt. Bestimmen Sie die Höhe der zu erwartenden Einnahme der Betreibergesellschaft pro Jahr für diese Werbefläche, wenn pro m² Fläche 300 € pro Jahr veranschlagt werden. Bestimmen Sie, wie groß der durch die bestimmte Werbefläche nicht verdeckte Flächenteil zwischen den beiden Pfeilern unterhalb des Seiles ist.

(*) Bemerkung zu c): Einige CAS-Rechner bezeichnen den Term $\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$ als cosh(x) und den Term $\frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$ als sinh(x).

Aufgabe 1B

Bestimmte Wachstumsvorgänge werden beschrieben durch Funktionen f_k mit

$f_k(t) = \dfrac{100}{79 \cdot e^{-k \cdot t} + 1}$, $k > 0$, wobei $f_k(t)$ den „Bestand“ zu einem Zeitpunkt t ($t \geq 0$) angibt.

a)

- Bestimmen Sie einen Wert für k so, dass $f_k(15) \approx 35$ ist.
- Skizzieren Sie den Graphen zu $f_{0,25}$.
- Bestimmen Sie für $k = 0,25$ den Zeitpunkt t, ab dem der „Bestand“ 99% des maximalen „Bestandes“ überschreitet.
- Bestimmen Sie die erste Ableitungsfunktion von f_k. Dokumentieren Sie einen Rechenweg, der ohne den Einsatz von CAS durchgeführt werden kann.
- Untersuchen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit dieser Vorgänge: Bestimmen Sie die Bereiche, in denen sie zu- bzw. abnimmt, sowie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit.

b) Bestimmen Sie eine Funktion g so, dass die Differentialgleichung $g'(t) = a \cdot g(t)$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt und für $t = 0$ und $t = 15$ die Funktionswerte $g(t)$ und $f_{0,25}(t)$ übereinstimmen.
Bestimmen Sie ohne Rechnernutzung Lösungen der Differentialgleichung $h'(t) = b \cdot (100 - h(t))$ für $b \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie dann die Funktion h, deren Funktionswerte für $t = 20$ und $t = 35$ mit denen von $f_{0,25}$ übereinstimmen.
Für die Funktion $f_{0,25}$ gilt: $f'_{0,25}(t) = \dfrac{1}{100} \cdot 0,25 \cdot f_{0,25}(t) \cdot (100 - f_{0,25}(t))$.
Deuten Sie aufgrund dieser Aussage den Verlauf des Graphen von $f_{0,25}$.

c) Bei einem Wachstumsprozess wird der „Bestand“ gemessen. Man erhält folgende Daten:

Zeit in Stunden	10	15	20	25	30
Bestand in Mengeneinheiten (ME)	12	35	66	89	96

Zur Beschreibung des Bestandes wird die Funktion z vorgeschlagen mit

$$z(t) = \begin{cases} 1,25 \cdot e^{0,222 \cdot t} & \text{für } 0 \leq t \leq 15 \\ 6,05 \cdot t - 55,75 & \text{für } 15 < t < 20. \\ 100 - 3006 \cdot e^{-0,223 \cdot t} & \text{für } t \geq 20 \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen von z.
Beschreiben Sie die einzelnen Teile des Graphen unter dem Aspekt Wachstum.
Geben Sie begründet ein mögliches Kriterium an, um zu entscheiden, welche der beiden Funktionen z oder $f_{0,25}$ die Daten besser beschreibt. Entscheiden Sie sich anhand dieses Kriteriums für eine der beiden Funktionen.

d) Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt der Fläche zwischen der t - Achse und dem Graphen zu z bzw. zu $f_{0,25}$ für $0 \leq t \leq 35$.
Nehmen Sie begründet Stellung zu der Aussage:
„Wenn für zwei Funktionen die Flächeninhalte der Flächen zwischen der t - Achse und dem jeweiligen Graphen in einem Intervall näherungsweise gleich sind, dann ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen den beiden Graphen in diesem Intervall näherungsweise null.“

Block 2A – Aufgabe 1

Zwei Würfel werden geworfen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei Sechsen zu erhalten.
Das Ereignis E bestehe darin, beim 700-maligen Werfen mit zwei Würfeln mindestens 15 und höchstens 20-mal zwei Sechsen zu erhalten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E mit der Binomialverteilung.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E näherungsweise mit der Normalverteilung und mit der Poisson-Verteilung. Prüfen Sie, ob die Voraussetzungen für die Benutzung dieser Näherungen erfüllt sind, und beurteilen Sie die Qualität der Näherungsergebnisse, indem Sie die Abweichungen vom Wert aus a) bestimmen.

c) Als andere Näherung soll an Stelle der Normalverteilung eine Funktion der Funktionenschar f_k mit $f_k(x)=\frac{k}{x^2+1}$ (k>0) als Dichtefunktion genutzt werden. Nennen Sie die Bedingungen einer Dichtefunktion und bestimmen Sie diejenige Funktion der Schar, die sich als Dichtefunktion eignet (Zur Kontrolle: $k=\frac{1}{\pi}$). Berechnen Sie auch mit dieser Funktion näherungsweise die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E und beurteilen Sie die Qualität der Näherung.

Material

1. Binomialverteilung mit n=700 und $p=\frac{1}{36}$

k	$P(X=k)$	$P(X\le k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0001	0,0001
6	0,0002	0,0003
7	0,0007	0,0010
8	0,0017	0,0027
9	0,0037	0,0063
10	0,0072	0,0135
11	0,0129	0,0265
12	0,0212	0,0477
13	0,0321	0,0798
14	0,0450	0,1248
15	0,0588	0,1835
16	0,0719	0,2554
17	0,0827	0,3381
18	0,0896	0,4277
19	0,0919	0,5196
20	0,0894	0,6090
21	0,0827	0,6917

Block 2A – Fortsetzung Aufgabe 1

2. Tabelle der Normalverteilung

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0	0,50000	0,5	0,69146	1	0,84134	1,5	0,93319	2	0,97725	2,5	0,99379
0,01	0,50399	0,51	0,69497	1,01	0,84375	1,51	0,93448	2,01	0,97778	2,51	0,99396
0,02	0,50798	0,52	0,69847	1,02	0,84614	1,52	0,93574	2,02	0,97831	2,52	0,99413
0,03	0,51197	0,53	0,70194	1,03	0,84849	1,53	0,93699	2,03	0,97882	2,53	0,99430
0,04	0,51595	0,54	0,70540	1,04	0,85083	1,54	0,93822	2,04	0,97932	2,54	0,99446
0,05	0,51994	0,55	0,70884	1,05	0,85314	1,55	0,93943	2,05	0,97982	2,55	0,99461
0,06	0,52392	0,56	0,71226	1,06	0,85543	1,56	0,94062	2,06	0,98030	2,56	0,99477
0,07	0,52790	0,57	0,71566	1,07	0,85769	1,57	0,94179	2,07	0,98077	2,57	0,99492
0,08	0,53188	0,58	0,71904	1,08	0,85993	1,58	0,94295	2,08	0,98124	2,58	0,99506
0,09	0,53586	0,59	0,72240	1,09	0,86214	1,59	0,94408	2,09	0,98169	2,59	0,99520
0,1	0,53983	0,6	0,72575	1,1	0,86433	1,6	0,94520	2,1	0,98214	2,6	0,99534
0,11	0,54380	0,61	0,72907	1,11	0,86650	1,61	0,94630	2,11	0,98257	2,61	0,99547
0,12	0,54776	0,62	0,73237	1,12	0,86864	1,62	0,94738	2,12	0,98300	2,62	0,99560
0,13	0,55172	0,63	0,73565	1,13	0,87076	1,63	0,94845	2,13	0,98341	2,63	0,99573
0,14	0,55567	0,64	0,73891	1,14	0,87286	1,64	0,94950	2,14	0,98382	2,64	0,99585
0,15	0,55962	0,65	0,74215	1,15	0,87493	1,65	0,95053	2,15	0,98422	2,65	0,99598
0,16	0,56356	0,66	0,74537	1,16	0,87698	1,66	0,95154	2,16	0,98461	2,66	0,99609
0,17	0,56749	0,67	0,74857	1,17	0,87900	1,67	0,95254	2,17	0,98500	2,67	0,99621
0,18	0,57142	0,68	0,75175	1,18	0,88100	1,68	0,95352	2,18	0,98537	2,68	0,99632
0,19	0,57535	0,69	0,75490	1,19	0,88298	1,69	0,95449	2,19	0,98574	2,69	0,99643
0,2	0,57926	0,7	0,75804	1,2	0,88493	1,7	0,95543	2,2	0,98610	2,7	0,99653
0,21	0,58317	0,71	0,76115	1,21	0,88686	1,71	0,95637	2,21	0,98645	2,71	0,99664
0,22	0,58706	0,72	0,76424	1,22	0,88877	1,72	0,95728	2,22	0,98679	2,72	0,99674
0,23	0,59095	0,73	0,76730	1,23	0,89065	1,73	0,95818	2,23	0,98713	2,73	0,99683
0,24	0,59483	0,74	0,77035	1,24	0,89251	1,74	0,95907	2,24	0,98745	2,74	0,99693
0,25	0,59871	0,75	0,77337	1,25	0,89435	1,75	0,95994	2,25	0,98778	2,75	0,99702
0,26	0,60257	0,76	0,77637	1,26	0,89617	1,76	0,96080	2,26	0,98809	2,76	0,99711
0,27	0,60642	0,77	0,77935	1,27	0,89796	1,77	0,96164	2,27	0,98840	2,77	0,99720
0,28	0,61026	0,78	0,78230	1,28	0,89973	1,78	0,96246	2,28	0,98870	2,78	0,99728
0,29	0,61409	0,79	0,78524	1,29	0,90147	1,79	0,96327	2,29	0,98899	2,79	0,99736
0,3	0,61791	0,8	0,78814	1,3	0,90320	1,8	0,96407	2,3	0,98928	2,8	0,99744
0,31	0,62172	0,81	0,79103	1,31	0,90490	1,81	0,96485	2,31	0,98956	2,81	0,99752
0,32	0,62552	0,82	0,79389	1,32	0,90658	1,82	0,96562	2,32	0,98983	2,82	0,99760
0,33	0,62930	0,83	0,79673	1,33	0,90824	1,83	0,96638	2,33	0,99010	2,83	0,99767
0,34	0,63307	0,84	0,79955	1,34	0,90988	1,84	0,96712	2,34	0,99036	2,84	0,99774
0,35	0,63683	0,85	0,80234	1,35	0,91149	1,85	0,96784	2,35	0,99061	2,85	0,99781
0,36	0,64058	0,86	0,80511	1,36	0,91308	1,86	0,96856	2,36	0,99086	2,86	0,99788
0,37	0,64431	0,87	0,80785	1,37	0,91466	1,87	0,96926	2,37	0,99111	2,87	0,99795
0,38	0,64803	0,88	0,81057	1,38	0,91621	1,88	0,96995	2,38	0,99134	2,88	0,99801
0,39	0,65173	0,89	0,81327	1,39	0,91774	1,89	0,97062	2,39	0,99158	2,89	0,99807
0,4	0,65542	0,9	0,81594	1,4	0,91924	1,9	0,97128	2,4	0,99180	2,9	0,99813
0,41	0,65910	0,91	0,81859	1,41	0,92073	1,91	0,97193	2,41	0,99202	2,91	0,99819
0,42	0,66276	0,92	0,82121	1,42	0,92220	1,92	0,97257	2,42	0,99224	2,92	0,99825
0,43	0,66640	0,93	0,82381	1,43	0,92364	1,93	0,97320	2,43	0,99245	2,93	0,99831
0,44	0,67003	0,94	0,82639	1,44	0,92507	1,94	0,97381	2,44	0,99266	2,94	0,99836
0,45	0,67364	0,95	0,82894	1,45	0,92647	1,95	0,97441	2,45	0,99286	2,95	0,99841
0,46	0,67724	0,96	0,83147	1,46	0,92785	1,96	0,97500	2,46	0,99305	2,96	0,99846
0,47	0,68082	0,97	0,83398	1,47	0,92922	1,97	0,97558	2,47	0,99324	2,97	0,99851
0,48	0,68439	0,98	0,83646	1,48	0,93056	1,98	0,97615	2,48	0,99343	2,98	0,99856
0,49	0,68793	0,99	0,83891	1,49	0,93189	1,99	0,97670	2,49	0,99361	2,99	0,99861

Normalverteilung

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Block 2A – Aufgabe 2

Gegeben sind die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Geradenschar h_k mit

$h_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$ und $k \in \mathrm{IR}$.

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung von g zu h_k in Abhängigkeit von k.
Diejenige Gerade der Schar h_k, die die Gerade g schneidet, spannt mit dieser eine Ebene E auf.
Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E zum Ursprung.

b) Bestimmen Sie für k = 2 einen Punkt A der Geraden g und einen Punkt B der Geraden h_2 so, dass die Gerade durch die Punkte A und B auf den Geraden g und h_2 senkrecht steht.
Die Funktion f gebe den Abstand an, den ein beliebiger Punkt der Geraden h_2 vom Punkt T(4|4|-2) besitzt.
Bestimmen Sie das Minimum der Funktion f.
Interpretieren Sie das Ergebnis.

Block 2B – Aufgabe 1

Gegeben sind der Punkt P(2|2|1), eine Kugel K sowie eine Ebenenschar E_a mit

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right]^2 = 225 \text{ und } E_a: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = a,\ a \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P innerhalb der Kugel K liegt.
Die Kugel K schneidet aus der Ursprungsgeraden durch P eine Sehne aus.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem der Punkt P diese Sehne teilt.

b) Beschreiben Sie, welchen Einfluss der Parameter a auf die Ebenenschar hat.
Untersuchen Sie, ob es Ebenen der Schar E_a gibt, die Tangentialebenen zur Kugel K sind.
Bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Berührpunkt und den jeweiligen Parameter a.

c) Einige Ebenen der Schar besitzen mit der Kugel gemeinsame Schnittkreise.
Untersuchen Sie, ob die Punkte $M_1(-10|8|13)$ und $M_2(2|8|1)$ jeweils Mittelpunkt eines solchen Kreises sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Radius des jeweiligen Schnittkreises.

Block 2B – Aufgabe 2

Für den Zugang zu den Computern eines Hochschulnetzwerks besitzt jeder Studierende ein achtstelliges Passwort. Dabei wird ein Zeichensatz mit 64 Zeichen (30 Buchstaben, 10 Ziffern und 24 Sonderzeichen) verwendet. Den Studierenden wird zunächst ein vorläufiges Passwort zugewiesen, das der Administrator mit einem speziellen Programm erzeugt. Das Programm besetzt jede Stelle des Passworts mit einem zufällig ausgewählten Zeichen des verwendeten Zeichensatzes.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: Das zugeteilte Passwort besteht aus lauter verschiedenen Zeichen.
E_2: Das Passwort enthält mindestens zwei Sonderzeichen.

b) Die Erfahrungen des Administrators zeigen, dass die Studierenden bei der Änderung der Ihnen zugeteilten Passwörter Buchstaben und Ziffern bevorzugen und nur 10% der verwendeten Zeichen Sonderzeichen sind. Um die Sicherheit zu erhöhen, verschickt der Administrator an alle Studierenden eine E-Mail mit dem Hinweis, dass auch Sonderzeichen verwendet werden dürfen. Damit möchte er den Anteil der Sonderzeichen auf mindestens 20% steigern. Gelingt dies nicht, sollen weitere Maßnahmen ergriffen werden. Nach einiger Zeit werden aus den vorhandenen Passwörtern zufällig 4000 Zeichen ausgewählt und überprüft. Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung für diesen Fall einen möglichst großen Ablehnungsbereich für die Hypothese, dass die verschickte E-Mail bereits die erhoffte Wirkung hatte. Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll dabei 5% nicht überschreiten.
Bei einer anschließenden Überprüfung werden 781 Sonderzeichen gezählt. Ermitteln Sie die Entscheidung, die der Administrator daraufhin treffen wird.

Block 2B – Fortsetzung Aufgabe 2

Material Tabelle der Normalverteilung

X	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0	0,50000	0,5	0,69146	1	0,84134	1,5	0,93319	2	0,97725	2,5	0,99379
0,01	0,50399	0,51	0,69497	1,01	0,84375	1,51	0,93448	2,01	0,97778	2,51	0,99396
0,02	0,50798	0,52	0,69847	1,02	0,84614	1,52	0,93574	2,02	0,97831	2,52	0,99413
0,03	0,51197	0,53	0,70194	1,03	0,84849	1,53	0,93699	2,03	0,97882	2,53	0,99430
0,04	0,51595	0,54	0,70540	1,04	0,85083	1,54	0,93822	2,04	0,97932	2,54	0,99446
0,05	0,51994	0,55	0,70884	1,05	0,85314	1,55	0,93943	2,05	0,97982	2,55	0,99461
0,06	0,52392	0,56	0,71226	1,06	0,85543	1,56	0,94062	2,06	0,98030	2,56	0,99477
0,07	0,52790	0,57	0,71566	1,07	0,85769	1,57	0,94179	2,07	0,98077	2,57	0,99492
0,08	0,53188	0,58	0,71904	1,08	0,85993	1,58	0,94295	2,08	0,98124	2,58	0,99506
0,09	0,53586	0,59	0,72240	1,09	0,86214	1,59	0,94408	2,09	0,98169	2,59	0,99520
0,1	0,53983	0,6	0,72575	1,1	0,86433	1,6	0,94520	2,1	0,98214	2,6	0,99534
0,11	0,54380	0,61	0,72907	1,11	0,86650	1,61	0,94630	2,11	0,98257	2,61	0,99547
0,12	0,54776	0,62	0,73237	1,12	0,86864	1,62	0,94738	2,12	0,98300	2,62	0,99560
0,13	0,55172	0,63	0,73565	1,13	0,87076	1,63	0,94845	2,13	0,98341	2,63	0,99573
0,14	0,55567	0,64	0,73891	1,14	0,87286	1,64	0,94950	2,14	0,98382	2,64	0,99585
0,15	0,55962	0,65	0,74215	1,15	0,87493	1,65	0,95053	2,15	0,98422	2,65	0,99598
0,16	0,56356	0,66	0,74537	1,16	0,87698	1,66	0,95154	2,16	0,98461	2,66	0,99609
0,17	0,56749	0,67	0,74857	1,17	0,87900	1,67	0,95254	2,17	0,98500	2,67	0,99621
0,18	0,57142	0,68	0,75175	1,18	0,88100	1,68	0,95352	2,18	0,98537	2,68	0,99632
0,19	0,57535	0,69	0,75490	1,19	0,88298	1,69	0,95449	2,19	0,98574	2,69	0,99643
0,2	0,57926	0,7	0,75804	1,2	0,88493	1,7	0,95543	2,2	0,98610	2,7	0,99653
0,21	0,58317	0,71	0,76115	1,21	0,88686	1,71	0,95637	2,21	0,98645	2,71	0,99664
0,22	0,58706	0,72	0,76424	1,22	0,88877	1,72	0,95728	2,22	0,98679	2,72	0,99674
0,23	0,59095	0,73	0,76730	1,23	0,89065	1,73	0,95818	2,23	0,98713	2,73	0,99683
0,24	0,59483	0,74	0,77035	1,24	0,89251	1,74	0,95907	2,24	0,98745	2,74	0,99693
0,25	0,59871	0,75	0,77337	1,25	0,89435	1,75	0,95994	2,25	0,98778	2,75	0,99702
0,26	0,60257	0,76	0,77637	1,26	0,89617	1,76	0,96080	2,26	0,98809	2,76	0,99711
0,27	0,60642	0,77	0,77935	1,27	0,89796	1,77	0,96164	2,27	0,98840	2,77	0,99720
0,28	0,61026	0,78	0,78230	1,28	0,89973	1,78	0,96246	2,28	0,98870	2,78	0,99728
0,29	0,61409	0,79	0,78524	1,29	0,90147	1,79	0,96327	2,29	0,98899	2,79	0,99736
0,3	0,61791	0,8	0,78814	1,3	0,90320	1,8	0,96407	2,3	0,98928	2,8	0,99744
0,31	0,62172	0,81	0,79103	1,31	0,90490	1,81	0,96485	2,31	0,98956	2,81	0,99752
0,32	0,62552	0,82	0,79389	1,32	0,90658	1,82	0,96562	2,32	0,98983	2,82	0,99760
0,33	0,62930	0,83	0,79673	1,33	0,90824	1,83	0,96638	2,33	0,99010	2,83	0,99767
0,34	0,63307	0,84	0,79955	1,34	0,90988	1,84	0,96712	2,34	0,99036	2,84	0,99774
0,35	0,63683	0,85	0,80234	1,35	0,91149	1,85	0,96784	2,35	0,99061	2,85	0,99781
0,36	0,64058	0,86	0,80511	1,36	0,91308	1,86	0,96856	2,36	0,99086	2,86	0,99788
0,37	0,64431	0,87	0,80785	1,37	0,91466	1,87	0,96926	2,37	0,99111	2,87	0,99795
0,38	0,64803	0,88	0,81057	1,38	0,91621	1,88	0,96995	2,38	0,99134	2,88	0,99801
0,39	0,65173	0,89	0,81327	1,39	0,91774	1,89	0,97062	2,39	0,99158	2,89	0,99807
0,4	0,65542	0,9	0,81594	1,4	0,91924	1,9	0,97128	2,4	0,99180	2,9	0,99813
0,41	0,65910	0,91	0,81859	1,41	0,92073	1,91	0,97193	2,41	0,99202	2,91	0,99819
0,42	0,66276	0,92	0,82121	1,42	0,92220	1,92	0,97257	2,42	0,99224	2,92	0,99825
0,43	0,66640	0,93	0,82381	1,43	0,92364	1,93	0,97320	2,43	0,99245	2,93	0,99831
0,44	0,67003	0,94	0,82639	1,44	0,92507	1,94	0,97381	2,44	0,99266	2,94	0,99836
0,45	0,67364	0,95	0,82894	1,45	0,92647	1,95	0,97441	2,45	0,99286	2,95	0,99841
0,46	0,67724	0,96	0,83147	1,46	0,92785	1,96	0,97500	2,46	0,99305	2,96	0,99846
0,47	0,68082	0,97	0,83398	1,47	0,92922	1,97	0,97558	2,47	0,99324	2,97	0,99851
0,48	0,68439	0,98	0,83646	1,48	0,93056	1,98	0,97615	2,48	0,99343	2,98	0,99856
0,49	0,68793	0,99	0,83891	1,49	0,93189	1,99	0,97670	2,49	0,99361	2,99	0,99861

Normalverteilung

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Leistungskurs (LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

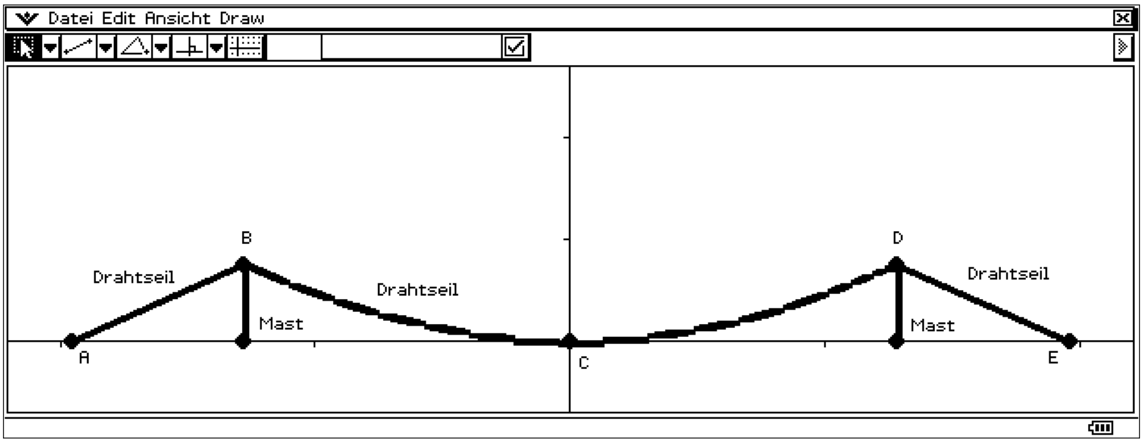
Pflichtaufgabenteil 1: Analysis
==============================

Wahlaufgaben 1A, 1B

Aufgabe 1A (Analysis):

geg. Brücke (Skizze), Seitenansicht in x-y-Ebene,
Durchhängendes Seil (zwischen den Masten),
befestigt (an senkrechten Masten) in B und D mit B(-640|152) und D(640|152),
Tiefpunkt des durchhängenden Seiles (Zwischen den Masten) in C mit C(0|0),
Verankerungsseile der Masten nach außen von B zu A bzw. von D zu E
mit A(-337-640|0) = A(-977|0) und E(640+337|0) = E(977|0)

Brücke (Skizze):



Teilaufgabe a)

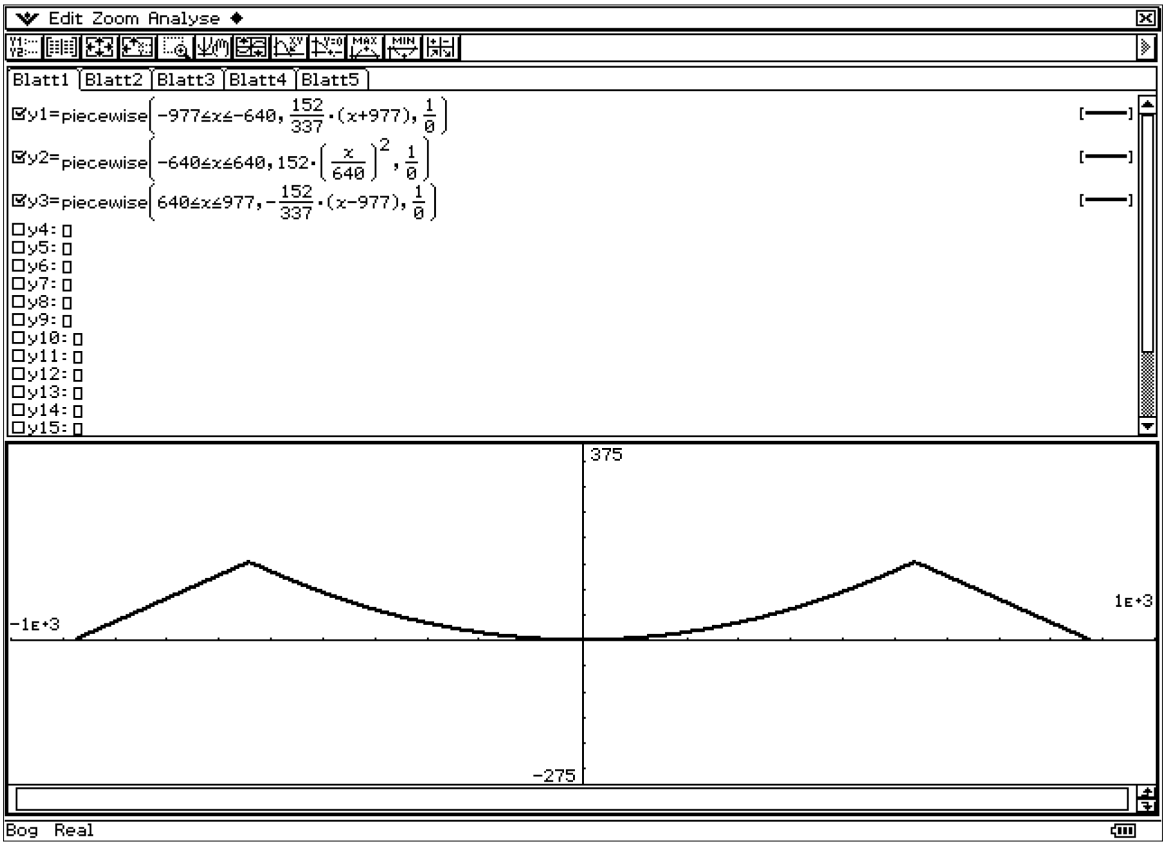
ges. ganzrationale Funktionen möglichst niedrigen Grades für die Kurvenstücke f_1, f_2, f_3
(1) von A nach B, (2) von B über C nach D und (3) von D nach E.

Lösung:

Beschreibung von (1) und (3) durch lineare Funktionen und (2) durch eine quadratische Funktion:

(1) $y = f_1(x) = (152/337)\times(x+977)$, $-977 \le x \le -640$,
(2) $y = f_2(x) = 152\times(x/640)^2$, $-640 \le x \le 640$,
(3) $y = f_3(x) = -(152/337)\times(x-977)$, $640 \le x \le 977$.

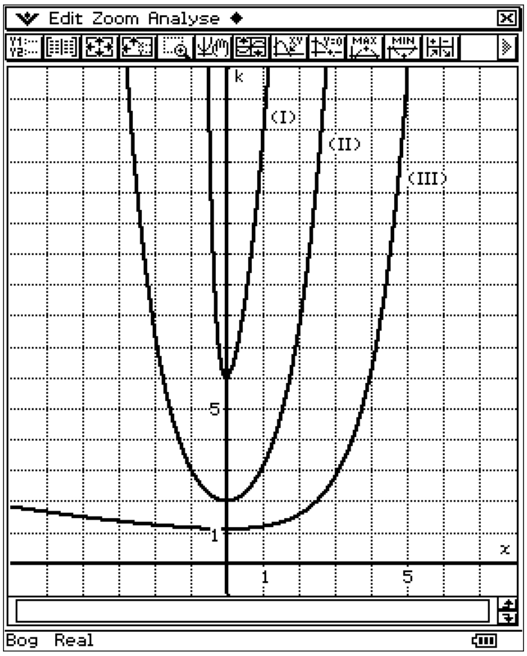
Skizze der Kurvenstücke:



Teilaufgabe b)

geg. Funktionenschar k_u mit $k_u(x) = u \times e^x + e^{(-u \times x)}$, $u>0$, $x \in R$.

Skizze dreier Graphen:



ges. Parameterwerte für u zu den Kurven (I), (II), (III).

Lösung:

mit $k_u(0) = u+1$ erkennt man in der Skizze folgende Schnittstellen mit der y-Achse:
(I) u+1 = 6, d.h. u = 5
(II) u+1 = 2, d.h. u = 1
(III) u+1 = 1.1, d.h. u = 0.1 = 1/10

ges. Verhalten von $k_u(x)$ für $|x| \to \infty$

Lösung:

beide Summanden von k_u sind positiv.
Für $x \to \infty$ strebt der erste Summand u*e^x gegen ∞.
Für $x \to -\infty$ strebt der zweite Summand e^(-u*x) gegen ∞.

Rechnung imGTR(CAS):

lim(u*e^x+e^(-u*x)|u>0, x, ∞) ergibt ∞

ges. Symmetrieeigenschaften von k_u

Lösung:

für u=1 ist $k_1(x)$ = e^x + e^(-x) = 2*cosh(x) eine gerade Funktion
für u≠1 ist liegt keine gerade Funktion vor.

ges. Nullstellen von k_u

Lösung: wegen $k_u(x) > 0$ gibt es keine Nullstellen

ges. Extrempunkte, Wendepunkte

Lösung:

Es gibt ein Minimum bei x=0 und kein Maximum,
$P_{min}(0|u+1)$

Rechnung im GTR(CAS):

Define ku(x)=u*e^x+e^(-u*x)
done
diff(u*e^x+e^(-u*x),x,1)=0 ergibt (u*e^(u*x+x)-u)*e^(-u*x)=0
solve(ans,x) ergibt {x=0}
diff(u*e^x+e^(-u*x),x,2,0) ergibt u^2+u

Wegen k_u'=0 und k_u">0 ist x=0 eine Minimumstelle.

Hinweis:
Wegen $k_u''=u^2+u>0$ für alle u ist k_u überall konvex, d.h. es gibt keine Wendepunkte.

ges. Beschreibung des Einflusses von u auf k_u

Lösung:

für große u wird die Kurve gestreckt und nach oben verschoben,
für kleine u wird die Kurve gestaucht und nach unten verschoben.

Wenn $u_1 < u_2$, dann u_1*e^x+e^(-u_1*x) < u_2*e^x+e^(-u_2x).
Für u→0 wird geht die konvexe Funktion in die Gerade y=1 über.

Teilaufgabe c)

geg. Funktionenschar $g_{a,b}(x)$ = a + e^(b*x) + e^(-b*x) mit a<0 und b>0
als mathematisches Modell.

ges. Modellanpassung an die Brücke (vgl. B, C, D) mithilfe passender Parameter a,b

Lösung:

Anpassung an C: a+e^(b*0)+e^(-b*0) = 0 (1)
Anpassung an D: a+e^(b*640)+e^(-b*640) = 152 (2)

Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (1),(2)

aus (1) folgt a = -(e^(b*0)+e^(-b*0)) = -2

eingesetzt in (2):

-2+e^(b*640)+e^(-b*640) = 152 (3)

Lösung der nichtlinearen Gleichung (3):

solve(-2+e^(b*640)+e^(-b*640)=152,b) ergibt
{b=ln(-2*(1482)^(1/2)+77)/640,b=ln(2*(1482)^(1/2)+77)/640}

approx(ans) ergibt {b=-7.870172553E-3,b=7.870172553E-3}

Auflösung durch analytische Umformungen:

(3) bedeutet 2*cosh(b*640)=154 und somit b*640=arcosh(76),
d.h.
b = arcosh(77)/640

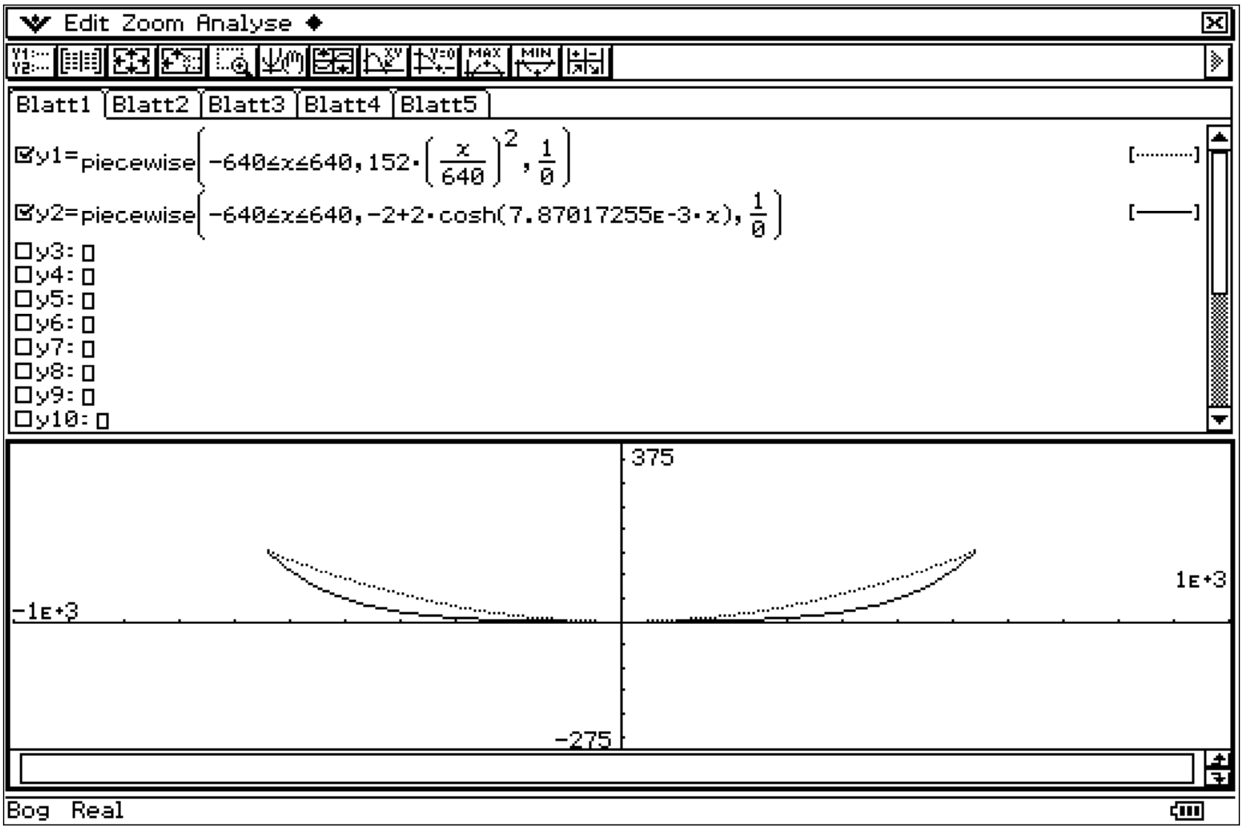
Rechnung im GTR(CAS):

Cosh^{-1}(77)/640	ergibt	7.870172553E-3
ln(2*(1482)^(1/2)+77)/640	ergibt	7.870172553E-3

ges. Skizze und Vergleich mit bisherigem Modell (quadratische Funktion, vgl. a))
Interpretation des Einflusses der Parameter auf den Kurvenverlauf

Lösung:

Vergleich der mathematischen Modelle:



Das neu angepasste Modell beruht aus der sogenannten Kettenlinie (cosh-Funktion), die einen stärkeren Durchhang in der Nähe der Masten aufweist und damit unterhalb der quadratischen Funktion verläuft.
Der Parameter a = -2 verschiebt die Kurve um 2 Einheiten nach unten.
Der Parameter b = 0.00787 bestimmt den Durchhang der Kettenlinie bzw. den Verlauf in Nähe der Masten. Der kleine b-Wert verhindert das schnelle Anwachsen der e-Funktion.

Teilaufgabe d)

geg. vereinfachte Modellfunktion g(x) = e^(0.00785x)+e^(-0.00785x), -640≤x≤640,

ges. optimale rechteckige Werbefläche in 1m Höhe parallel zu Strecke AE (i)
angrenzend an Mast (der in D endet) (ii)
unterhalb des Seiles (mit einer Ecke am Seil befestigt) (iii)
Eckpunktkoordinaten der maximalen Werbefläche angeben.

Lösung:

Ansatz für die Eckpunkte F, G, H, I des Rechtecks:
F(x|1), G(640|1), H(640|g(x)), I(x|g(x))

Flächeninhalt:
f(x) = (640-x)*(g(x)-1) → max

Rechnung im GTR(CAS):

Define g(x)=e^(0.00785x)+e^(-0.00785x)
done
Define f(x)=(640-x)*(g(x)-1)
done

fMax(f(x),x,0,640) ergibt {MaxValue=7000.059142,x=514.773}
g(x)|x=514.773 ergibt 56.89896063

Ergebnis:
Die Eckpunkte lauten F(514,77|1)| G(640|1), H(640|56,90), I(514,77|56,90)
Die Maximalfläche beträgt 7000m^2.

geg. Kosten pro Jahr für Werbefläche 300€/m^2

ges. Einnahme für optimale Werbefläche

Lösung:

7000*300€ = 2100000€ = 2,1Mio€ Gesamteinnahme werden pro Jahr erzielt.

ges. nicht verdeckte Fläche unterhalb des Seiles zwischen den Masten

Lösung:

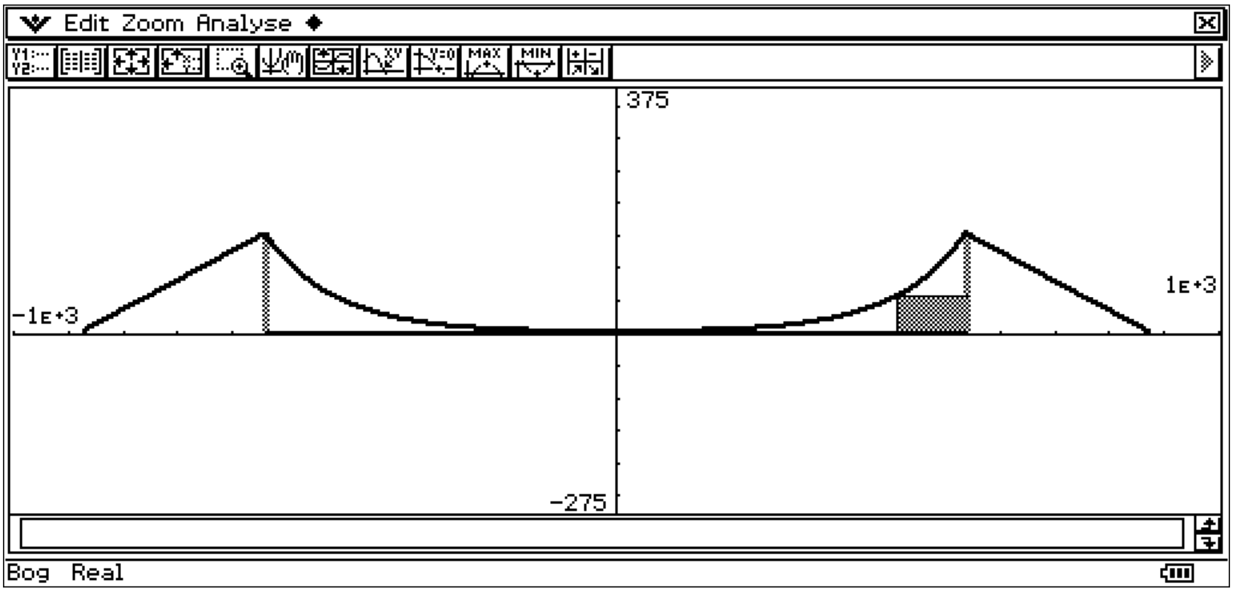
∫(g(x),x,-640,640) - 7000.059142 = 31729*m^2

Rechnung im GTR(CAS):

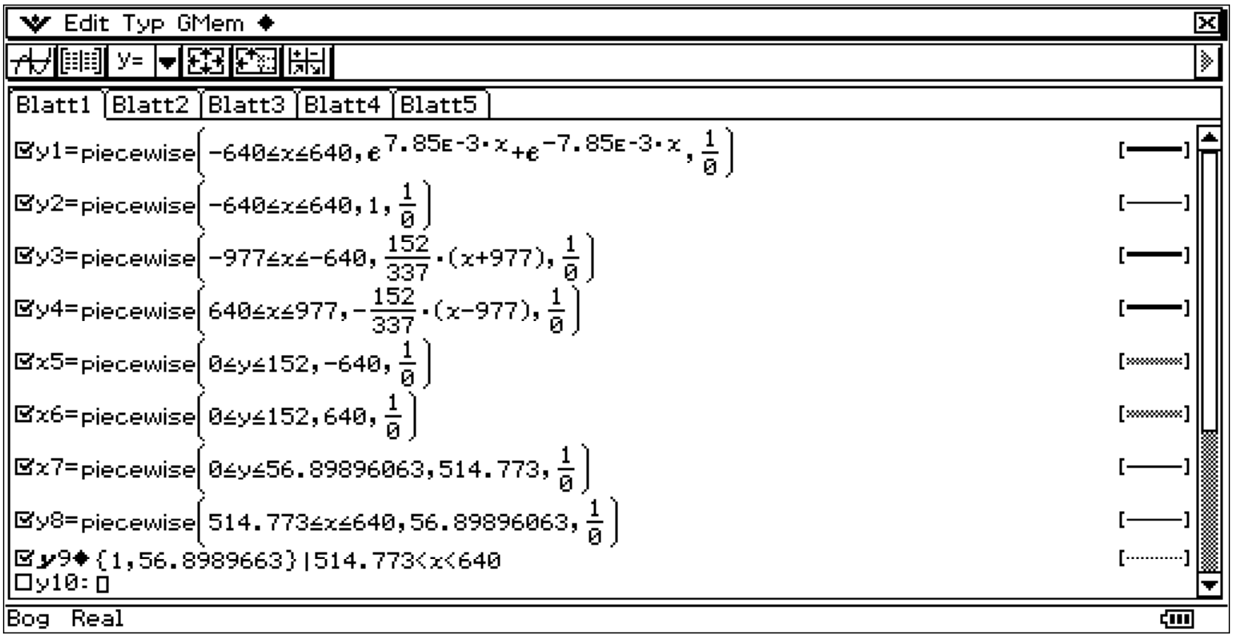
∫(g(x),x,-640,640) - 7000.059142 ergibt 31729.00678

Die gesuchte Restfläche beträgt 31729m^2.

Skizze Werbefläche:



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS


Edit Typ GMem
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=piecewise(-640≤x≤640, e^(7.85E-3·x)+e^(-7.85E-3·x), 1/0)
y2=piecewise(-640≤x≤640, 1, 1/0)
y3=piecewise(-977≤x≤-640, 152/337·(x+977), 1/0)
y4=piecewise(640≤x≤977, -152/337·(x-977), 1/0)
x5=piecewise(0≤y≤152, -640, 1/0)
x6=piecewise(0≤y≤152, 640, 1/0)
x7=piecewise(0≤y≤56.89896063, 514.773, 1/0)
y8=piecewise(514.773≤x≤640, 56.89896063, 1/0)
y9◆{1,56.8989663}|514.773<x<640
y10:
Bog Real

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Leistungskurs (LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 1: Analysis
================================

Wahlaufgaben 1A, 1B

Aufgabe 1B (Analysis):

geg. Wachstumsfunktionen f_k mit $f_k(t)$ = 100/(79*e^(-k*t)+1), k>0, t≥0,
$f_k(t)$ gibt den "Bestand" zum Zeitpunkt t an.

Teilaufgabe a)

ges. Parameter k mit $f_k(15)$ = 35

Lösung:

100/(79*e^(-k*15)+1) = 35 ergibt 100/35 = 79*e^(-k*15)+1, d.h.

79*e^(-k*15) = 100/35 - 1 = 65/35 und e^(-k*15) = 65/(35*79)

Somit

-15k = ln(65/(35*79)) und damit k = (-1/15)*ln(65/(35*79)) ≈ **0.25**

Rechnung im GTR(CAS):

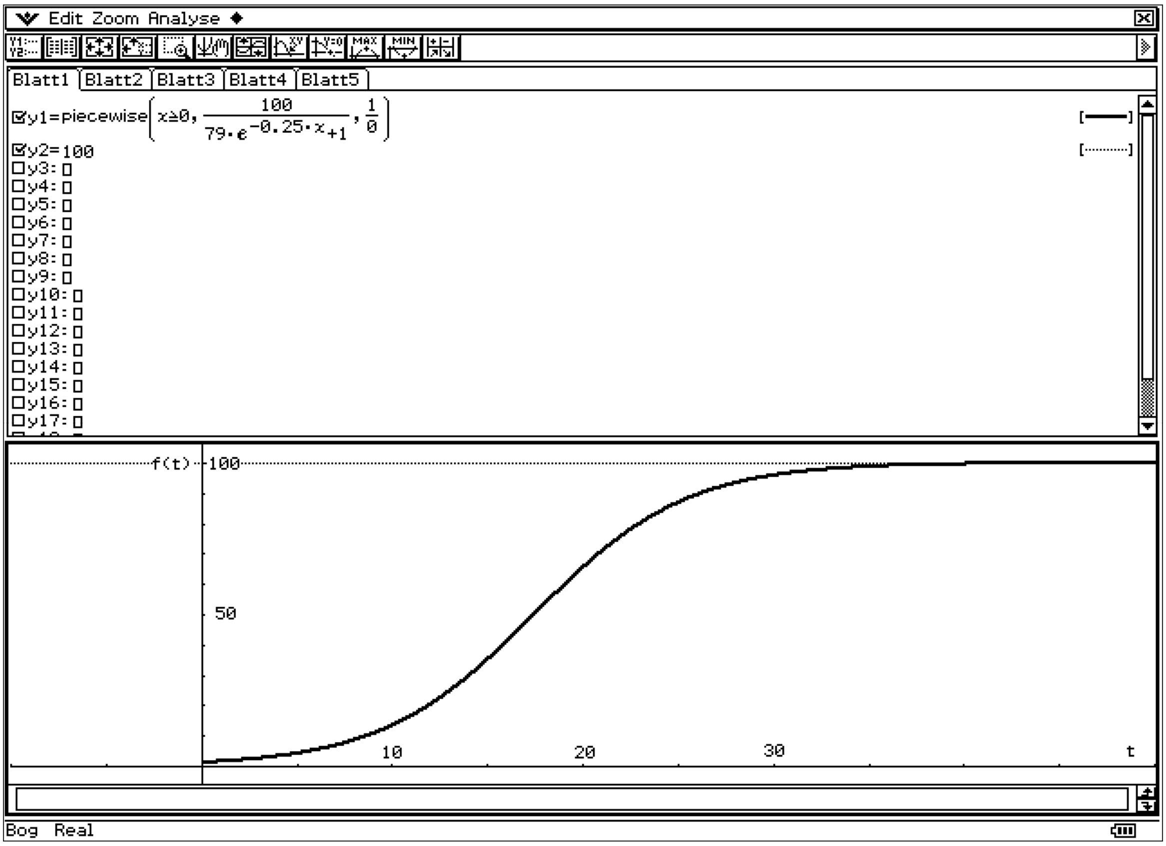
-1/15*ln(65/(35*79))	ergibt	0.2500272429
solve(100/(79*e^(-k*15)+1)=35,k)	ergibt	{k=0.2500272429}

Ergebnis: k = 0.25

ges. Skizze von f_k mit k=0.25

Lösung:

Skizze: (2D-Grafik)



ges. Zeitpunkt t mit $f_k(t) \geq 99$ (k=0.25)

Lösung:

(100/(79*e^(-0.25*t)+1)) ≥ 99 ergibt 100/99 ≥ 79*e^(-0.25*t)+1,

d.h.

79*e^(-0.25*t) ≤ 100/99 - 1 = 1/99,

hieraus folgt

e^(-0.25*t) ≤ 1/(99*79) und somit -0.25*t ≤ ln(1/(99*79)) = -ln(99*79)

damit ergibt sich t ≥ ln(99*79)/0.25 = 35.85827081

Rechnung im GTR(CAS):

solve(100/(79*e^(-0.25*t)+1)≥99,t) ergibt {t≥35.85827081}
ln(99*79)/0.25 ergibt 35.85827081

Ab dem Zeitpunkt **t ≈ 35,86** [Zeiteinheiten] wird das 99%-Niveau überschritten.

ges. erste Ableitung von f_k

Lösung:

diff((100/(79*e^(-k*t)+1)),t) = 100× diff((79*e^(-k*t)+1)^(-1),t)
= -100×(79*e^(-k*t)+1)^(-2) × diff(79*e^(-k*t)+1,t)

= -100×(79*e^(-k*t)+1)^(-2)×79×e^(-k*t)(-k)

= 7900×k×e^(-k*t) / (79*e^(-k*t)+1)^2

Kontrolle im GTR(CAS):

diff(100/(79*e^(-k*t)+1),t,1) ergibt 7900*k*e^(k*t) / (e^(k*t)+79)^2

ges. Untersuchung der Wachstumsgeschwindigkeit wie folgt:
- zunehmende Wachstumsgeschwindigkeit
- abnehmende Wachstumsgeschwindigkeit
- maximale Wachstumsgeschwindigkeit

Lösung:

die maximale Wachstumsgeschwindigkeit ist das Extremum der 1. Ableitung:

notwendige Bedingung: diff(diff(100/(79*e^(-k*t)+1), t), t) = 0

Rechnung im GTR(CAS):

diff(diff(100/(79*e^(-k*t)+1),t),t) = 0 ergibt
(624100*k^2*e^(k*t) - 7900*k^2*e^(2*k*t)) / (e^(k*t)+79)^3 = 0

solve(ans,t) ergibt {t=ln(79)/k}

factor(624100*k^2*e^(k*t)-7900*k^2*e^(2*k*t)) ergibt -7900*k^2*(e^(k*t)-79)*e^(k*t)

Aus der Faktorisierung des Zählers erkennt man sofort die Lösung und die Art des Extremums der 1. Ableitung:
für t < ln(79)/k ist der Zähler positiv und für t > ln(79)/k ist der Zähler negativ.

Damit liegt für die erste Ableitung ein Maximum (und für die Ausgangsfunktion ein Wendepunkt) vor.

Ergebnis:

für 0 ≤ t ≤ ln(79)/k	ist die Wachstumsgeschwindigkeit zunehmend
für t ≥ ln(79)/k	ist die Wachstumsgeschwindigkeit abnehmend
für t = ln(79)/k	ist die Wachstumsgeschwindigkeit maximal

Teilaufgabe b)

ges. Lösung der **Differenzialgleichung g'(t) = a×g(t)** für ein passendes a∈R, derart, dass die **Randbedingungen g(0) = $f_{0.25}$(0)** und **g(15) = $f_{0.25}$ (15)** gelten.
(d.h. Lösung der Randwertaufgabe g'(t) = a×g(t) mit g(0) = $f_{0.25}$ (0) und g(15) = $f_{0.25}$ (15))

Lösung:

Methode der **Trennung der Variablen** ergibt:

dg/dt = a×g und hieraus (1/g)×dg = a×dt bzw. ∫(1/g,g) = ∫(a,t)

es folgt:

$\ln(|g|) = a \times t + C$ und mit den Randbedingungen:
$\ln(f_{0.25}(0)) = C$ sowie $\ln(f_{0.25}(15)) = 15a + C$

Ergebnis: $\mathbf{C = \ln(f_{0.25}(0))}$ und $\mathbf{a =} (\ln(f_{0.25}(15)) - \ln(f_{0.25}(0))) / 15 = \mathbf{\ln(f_{0.25}(15)/(f_{0.25}(0)) / 15}$

Damit lautet g wie folgt:

g(t) = e^(a×t+C)
= e^(ln(f0.25(15)/f0.25(0))×t/15 + ln(f0.25(0))
= (f0.25(15) / f0.25(0))^(t/15) × f0.25(0)
= f0.25(0) × ((f0.25(15) / f0.25(0))^(1/15))^t

mit $f_{0.25}(0) = 100/80 = 1.25$ und $f_{0.25}(15) = 100 / (79 \cdot e^{-15/4}+1)$ bedeutet das:

g(t) = 1.25 × ((80/(79*e^(-15/4)+1))^(1/15))^t ≈ 1.25×1.2487^t **≈ 1.25×e^(0.222t)** , t≥0.

Rechnung im GTR(CAS):

(80/(79*e^(-15/4)+1))^(1/15) ergibt 1.248732776
ln(1.248732776) ergibt 0.2221292579
Define f(t) = 100/(79*e^(-t/4)+1)
done
f(0) ergibt 5/4
f(15) ergibt 100/(79*e^(-15/4)+1)

Lösung des Anfangswertproblems 1. Ordnung mit dem Parameter a:

dSolve(g'=a*g,t,g,t=0,g=5/4) ergibt {g=5*e^(a*t)/4}

Bestimmung des Parameters a:

{g = 5*e^(a*t)/4}|{t = 15,g = 100/(79*e^(-15/4)+1)} ergibt {100/(79*e^(-15/4)+1) = 5*e^(15*a)/4}
ans[1] ergibt 100/(79*e^(-15/4)+1) = 5*e^(15*a)/4
solve(ans,a) ergibt {a = (-ln(e^(15/4)+79))/15 + ln(5)/15 + 4*ln(2)/15 + 1/4}
approx(ans) ergibt {a = 0.2221292582}

Ergebnis: g(t) ≈ 5*e^(0.222*t)/4

ges. Lösung der **Differenzialgleichung h'(t) = b×(100-h(t))** für ein passendes b∈R, derart, dass die **Randbedingungen h(20) = $\mathbf{f_{0.25}(20)}$** und **h(35) = $\mathbf{f_{0.25}(35)}$** gelten.
(d.h. Lösung der Randwertaufgabe h'(t) = b×(100-h(t)) mit h(20) = $f_{0.25}(20)$ und h(35) = $f_{0.25}(35)$)

Lösung:

Methode der **Trennung der Variablen** ergibt:

dh/dt = b×(100-h) und hieraus 1/(100-h)×dh = b×dt bzw. ∫(1/(100-h),h) = ∫(b,t)
es folgt:
-ln(|100-h|) = b×t + C und mit den Randbedingungen:
-ln(100 - $f_{0.25}$(20)) = 20b + C sowie **-ln(100 - $f_{0.25}$(35)) = 35b + C**

Auflösung des linearen Gleichungssystems für b, C:
15b = ln(100-$f_{0.25}$(20)) - ln(100-$f_{0.25}$(35)) = ln((100-$f_{0.25}$(20)) / (100-$f_{0.25}$(35))),
d.h.
b = (1/15)×ln((100-$f_{0.25}$ (20)) / (100-$f_{0.25}$ (35))) **≈ 0.222**
und
C = -20b - ln(100-$f_{0.25}$(20)) = -(20/15)×ln((100-$f_{0.25}$(20))/(100-$f_{0.25}$(35))) - ln(100-$f_{0.25}$(20)) **≈ -7.995**

Vereinfachung:
1/15*ln((100-f(20))/(100-f(35))) ergibt 0.2223781526
-20/15*ln((100-f(20))/(100-f(35))) - ln(100-f(20)) ergibt -7.995412644

Ergebnis:
100 - h(t) = e^(-b×t-C), d.h.
h(t) = 100 - e^(-b×t-C) ≈ **100 – $e^{7.995}$ × $e^{-0.222\times t}$ ≈ 100 - 2967×0.8^t**

Rechnung im GTR(CAS):
e^7.995412644 ergibt 2967.314589
e^(-0.2223781526) ergibt 0.8006125534

Lösung des Anfangswertproblems 1. Ordnung mit dem Parameter b:
dSolve(h'=b*(100-h),t,h,t=20,h=f(20)) ergibt {h = (-100*(79*e^(-b*t+20*b)-e^5-79)) / (e^5+79)}

Bestimmung des Parameters b:
{h = (-100*(79*e^(-b*t+20*b)-e^5-79)) / (e^5+79)} | {t=35, h=f(35)} ergibt
{100/(79*e^(-35/4)+1) = (-100*(79*e^(-15*b)-e^5-79)) / (e^5+79)}
ans[1] ergibt 100/(79*e^(-35/4)+1) = (-100*(79*e^(-15*b)-e^5-79))/(e^5+79)
solve(ans,b) ergibt {b=ln(e^(35/4)+79)/15-ln(e^5+79)/15}
approx(ans) ergibt {b=0.2223781526}

Damit erhält man den gleichen b-Wert wie oben.

Ergebnis: h(t) ≈ 100 - 2967×0.8^t ≈ 100 - 2967×$e^{-0.222t}$

geg. $f_{0.25}$(t) mit folgender Darstellung der 1. Ableitung
diff($f_{0.25}$(t),t) = (1/100) × 0.25 × $f_{0.25}$(t) × (100 - $f_{0.25}$(t))

ges. Schlussfolgerung zum Verlauf anhand der zuvor gegebenen Darstellung
für die 1. Ableitung.

Lösung:

$f_{0.25}$ist streng monoton wachsend und nähert sich für t→∞ dem Sättigungswert 100, d.h.
für große t geht der Faktor 100 - $f_{0.25}(t)$ in der 1. Ableitung auf Null.
Der Nullanstieg deutet auf einen fast waagerechten Verlauf hin, der "Bestand" von 100% ist damit erreicht und es gibt keine weiteren Veränderungen.

Ähnlich gestaltet sich der Anfang des Wachstumsvorganges mit t nahe 0:
Hier bestimmt zunächst der Faktor $f_{0.25}(t)$ die langsam größer werdende Wachstumsgeschwindigkeit.

Kontrolle der Ableitung im GTR(CAS):

f(t) ergibt 100 / (79*e^(-t/4) + 1)

diff(f(t),t,1) = 0.25/100*f(t)*(100 - f(t)) ergibt
1975*e^(t/4)/(e^(t/4)+79)^2 = -100/(79*e^(-t/4)+1) - 100) / (4*(79*e^(-t/4)+1)

simplify(ans) ergibt 1975*e^(t/4) / (e^(t/4)+79)^2 = 1975*e^(t/4) / (e^(t/4)+79)^2
Damit sind beide Seiten identisch.

Teilaufgabe c)

geg. Datenerfassung für einen Wachstumsvorgang:

Zeit (in Stunden)	10	15	20	25	30
"Bestand" in ME (Mengeneinheiten)	12	35	66	89	96

Modellierung des "Bestandes" mittels der Funktion z = z(t):

$$z(t) = \begin{cases} 1.25 \times e^{\wedge}(0.222\times t) & \text{für} \quad 0 \le t \le 15, \\ 6.05\times t - 55.75 & \text{für} \quad 15 < t < 20, \\ 100 - 3006\times e^{\wedge}(-0.223\times t) & \text{für} \quad t \ge 20. \end{cases}$$

ges. Skizze zu z(t)

Lösung:

Vorbetrachtung der Übergänge zwischen den Kurvenstücken:

lim(1.25*e^(0.222*t), t, 15-0) ergibt 34.92292713
lim(6.05*t-55.75, t, 15+0) ergibt 35
lim(6.05*t-55.75, t, 20-0) ergibt 65.25
lim(100-3006*e^(-0.223*t), t, 20+0) ergibt 65.24353596

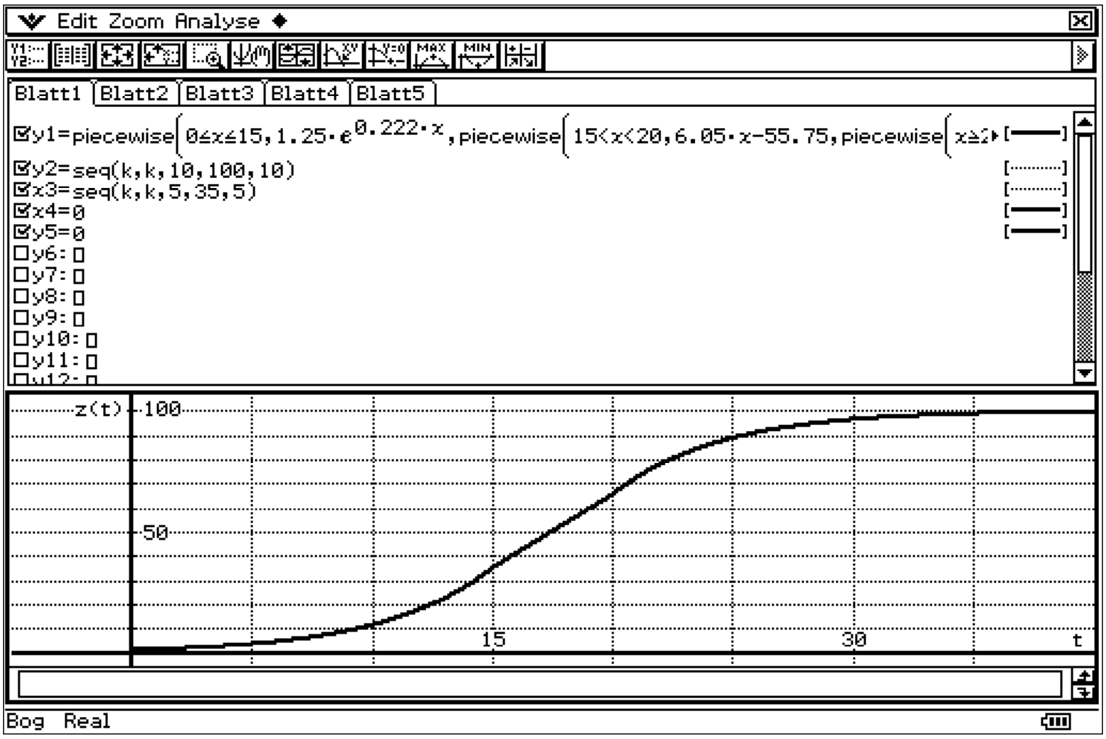
Die Kurvenstücke gehen fast ohne Sprung (**Unstetigkeit**) ineinander über.

Betrachtung der Anstiege in den Übergängen:

lim(diff(1.25*e^(0.222*t),t,1),t,15-0)	ergibt	7.752889823
lim(diff(6.05*t-55.75,t,1),t,15+0)	ergibt	6.05
lim(diff(6.05*t-55.75,t,1),t,20-0)	ergibt	6.05
lim(diff(100-3006*e^(-0.223*t),t,1),t,20+0)	ergibt	7.750691481

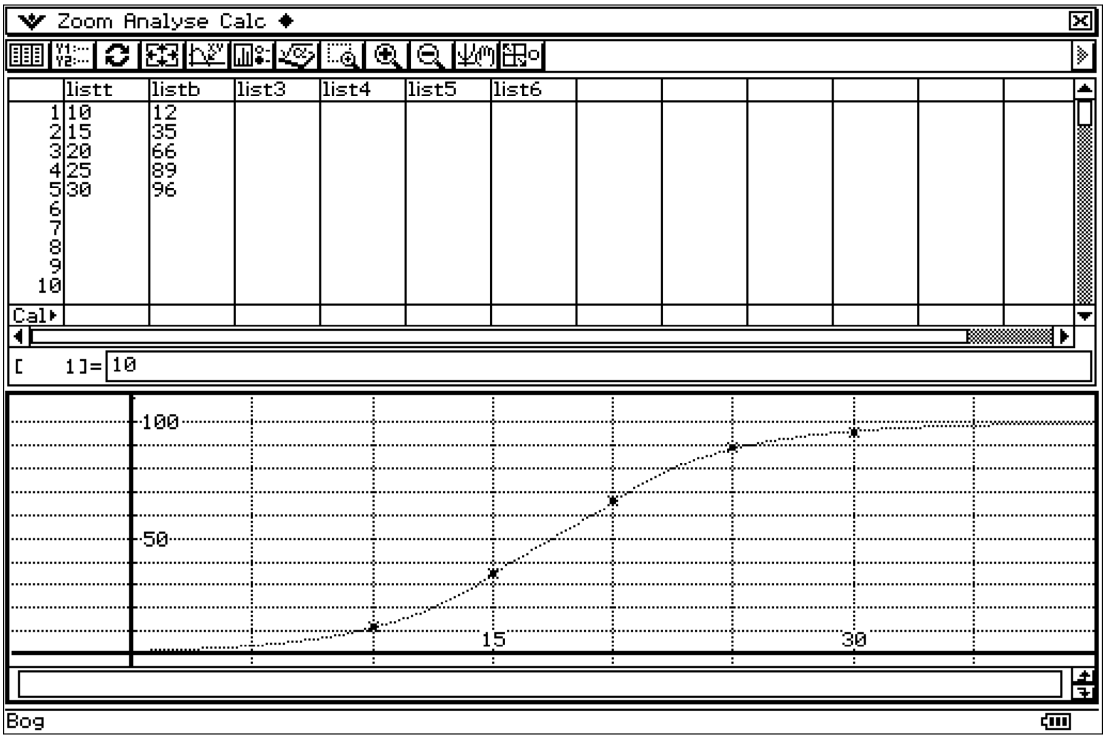
Damit sind die Übergänge **Knickstellen**, da sich die Anstiege dort sprunghaft von 7.75 auf 6.05 und umgekehrt ändern.

Skizze:



seq(k,k,10,30,5) ⇒ listt ergibt {10,15,20,25,30}
{12,35,66,89,96} ⇒ listb ergibt {12,35,66,89,96}

Skizze der Datenpunkte im Verlauf der Modellkurve:



ges. Beschreibung des Wachstums der einzelnen Kurvenstücke

Lösung: erstes Kurvenstück: konvexer Verlauf (exponentielles Wachstum)
zweites Kurvenstück: geradliniger Verlauf (Geradenstück)
drittes Kurvenstück: konkaver Verlauf mit waagerechter Asymptote (beschränktes Wachstum)

ges. Gütekriterium zum Vergleich unterschiedlicher Modellfunktionen,
hier Vergleich von z(t) und $f_{0.25}$(t)

Lösung:
Residuen betrachten und deren Quadrate aufsummieren zur sogenannten Reststreuung.
Die fünf Zeitpunkte seien t_1 bis t_5 mit t_k = 5*(k+1), k = 1, 2, 3, 4, 5.
Die Messwerte dazu seien z_1 bis z_5.
Die Modellwerte sind z(t_k), k = 1, 2, 3, 4, 5.
Das Residuum ("Rest") in t_k ist z_k-z(t_k).
Gütekriterium G für die Modellanpassung ist dann

G := ∑((zk-z(t_k))^2,k,1,5)

Berechnung von G für z(t):

Define z(t) = piecewise(0≤t≤15, 1.25*e^(0.222*t),
piecewise(15<t<20, 6.05*t-55.75,
piecewise(t≥20, 100-3006*e^(-0.223*t), 1/0)))

done

seq(k,k,10,30,5) ⇒ listek ergibt {10,15,20,25,30}

{z(10),z(15),z(20),z(25),z(30)} ⇒ lmodellz ergibt
{11.50916358,34.92292713,65.24353596,88.6028244,96.26269198}

{12,35,66,98,96} ⇒ ldaten ergibt {12,35,66,98,96}

sum((ldaten-lmodellz)^2) ⇒ Gz ergibt **89.1950148**

Berechnung von G für f(t):

Define f(t)=(100/(79*e^(-0.25*t)+1))

done

{f(10),f(15),f(20),f(25),f(30)} ⇒ lmodellf ergibt
{13.36056235,34.99070392,65.26146494,86.76745344,95.81355462}

sum((ldaten-lmodellf)^2) ⇒ Gf ergibt **128.6015145**

Wegen Gz < Gf ist die stückweise zusammengesetzte Modellgleichung besser.

Hinweis: logistische Regression:

LogisticReg listk,ldaten,y1,On

done

Define h(t)=y1(t)

done

expand(h(t)) ergibt

102.3581586 / (145.9477852 * e^(-0.2863161301*t) + 1)

d.h.

h(t) = 102,36 / (145,95*e^(-0,2863*t) + 1))

residual ergibt
{1.031331769,0.7749848849,-3.364809677,6.0874649,-3.652213428}

sum(residual^2) ⇒ Gh ergibt **63.38208278**

Damit ergibt sich mit der angegebenen Modellfunktion h(t) eine weitere Verbesserung in der Modellanpassung.

Teilaufgabe d)

ges. Flächeninhalt zwischen t-Achse und z(t) bzw. $f_{0.25}(t)$ über dem Intervall $0 \le t \le 35$.

Lösung:

f(t) ergibt 100/(79*e^((-t)/4)+1)

∫(f(t),t,0,35) ergibt 1752.165641

∫(1.25*e^(0.222*t),t,0,15) + ∫(6.05*t-55.75,t,15,20) + ∫(100-3006*e^(-0.223*t),t,20,35)
ergibt 1751.941876

Damit unterscheiden sich die Ergebnisse nur unwesentlich.
Der Flächeninhalt beträgt in beiden Fällen ca. **1752 Flächeneinheiten**.

geg. Aussage
"Wenn für zwei Funktionen die Flächeninhalte der Flächen zwischen der t-Achse und dem jeweiligen Graphen in einem Intervall näherungsweise gleich sind, dann ist der Flächeninhalt zwischen den Graphen näherungsweise null."

ges. begründete Bewertung der Aussage

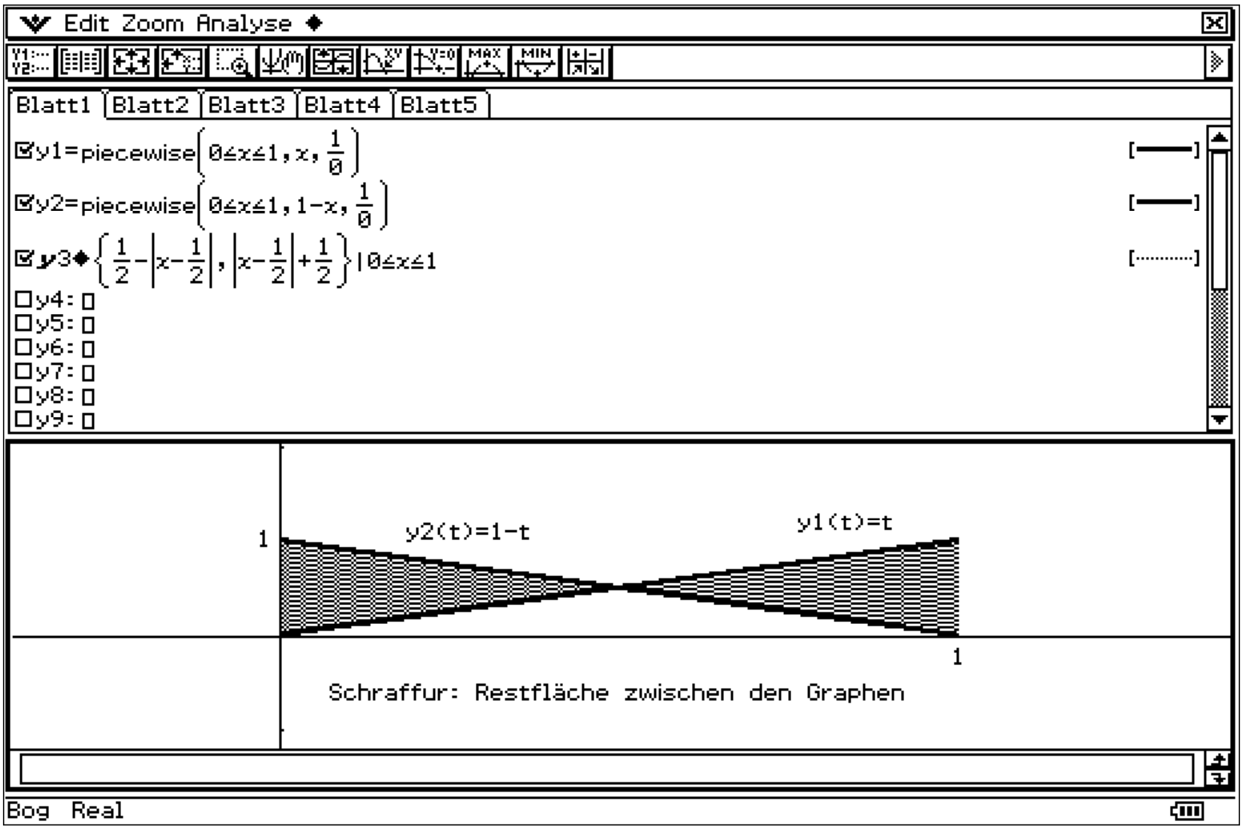
Lösung:
die Aussage ist falsch, denn es gibt unterscheidbare Funktionen mit gleichen Flächeninhalten zur t-Achse.

Beispiel:
y1(t) = t im Intervall $0 \le t \le 1$ und
y2(t) = 1-t im Intervall $0 \le t \le 1$.

∫(t,t,0,1) ergibt 1/2
∫(1-t,t,0,1) ergibt 1/2
∫(|t-(1-t)|,t,0,1) ergibt 1/2

Beide Geradenstücken haben den Flächeninhalt 1/2 zur t-Achse.
Zwischen den Geradenstücken ist jedoch der Flächeninhalt nicht null sondern ebenfalls 1/2.

Skizze zum Sachverhalt:


Edit Zoom Analyse
Blatt1 Blatt2 Blatt3 Blatt4 Blatt5
y1=piecewise(0≤x≤1, x, 1/0)
y2=piecewise(0≤x≤1, 1−x, 1/0)
y3◆{1/2−|x−1/2|, |x−1/2|+1/2}|0≤x≤1
y4:
y5:
y6:
y7:
y8:
y9:
y2(t)=1-t
y1(t)=t
1
1
Schraffur: Restfläche zwischen den Graphen
Bog Real

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Leistungskurs (LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik

===

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 1 (Block 2A, Stochastik):

Würfelexperiment: Werfen zweier Würfel

Teilaufgabe a)

ges. Wahrscheinlichkeit, zwei "Sechsen" zu erhalten

Lösung: p = P({zwei "Sechsen" würfeln}) = (1/6)^2 = 1/36

geg. Bernoulli-Schema mit n = 700 und p = 1/36
S_n sei die zufällige Anzahl der "Doppelsechsen" im Bernoulli-Schema
Ereignis E := {15 ≤ S_n ≤ 20}

ges. P(E)

Lösung:

S_n ist binomialverteilt mit den Parametern n und p

700 ⇒ n 1/36 ⇒ p

P(E) = binomialCDf(20,n,p) - binomialCDf(14,n,p) ergibt P(E) = 0.4842527549

Ergebnis: P(E) ≈ 0.4843

Teilaufgabe b)

ges. Näherungslösung für P(E) mittels Normalapproximation bzw. Poisson-Approximation,
Prüfung der Faustregeln für eine gute Approximation

Lösung:

Normalapproximation gut geeignet für n*p*(1-p) ≥ 9 (Faustregel)

n*p*(1-p) ergibt 18.90432099

Die Faustregel ist erfüllt, es ist eine gute Approximation zu erwarten.
Ansatz mit Stetigkeitskorrektur:

$P(E) = P(S_n \leq 20.5) - P(S_n \leq 14.5)$

normCDf(14.5,20.5,(n*p*(1-p))^(1/2),n*p) ergibt 0.4681821265

Ergebnis (Normalapproximation): P(E) ≈ 0.4682

Poisson-Approximation gut geeignet für 0 < p < min{10/n, n/1500} (Faustregel)

10/n ergibt 0.01428571429
n/1500 ergibt 0.4666666667
p ergibt 0.02777777778

Die Faustregel ist nicht erfüllt, es ist keine gute Poisson-Approximation zu erwarten:

n*p ⇒ λ ergibt 19.44444444

{poissonPDf(15,λ),poissonPDf(16,λ),poissonPDf(17,λ),
poissonPDf(18,λ),poissonPDf(19,λ),poissonPDf(20,λ)} ergibt
{0.05899545456,0.07169586491,0.08200507424,
0.08858572835,0.09065790913,0.08813963388}
sum(ans) ergibt 0.4800796651

Ergebnis (Poisson-Approximation): P(E) ≈ 0.4801

Das Ergebnis ist besser als die Normalapproximation, obwohl die (strenge) Faustregel noch nicht erfüllt ist.
Die Faustregel ist eine hinreichende Bedingung und nicht zwingend notwendig für ein brauchbares Ergebnis.

ges. Beurteilung der Qualität der Approximation (Abweichungen vom exakten Wert)

Lösung:

Die Normalapproximation ergibt:

0.4842527549 ⇒ exaktW 0.4681821265 ⇒ normW

exaktW - normW ergibt 0.0160706284
(exaktW - normW)/exaktW ergibt 0.03318644703

**Die Normalapproximation hat eine absolute Abweichung von 0,016,
die relative Abweichung beträgt 3,32%.**

Die Poisson-Approximation ergibt:

0.4800796651 ⇒ PoissW

exaktW - PoissW ergibt 4.1730898E-3
(exaktW - PoissW)/exaktW ergibt 8.61758608E-3

**Die Poisson-Approximation hat eine absolute Abweichung von 0,004,
die relative Abweichung beträgt 0,86%.**

Teilaufgabe c)

geg. Approximationsformel für die Normalverteilung wie folgt

Dichtefunktion f_k mit Parameter k > 0:

$f_k(x)$ = k/(x^2+1) für -∞ < x < ∞.

ges. Eigenschaften einer Dichtefunktion, Bestimmung von k

Lösung:
Eine Dichtefunktion ist nichtnegativ und weist die Gesamtfläche 1 zwischen x-Achse und Funktion auf.
f_k erfüllt die Nichtnegativitätsbedingung.

Flächeninhalt:
Es handelt sich und die Dichtefunktion der **Cauchy-Verteilung**, die keinen Erwartungswert und keine Streuung besitzt, da die uneigentlichen Integrale zur Berechnung von μ und σ divergieren.

DelVar k,μ,σ
done

∫(k/(x^2+1),x,-∞,∞) = 1 ergibt k*π=1
solve(ans,k) ergibt {k=1/π}
approx(ans) ergibt {k=0.3183098862}

Der Parameter k muss den Wert **k ≈ 0.3183** haben.

ges. Näherungslösung für P(E) mit $f_k(x)$, k = 1/π,

Lösung:

1/π ⇒ k

Aus Symmetriegründen setzten wir formal μ mit 0 an.

0 ⇒ μ

σ = (∫((x-μ)^2*k/(x^2+1), x, -∞, ∞))^(1/2) ergibt σ=∞

Damit existiert keine endliche Streuung und eine Approximation für die Verteilung von S_n erscheint nicht sinnvoll.

P(E) = P(S_n ≤ 20.5) - P(S_n ≤ 14.5)
= P((S_n-n*p) / √(n*p*(1-p)) ≤ (20.5-n*p) / √(n*p*(1-p)))
- P((S_n-n*p) / √(n*p*(1-p)) ≤ (14.5-n*p) / √(n*p*(1-p)))

Es sei X die zur Dichtefunktion $f_k(x)$ gehörige Zufallsgröße, dann wäre (X-μ)/σ = X/σ eine standardisierte Zufallsgröße, die im Intervall

[(14.5-n*p) / √(n*p*(1-p)), (20.5-n*p) / √(n*p*(1-p))]

zu betrachten wäre:

(14.5-n*p) / √(n*p*(1-p)) ≤ X/σ ≤ (20.5-n*p) / √(n*p*(1-p)),
d.h.
(14.5-n*p)*σ / √(n*p*(1-p)) ≤ X ≤ (20.5-n*p)*σ / √(n*p*(1-p)).

Somit wäre das Intervall -∞ < X < ∞ zur Approximation von P(E) zu betrachten, d.h. P(E) ≈ 1.
P(E) ≈ ∫(k/(x^2+1),x,-∞,∞) = 1

Rechnung im GTR(CAS):
∫(k/(x^2+1),x,-∞,∞) ergibt 1

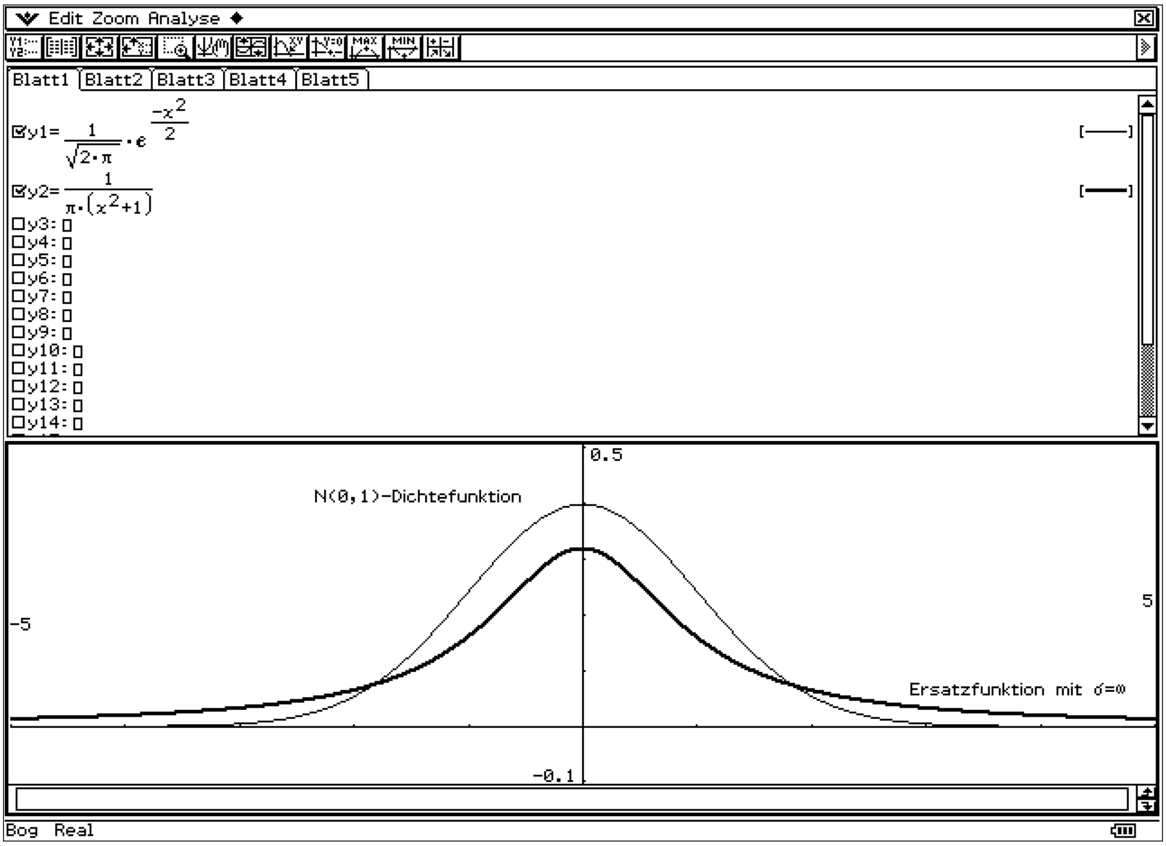
Damit erhalten wir über diese Näherungsformel die Wahrscheinlichkeit **P(E) ≈ 1**.

ges. Beurteilung der Qualität der Approximation (Abweichungen vom exakten Wert)

Lösung:
1 ⇒ neueW 0.4842527549 ⇒ exaktW
neueW - exaktW ergibt 0.5157472451
(neueW - exaktW) / exaktW ergibt 1.065037297

**Die neue Approximation hat eine absolute Abweichung von 0,516,
die relative Abweichung beträgt 106,5%.**

Skizze den der Dichtefunktionen:



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Leistungskurs (LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik
==

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 2 (Block 2A,Analytische Geometrie):

geg. Gerade g mit **x**(λ) = [[-2],[2],[-5]] + λ*[[6],[2],[3]], λ∈R, und

Geradenschar h_k mit **x**(μ) = [[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[k]], μ∈R, und k∈R

Teilaufgabe a)

ges. Lagebeziehungen von g zu h_k in Abhängigkeit von k∈R

Lösung:

Ansatz für Schnittpunkte: [[-2],[2],[-5]] + λ*[[6],[2],[3]] = [[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[k]],

d.h.

λ*[[6],[2],[3]] - μ*[[3],[2],[k]] = [[-1],[-1],[2]] - [[-2],[2],[-5]].

Hieraus:

λ*[[6],[2],[3]] - μ*[[3],[2],[k]] = [[1],[-3],[7]].

Betrachtung der Einzelgleichungen als nichtlineares System:

solve({6*λ-3*μ=1,2*λ-2*μ=-3,3*λ-k*μ=7},{λ,μ,k}) ergibt {λ=11/6,μ=10/3,k=-9/20}

Damit gibt es im Fall k = -9/20 = -0,45 eine eindeutige Lösung, d.h. einen Schnittpunkt S,

[[-2],[2],[-5]]+λ*[[6],[2],[3]]|λ=11/6 ergibt [[9],[17/3],[1/2]]

S = S(9|17/3|1/2)

Kontrolle:

[[-1],[-1],[2]]+μ*[[3],[2],[k]]|μ=10/3 and k=-9/20 ergibt [[9],[17/3],[1/2]]

Hinweis zur schrittweisen Lösung des Systems:

zuerst λ und μ ermitteln:

solve({6*λ-3*μ=1,2*λ-2*μ=-3},{λ,μ}) ergibt {λ=11/6, μ=10/3}

Hieraus:
solve(3*λ-k*μ=7,k)|λ=11/6 and μ=10/3 ergibt {k=-9/20}

Ergebnis:
im Fall k = -9/20 = -0,45 **schneiden** sich die Geraden
im Fall k ≠ -(9/20 sind die Geraden **windschief**, da die Richtungsvektoren nicht parallel sind:
[[6],[2],[3]] ≠ t*[[3],[2],[k]] für alle t∈R
(vgl. 1. und 2. Koordinate: 6=3t und 2=2t nicht gleichzeitig möglich)

ges. Ebenengleichung der Ebene E mit den Schittgeraden g und $h_{-0.45}$, d.h. k = -0.45:

Lösung: x(s,t) = [[-2],[2],[-5]] + s*[[6],[2],[3]] + t*[[3],[2],[-0.45]], s,t∈R,

ges. Abstand der Ebene E vom Koordinatenursprung

Lösung:

dotP([[-2],[2],[-5]], crossP([[6],[2],[3]], [[3],[2],[-0.45]]) / (norm([[6],[2],[3]])*norm([[3],[2],[-0.45]])))
ergibt 0.2830781628

Der Abstand von E zum Koordinatenursprung beträgt ca. **0.28 Einheiten**.

Teilaufgabe b)

ges. Punkte A und B auf g bzw. h_2 derart, dass Gerade durch A und B auf den Geraden g und h_2 senkrecht steht.

Lösung:

A und B sind Lotfußpunkte:
A∈g ist Lotfußpunkt von B∈h_2 und umgekehrt:
B∈h_2 ist Lotfußpunkt von A∈g.

Ansatz für A: [[-2],[2],[-5]] + λ*[[6],[2],[3]], Ansatz für B: [[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[2]]

Vektor AB: [[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[2]] - ([[-2],[2],[-5]] + λ*[[6],[2],[3]])

Orthogonalitätsbedingungen zu den Richtungsvektoren der Geraden g und h_2:

simplify(dotP([[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[2]] - ([[-2],[2],[-5]] + λ*[[6],[2],[3]]), [[6],[2],[3]])) = 0
ergibt -49*λ+28*μ+21=0

simplify(dotP([[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[2]] - ([[-2],[2],[-5]] + λ*[[6],[2],[3]]), [[3],[2],[2]])) = 0
ergibt -28*λ+17*μ+11=0

solve({-49*λ+28*μ+21=0,-28*λ+17*μ+11=0},{λ,μ}) ergibt {λ=1,μ=1}

Die Lotfußpunkte A und B werden mit λ=μ=1 erreicht:

[[-2],[2],[-5]] + 1*[[6],[2],[3]] = [[4],[4],[-2]], d.h. **A(4|4|-2)**

[[-1],[-1],[2]]+1*[[3],[2],[2]] = [[2],[1],[4]], d.h. **B(2|1|4)**

geg. Punkt T(4|4|-2)$\notin h_2$ und Abstandsfunktion f = f(μ) = ‖T-x(μ)‖
(Abstand eines beliebigen Punktes auf h_2 zu T)

ges. Minimalabstand

Lösung:

Minimalabstand wird erreicht, wenn Abstandvektor T-x(μ) orthogonal zum Richtungsvektor von h_2 ist, d.h.
dotP(T-x(μ), [[3],[2],[2]]) = 0

Hieraus folgt:

simplify(dotP([[4],[4],[-2]] - ([[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[2]]), [[6],[2],[3]])) = 0 ergibt -28*μ+28=0

Damit muss gelten: μ = 1.

Minimalabstand = ‖T - **x**(1)‖ = norm(T - **x**(1)) ≈ **7 Einheiten**.

norm([[4],[4],[-2]] - ([[-1],[-1],[2]] + 1*[[3],[2],[2]])) ergibt 7

analytische Lösung:

Define f(μ) = norm([[4],[4],[-2]] - ([[-1],[-1],[2]] + μ*[[3],[2],[2]]))
done

fMin(f(μ),μ) ergibt {MinValue=7,μ=1}

Interpretation: der Minimalabstand ist der senkrechte Abstand von T zu h_2 und entspricht in diesem Beispiel der Länge des zuvor berechneten Vektors AB.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Leistungskurs (LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik
==

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 1 (Block 2B, Analytische Geometrie):

geg. Punkt P(2|2|1),
Kugel K: norm(**x** - [[-4],[5],[7]]) = 15,
Ebenenschar E_a: [[-2],[1],[2]]▫**x** = a, a∈R

Teilaufgabe a)

ges. Nachweis, P innerhalb von K

Lösung:

mit **x** = [[2],[2],[1]] folgt

norm(**x** - [[-4],[5],[7]]) = norm([[2],[2],[1]] - [[-4],[5],[7]]) = norm([[6],[-3],[-6]]) = √(81) = 9 < 15.

Damit liegt P innerhalb von K.

ges. Sehnenlänge des Geradenstücks **x**(t) = t*[[2],[2],[1]], t∈R, (Ursprungsgerade durch P), innerhalb von K

Lösung:

Schnittpunkte mit K:

Ansatz: norm(**x**(t) - [[-4],[5],[7]]) = 15, d.h.

(norm(t*[[2],[2],[1]]-[[-4],[5],[7]])=15)^2 ergibt 9*(t^2 - 2*t + 10) = 225

solve(ans,t) ergibt {t=-3,t=5}

Schnittpunkte **x**(-3) und **x**(5).

Sehnenlänge ‖**x**(-3) - **x**(5)‖ = norm(**x**(-3) - **x**(5)), d.h.

norm(-3*[[2],[2],[1]] + 5*[[2],[2],[1]]) ergibt 24

Ergebnis: Die Sehnenlänge beträgt 24 Einheiten.

Teilaufgabe b)

ges. Einfluss von a auf Ebenenschar

Lösung: Absolutglied a hat Einfluss auf den Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung, jedoch keinen Einfluss auf die Neigung der Ebene (bestimmt durch den Normalenvektor)

ges. Parameter a derart, dass Ebenen E_a Tangentialebenen an K sind

Lösung:

Ansatz:

Abstand Kugelmittelpunkt M(-4|5|7) zu E_a ist 15, wenn E_a Tangentialebene ist.

Normalenvektor mit Länge 15 in M ansetztzen:

[[-2],[1],[2]]*15/norm([[-2],[1],[2]]) ergibt [[-10],[5],[10]]

[[-4],[5],[7]] - [[-10],[5],[10]] bzw. [[-4],[5],[7]] + [[-10],[5],[10]] ist damit Punkt einer Tangentialebene:

[[-4],[5],[7]] - [[-10],[5],[10]] ergibt [[6],[0],[-3]]
[[-4],[5],[7]] + [[-10],[5],[10]] ergibt [[-14],[10],[17]]

in E_a einsetzen:

dotP([[-2],[1],[2]],[[6],[0],[-3]]) ergibt -18
dotP([[-2],[1],[2]],[[-14],[10],[17]]) ergibt 72

Ergebnis:
für a = -18 lautet der Berührpunkt P_1(6|0|8)
für a = 72 lautet der Berührpunkt P_2(-14|10|17)

Teilaufgabe c)

ges. Schnittebenen E_a mit K und Schnittkreisen um M_1(-10|8|13) bzw. M_2(2|8|1), falls möglich.

Lösung:

falls M_1 bzw. M_2 Kreismittelpunkte in einer Ebene E_a sind, liegen diese auf einer Geraden durch M mit orthogonaler Richtung zu E_a (Normalenvektor ist Richtungsvektor dieser Geraden):

[[-4,5,7]]⇒M [[-10,8,13]]⇒M_1 [[2,8,1]]⇒M_2 [[-2,1,2]]⇒**n**

(M-M_1)/(-3) ergibt [[-2,1,2]]

d.h. M_1 liegt auf der betrachteten orthogonalen Richtung **n**.

$(M-M_2)/3$ ergibt [[-2,-1,2]]
d.h. M_2 liegt nicht auf der betrachteten orthogonalen Richtung **n**.

Schnittkreisradius R zum Schnittkreis mit Mittelpunkt M_1:

Satz des Pythagoras:

$R^2 + \|MM_1\|^2 = 15^2$ ergibt

R = (225 - (norm(M-M_1))^2)^(1/2) ergibt **R=12**

Ergebnis: der Schnittkreisradius des Schnittkreises um M_1 beträgt 12 Einheiten.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Leistungskurs (LK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik
==

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 2 (Block 2B, Stochastik):

geg. zufällige Generierung eine 8stelligen Passwortes (Zugang Hochschulnetzwerk)
mit folgendem Zeichenvorrat (64 mögliche Zeichen):
30 Buchstaben, 10 Ziffern, 24 Sonderzeichen
Passwort p = $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$ mit $a_k \in$Zeichenvorrat
(jedes a_k wird zufällig aus dem gesamten Zeichenvorrat gewählt)

Teilaufgabe a)

ges. Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1 := {p besteht aus unterschiedlichen Zeichen}
E_2 := {p enthält mindestens 2 Sonderzeichen}

Lösung:

Kombinatorik mit Bestimmung der Anzahlen aller Möglichkeiten und der günstigen Möglichkeiten:

$P(E_1)$ = nCr(64,8)*8! / 64^8 ≈ **0.6340**

Rechnung im GTR(CAS):

nCr(64,8)*8!/64^8 ergibt 0.6340278973

$P(E_2)$ = 1 - P({p enthält 0 Sonderzeichen}) - P({p enthält genau 1 Sonderzeichen})
= 1 - 40^8 / 64^8 - 40^7 * 24*8 / 64^8
≈ **0.8650**

Rechnung im GTR(CAS):

1-40^8/64^8-40^7*24*8/64^8 ergibt 0.8649582267

Teilaufgabe b)

geg. Erfahrungswert bei Passwörtern (durch Nutzer generiert):

nur q=10% der Zeichen in Passwörtern sind Sonderzeichen (q ... Sonderzeichenquote),
d.h. Sonderzeichenquote zu niedrig.

nächster Schritt: Admin empfiehlt per e-mail die stärkere Verwendung von Sonderzeichen mit dem Ziel, mindestens q=20% Sonderzeichen in Passwörtern zu erreichen.
(signifikante Erhöhung der Sonderzeichenquote q)

Nutzer nehmen Passwortänderungen vor oder auch nicht.

Nunmehr Stichprobe mit zufälliger Entnahme von n=4000 Zeichen aus vorhandenen Passwörtern zur Überprüfung der Erhöhung der Sonderzeichenquote (Wirkung der e-mail).

ges. Testverfahren mit möglichst großem Ablehnungereich K*
und (näherungsweiser) normalverteilter Testgröße T
für die Nullhypothese H_0: q=0.20 und einseitiger Alternative H_a: q<0.20
Signifikanzniveau α = 5% = 0.05

Lösung:

Sei S_n die zufällige Anzahl der Sonderzeichen in n = 4000 untersuchten Zeichen.
Unter H_0 ist S_n binomialverteilt mit n = 4000 und q = 0,20, d.h. B(n,q)-verteilt,

$T = (S_n - n*q) / \sqrt{(n*q*(1-q))}$ ist näherungsweise N(0,1)-verteilt.

Wegen der einseitigen Alternative ist $\mathbf{K^* = \{t \mid t < z_\alpha\}}$,
wobei z_α das α-Quantil der Prüfverteilung für T ist:

$P(T \le z_\alpha) = \alpha$, d.h. $\mathbf{z_\alpha}$ **= invNormCDf("L",α,1,0)**

ges. Testentscheidung für Sn=781

Lösung:

4000 ⇒n 0.2 ⇒q 781 ⇒S_n

(Sn-n*q)/(n*q*(1-q))^(1/2) ⇒T ergibt -0.7510409443

invNormCDf("L",0.05,1,0) ergibt -1.644853627

Wegen T = -0.75 > -1.64 ist $T \notin K^*$ und damit nicht kritisch, d.h. es ist keine wesentliche Unterscheitung der Sonderzeichenquote q festzustellen. Es besteht also kein Anlass daran zu zweifeln, dass die Sonderzeichenquote die Mindestquote 20% erreicht hat. Der Admin kann die Nullhypothese nicht ablehnen.