Hinweise für den Prüfling

Auswahl der Aufgaben

1. Wählen Sie **eine der Analysis-Aufgaben 1A oder 1B** aus.

2. Wählen Sie **einen der Aufgabenblöcke 2A oder 2B** aus.
   Beide Blöcke bestehen aus je einer Aufgabe zur Analytischen Geometrie und einer zur Stochastik.
   a. Block 2A hat den *Schwerpunkt Stochastik*
   b. Block 2B hat den *Schwerpunkt Geometrie*

Sie müssen insgesamt eine Analysis-Aufgabe und einen Aufgabenblock bearbeiten. Andere Kombinationen sind nicht zulässig.

Hilfsmittel

1. Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung
2. Zeichenmittel
3. Duden und Fremdwörterlexikon
4. Eingeführter Rechnertyp wie im Kopf der Aufgabe beschrieben (mit Handbuch)

Aufgabe 1A

In einem Nordseehafen wurden ab 0 Uhr über einen Zeitraum von 24 Stunden in einem 2-Stunden-Rhythmus die Wasserstände in Abweichung von Normalnull aufgezeichnet und in der Abbildung 1 grafisch dargestellt:

Zeit in h	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Abweichung in cm	130	55	-69	-137	-39	91	126	53	-73	-135	-48	93	128

a) Durch die Funktion g mit $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ soll der Zusammenhang zwischen dem Zeitpunkt und der Abweichung des Wasserstandes von Normalnull modelliert werden.
Die Modellierung wird durch die Funktion g mit $g(x) = 134 \cdot \sin(0{,}53 \cdot (x + 3)) - 3$ beschrieben.
Bewerten Sie die Werte der einzelnen Parameter a bis d auf der Grundlage der Tabelle.
Bestimmen Sie mithilfe der Funktion g die Wasserstände um 4 Uhr und 14 Uhr.
Erläutern Sie im Zusammenhang mit der Modellierung zwei mögliche Gründe für die Abweichung der Funktionswerte von den Messwerten zu diesen Zeitpunkten.

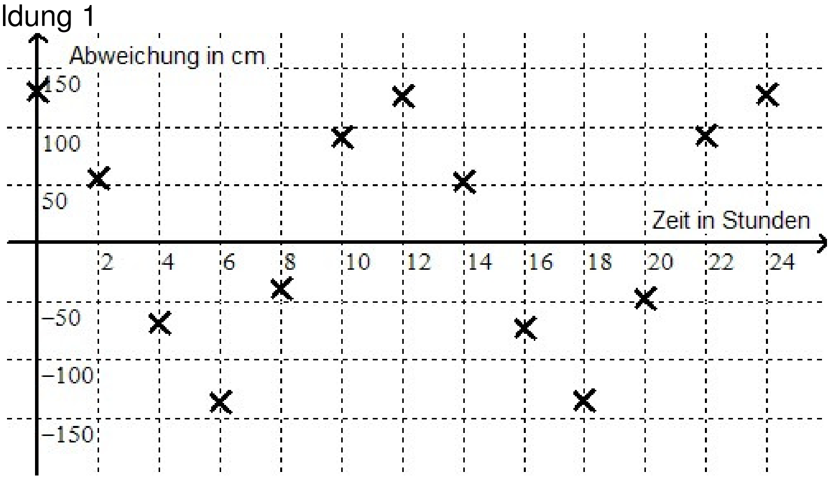
b) Berechnen Sie mithilfe der Funktion g für die nächsten 24 Stunden diejenigen Zeitpunkte,
1. zu denen die Abweichung des Wasserstandes von Normalnull null cm beträgt,
2. zu denen die Wasserstände minimal beziehungsweise maximal sind.

Dokumentieren Sie **zu 1.** einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz des CAS nachvollziehbar ist.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen zu der Funktion g und der x-Achse im Intervall [1;10] und dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg.
Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\int_1^u g(x)dx = 0$ mit 1 < u < 15 und interpretieren Sie die Lösungen bzgl. des Graphen von g.

d) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin(x + c) + d$ und der Punkt $P(3|2)$.
Untersuchen Sie, welche Bedingungen die Parameter c und d erfüllen müssen, so dass der Graph über dem Definitionsbereich IR punktsymmetrisch zum Punkt P ist.
Untersuchen Sie in der Funktion k mit $k(x) = \sin(2(x + c)) + d$ den Einfluss des Faktors 2 auf die Werte der Parameter c und d hinsichtlich der Punktsymmetrie zum Punkt P.

Material Abbildung 1



Aufgabe 1B

Gegeben ist die Funktionenschar f_k durch $f_k(x) = k \cdot x + \sin(x)$ mit $0 \leq k \leq 2$ und $0 \leq x \leq 2\pi$.
Für k = 0,5 ist der Graph der Funktion $f_{0,5}$ in der Anlage zu sehen.

a) Untersuchen Sie für die Parameterwerte 0,5 und 1 die Graphen der Funktionen $f_{0,5}$ und f_1 auf Extrempunkte.
Klassifizieren Sie für $0 \leq k \leq 2$ die Graphen der Schar nach der Anzahl ihrer Extrempunkte.
Skizzieren Sie in das vorgelegte Koordinatensystem zwei weitere charakteristische Graphen der Schar. Begründen Sie die Auswahl.

b) Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}8x + 0{,}4$ begrenzt mit dem Graphen von $f_{0,5}$ zwei abgeschlossene Flächenstücke.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das vorgelegte Diagramm und schraffieren Sie die beiden Flächenstücke.
Erläutern Sie an diesem konkreten Beispiel ein Verfahren zur Bestimmung des Inhaltes von Flächen, die von zwei Graphen begrenzt werden.
Bestimmen Sie den Inhalt der Gesamtfläche.

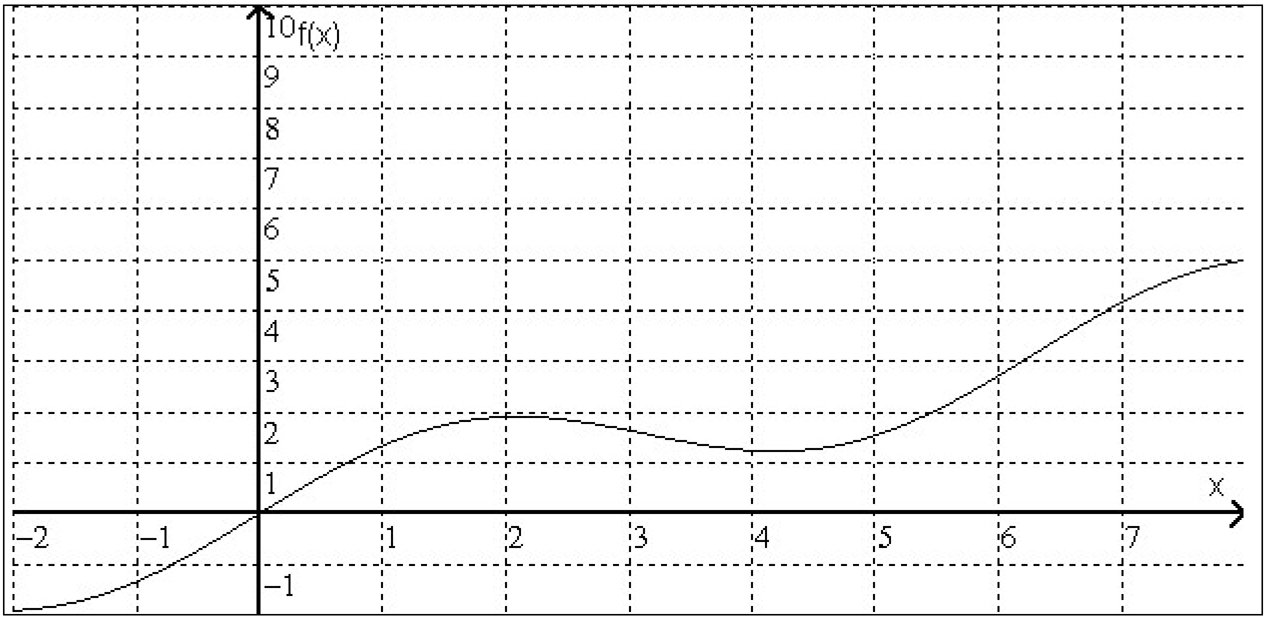
c) Für k = 0,5 soll der Graph von $f_{0,5}$ für $0 \leq x \leq 2\pi$ durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion h mit dem Grad 3 angenähert werden. Die Funktionswerte von $f_{0,5}$ und h an den Randstellen 0 und 2π sollen übereinstimmen. Außerdem sollen beide Graphen an den Stellen $\frac{2}{3}\pi$ und $\frac{4}{3}\pi$ dieselbe Steigung besitzen.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von h.
Die Näherung soll in diesem Falle akzeptabel sein, wenn der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Näherungsfunktion und der x–Achse im betrachteten Intervall um höchstens 5% vom Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f_{0,5}$ und der x-Achse abweicht.
Entscheiden Sie, ob die Funktion h damit eine akzeptable Näherung darstellt.

d) Die Tangente an den Graphen der Funktion f_k an der Stelle π wird mit t_k bezeichnet.
Weisen Sie nach, dass sich alle Geraden t_k in einem Punkt schneiden. Veranschaulichen Sie das Problem anhand einer Skizze. (Dazu können Sie das vorhandene Koordinatensystem nutzen.)

Fortsetzung Aufgabe 1B

Material

Anlage: Graph zu $f_{0,5}$ mit $f_{0,5}(x) = 0{,}5 \cdot x + \sin(x)$



Block 2A – Aufgabe 1

a) In einer Urne befinden sich 1000 Kugeln, die rot bzw. blau sind.
Eine Probenentnahme besteht daraus, dass 10 Kugeln (mit einem Griff) gezogen werden. Dabei ist k die Anzahl der roten Kugeln in der Stichprobe. Dann werden für die nächste Probenentnahme die 10 Kugeln wieder zu den anderen gegeben und vermischt.
Die Ziehung wurde zwölfmal durchgeführt; dies führte zu folgender Tabelle:

k (Anzahl der roten Kugeln)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Probenentnahmen mit k roten Kugeln	0	0	2	4	3	1	2	0	0	0	0

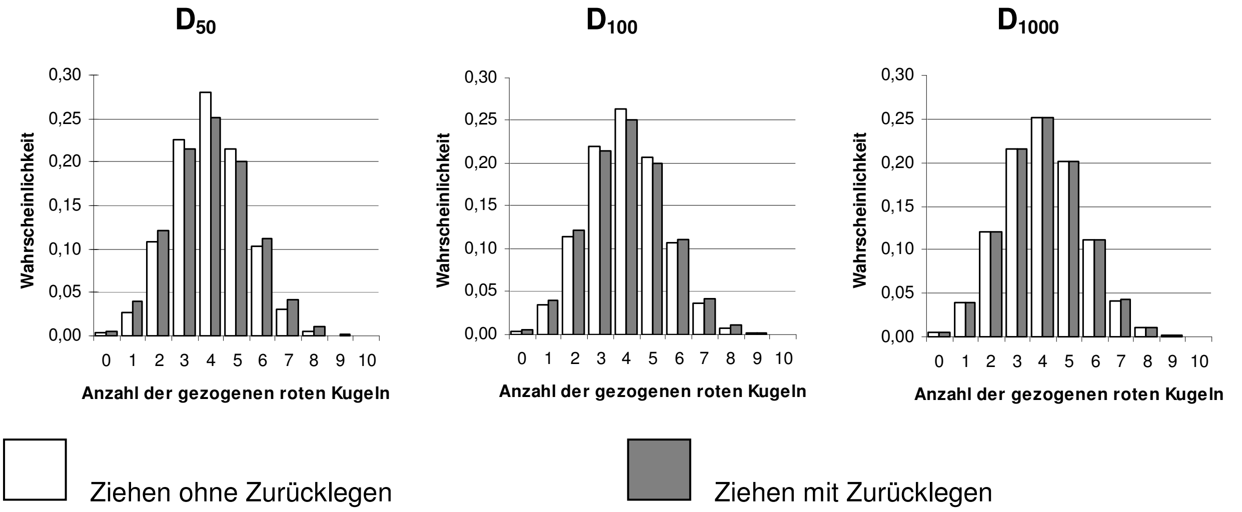
Bestimmen Sie die mittlere Anzahl der erhaltenen roten Kugeln und die Standardabweichung (Streuung).
Geben Sie eine begründete Prognose für die Anzahl der roten Kugeln in der Urne an.

b) In einer Urne U_{50} befinden sich 20 rote und 30 blaue Kugeln. Es werden 10 Kugeln nacheinander gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass
(i) genau 4 rote Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen entnommen werden.
(ii) mindestens 2 rote Kugeln beim Ziehen mit Zurücklegen entnommen werden.
(iii) genau 4 rote Kugeln beim Ziehen ohne Zurücklegen entnommen werden.

c) Zusätzlich zu der Urne U_{50} sind zwei Urnen U_{100} (40 rote und 60 blaue Kugeln) und U_{1000} (400 rote und 600 blaue Kugeln) vorhanden. Es wird wieder jeweils das Ziehen von 10 Kugeln nacheinander betrachtet. In den Diagrammen D_{50}, D_{100}, und D_{1000} (siehe unten) sind die Wahrscheinlichkeiten dafür dargestellt, dass 0 bis 10 rote Kugeln gezogen werden.

- Begründen Sie, dass folgende Aussage wahr ist: *„Die Wahrscheinlichkeiten, beim Ziehen mit Zurücklegen k rote Kugeln zu erhalten, hängen für gleiche Werte von k nicht davon ab, aus welcher Urne man zieht."*
- Beschreiben Sie anhand der Diagramme, wie sich die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen ohne Zurücklegen mit steigender Kugelzahl in der Urne verändert.
- Erläutern Sie die folgende Aussage ohne weitere Berechnungen: *„Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen von 10 Kugeln ohne Zurücklegen genau 4 rote Kugeln zu erhalten, wird mit zunehmender Anzahl der Kugeln in der Urne kleiner."*

Material



Block 2A – Aufgabe 2

Die vier Punkte A(–1I–3I–2), B(7I9I–8), C(17I23I13) und D(5I5I22) liegen in der Ebene E mit

der Gleichung $\begin{pmatrix} 84 \\ -57 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 91.$

a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.
Entscheiden Sie, ob das Trapez symmetrisch ist.

b) Eine Geradenschar g_k hat die Darstellung

$$g_k: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 28 \\ k \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in IR.$$

Untersuchen Sie allgemein in Abhängigkeit von k die Lagebeziehung zwischen der Ebene E und den Geraden der Schar g_k
Berechnen Sie für den Fall, dass sich eine Gerade der Schar und die Ebene E schneiden, die Koordinaten des Schnittpunktes.

Block 2B – Aufgabe 1

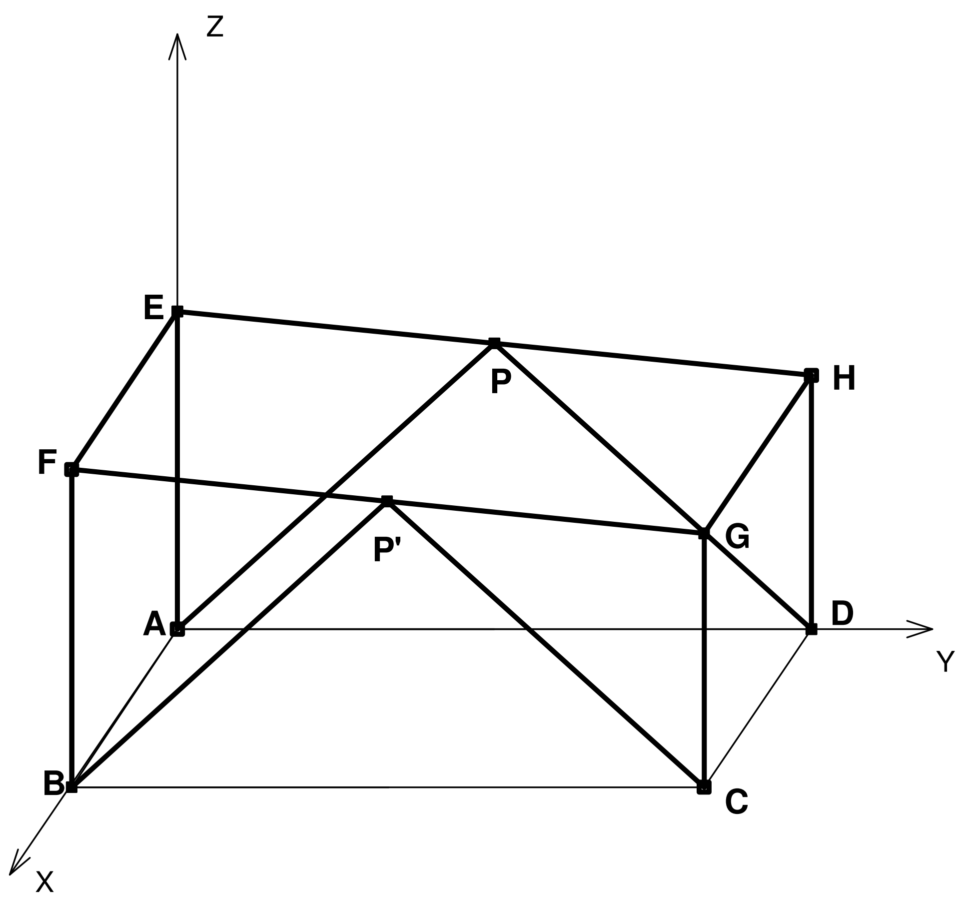
Eine Familie plant einen Carport aus Balken aufzubauen. Eine Planskizze ist in der Anlage zu sehen. An der Einfahrt soll er 2,5 m hoch sein, die Rückwand ist mit 2 m Höhe geplant. Die Breite soll 2 m und die Länge 5 m betragen. So haben die Punkte E und C die Koordinaten E(0|0|2,5) und C(2|5|0).

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte des Carports.
Die Punkte P und P´ halbieren die Strecken $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Punkte.
Bestimmen Sie die Längen der Balken $\overline{EH}$, $\overline{AP}$ und $\overline{PD}$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, in der die Dachfläche liegt, in Koordinatenform.

b) Am Punkt L(1|0|3) oberhalb des Carports befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.
Bestimmen Sie die vier Eckpunkte des Dachschattens in der xy - Ebene.
Entscheiden Sie, welche geometrische Form der Dachschatten hat.

c) Ein Punkt Q liegt so auf der Strecke $\overline{EH}$, dass die Gesamtlänge der beiden Balken $\overline{AQ}$ und $\overline{QD}$ minimal wird.
Bestimmen Sie die minimale Gesamtlänge dieser beiden Holzbalken.

Material
Anlage: Planskizze



Block 2B – Aufgabe 2

a) Für ein Glücksspiel simuliert ein Computerprogramm den Wurf einer idealen Münze.
Die Spielregeln:
- Der Einsatz für ein Spiel beträgt 2 €.
- Das Spiel endet, wenn „Zahl“ oben liegt.
- Liegt „Wappen“ oben, wird das Spiel fortgesetzt.
- Es werden höchstens 4 Münzwürfe simuliert.

Die Auszahlung beträgt bei

„Zahl“ im ersten Wurf	1 €	„Trostpreis“
„Zahl“ im zweiten Wurf	2 €	Einsatz zurück
„Zahl“ im dritten Wurf	3 €	Gewinn
„Zahl“ im vierten Wurf	4 €	Hauptgewinn
„Zahl“ tritt nicht auf	0 €	

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für eine Auszahlung von 0 €; 1 €; 2 €; 3 € und 4 €.
Beurteilen Sie, ob es sich um ein faires Spiel handelt.

b) Das Computerprogramm kann auch so eingestellt werden, dass es eine manipulierte Münze simuliert, bei der Wappen mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$ auftritt.
Es werden jeweils die Ergebnisse von 100 Münzwürfen notiert. Sie sollen anhand der Anzahl von geworfenen Wappen entscheiden, ob gerade die ideale oder die manipulierte Münze simuliert wurde.
Bestimmen Sie für das durch $\alpha = 5\%$ gegebene Signifikanzniveau den Ablehnungsbereich und die Wahrscheinlichkeiten der auftretenden Fehler für die Hypothese, dass eine manipulierte Münze simuliert wurde.
Erläutern Sie an diesem Beispiel die Begriffe Fehler 1. und 2. Art.

Block 2B - Fortsetzung Aufgabe 2

Material

1. Binomialverteilung für n=100, p=0,4

k	$P(X=k)$	$P(X \le k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000
12	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000
16	0,0000	0,0000
17	0,0000	0,0000
18	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000
21	0,0000	0,0000
22	0,0001	0,0001
23	0,0001	0,0003
24	0,0003	0,0006

k	$P(X=k)$	$P(X \le k)$
25	0,0006	0,0012
26	0,0012	0,0024
27	0,0022	0,0046
28	0,0038	0,0084
29	0,0063	0,0148
30	0,0100	0,0248
31	0,0151	0,0398
32	0,0217	0,0615
33	0,0297	0,0913
34	0,0391	0,1303
35	0,0491	0,1795
36	0,0591	0,2386
37	0,0682	0,3068
38	0,0754	0,3822
39	0,0799	0,4621
40	0,0812	0,5433
41	0,0792	0,6225
42	0,0742	0,6967
43	0,0667	0,7635
44	0,0576	0,8211
45	0,0478	0,8689
46	0,0381	0,9070
47	0,0292	0,9362
48	0,0215	0,9577
49	0,0152	0,9729

k	$P(X=k)$	$P(X \le k)$
50	0,0103	0,9832
51	0,0068	0,9900
52	0,0042	0,9942
53	0,0026	0,9968
54	0,0015	0,9983
55	0,0008	0,9991
56	0,0004	0,9996
57	0,0002	0,9998
58	0,0001	0,9999
59	0,0001	1,0000
60	0,0000	1,0000
61	0,0000	1,0000
62	0,0000	1,0000
63	0,0000	1,0000
64	0,0000	1,0000
65	0,0000	1,0000
66	0,0000	1,0000
67	0,0000	1,0000
68	0,0000	1,0000
69	0,0000	1,0000
70	0,0000	1,0000
71	0,0000	1,0000
72	0,0000	1,0000
73	0,0000	1,0000
Die weiteren Werte sind 0 bzw. 1.		

2. Binomialverteilung für n=100, p=0,5

k	$P(X=k)$	$P(X \le k)$
0	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000
3	0,0000	0,0000
4	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0000
6	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000
8	0,0000	0,0000
9	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000
11	0,0000	0,0000
12	0,0000	0,0000
13	0,0000	0,0000
14	0,0000	0,0000
15	0,0000	0,0000
16	0,0000	0,0000
17	0,0000	0,0000
18	0,0000	0,0000
19	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000
21	0,0000	0,0000
22	0,0000	0,0000
23	0,0000	0,0000
24	0,0000	0,0000

k	$P(X=k)$	$P(X \le k)$
25	0,0000	0,0000
26	0,0000	0,0000
27	0,0000	0,0000
28	0,0000	0,0000
29	0,0000	0,0000
30	0,0000	0,0000
31	0,0001	0,0001
32	0,0001	0,0002
33	0,0002	0,0004
34	0,0005	0,0009
35	0,0009	0,0018
36	0,0016	0,0033
37	0,0027	0,0060
38	0,0045	0,0105
39	0,0071	0,0176
40	0,0108	0,0284
41	0,0159	0,0443
42	0,0223	0,0666
43	0,0301	0,0967
44	0,0390	0,1356
45	0,0485	0,1841
46	0,0580	0,2421
47	0,0666	0,3086
48	0,0735	0,3822
49	0,0780	0,4602

k	$P(X=k)$	$P(X \le k)$
50	0,0796	0,5398
51	0,0780	0,6178
52	0,0735	0,6914
53	0,0666	0,7579
54	0,0580	0,8159
55	0,0485	0,8644
56	0,0390	0,9033
57	0,0301	0,9334
58	0,0223	0,9557
59	0,0159	0,9716
60	0,0108	0,9824
61	0,0071	0,9895
62	0,0045	0,9940
63	0,0027	0,9967
64	0,0016	0,9982
65	0,0009	0,9991
66	0,0005	0,9996
67	0,0002	0,9998
68	0,0001	0,9999
69	0,0001	1,0000
70	0,0000	1,0000
71	0,0000	1,0000
72	0,0000	1,0000
73	0,0000	1,0000
Die weiteren Werte sind 0 bzw. 1.		

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 1: Analysis
================================

Wahlaufgaben 1A, 1B

Aufgabe 1A (Analysis):

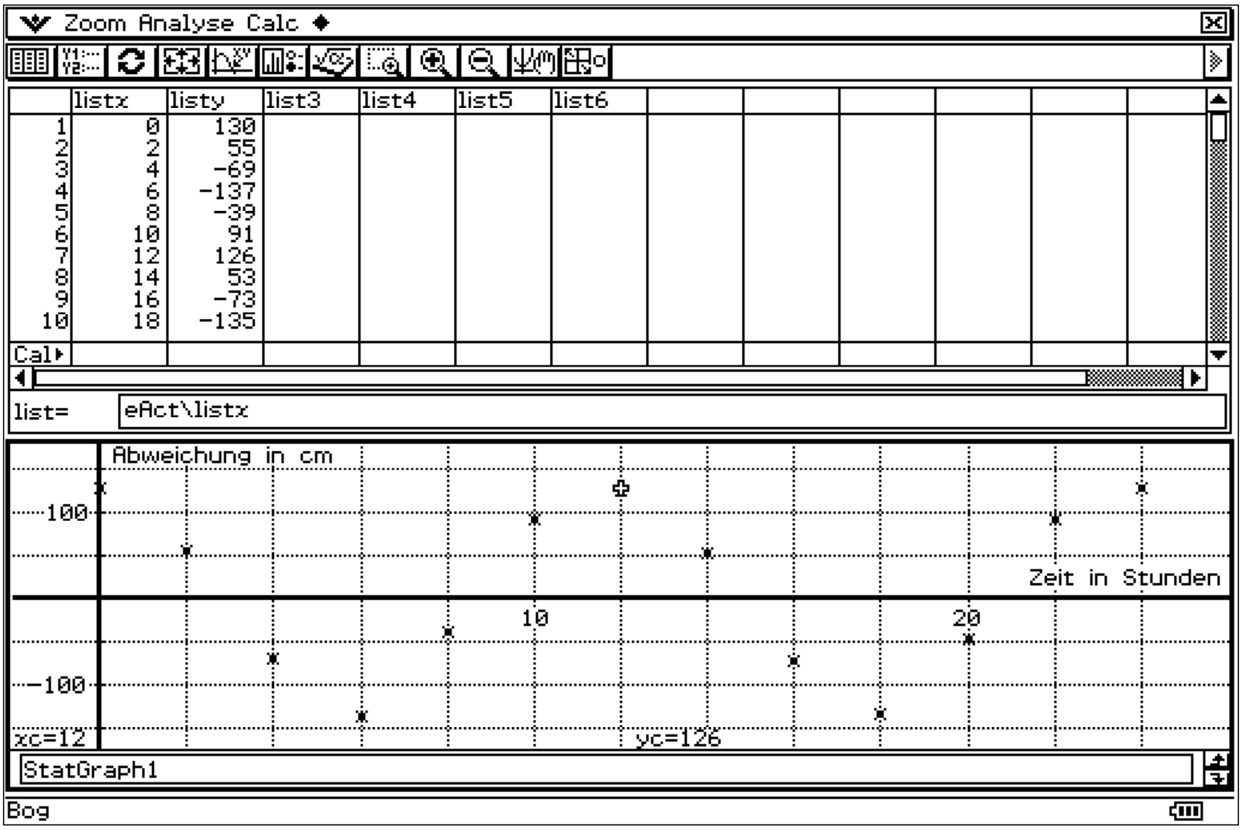
geg. Datenerfassung (Wasserstände über bzw. unter Normalnull im 2-h-Rhythmus)

Zeit (in h)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Abweichung (in cm)	130	55	-69	-137	-39	91	126	53	-73	-135	-48	93	128

seq(x,x,0,24,2) $\Rightarrow$ listx ergibt {0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24}

{130,55,-69,-137,-39,91,126,53,-73,-135,-48,93,128} $\Rightarrow$ listy

Punkteplot der Datenpaare (x_k,y_k):



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

Teilaufgabe a)

geg. Modellierung einer Funktion g: **g(x) = a*sin(b*(x+c))+d** (sin-Regression)
zum vermuteten Zusammenhang zwischen den erfassten Abweichungen y_k (Messwerte) und den entsprechenden Zeitpunkten x_k (Messstellen), k = 1, 2, ..., 13.
(Es liegen 13 Datenpaare vor)
konkret: **y = g(x) = 134 * sin(0,53 * (x+3)) - 3**

Kontrolle im GTR(CAS): sin-Regression mit 12 Tageswerten von 0 bis 22 Uhr

subList(listx,1,12)⇒listxx ergibt {0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22}
subList(listy,1,12)⇒listyy ergibt {130,55,-69,-137,-39,91,126,53,-73,-135,-48,93}

SinReg listxx, listyy, y1, On
done

y1(x) ergibt 132.5816905 * sin(0.5253962684*x + 1.692204725) + 3.475872615

sum(residual^2) ergibt 484.6926939 entspricht sum((listyy-y1(listxx))^2)

Define y2(x)=134*sin(0.53*(x+3))-3
done

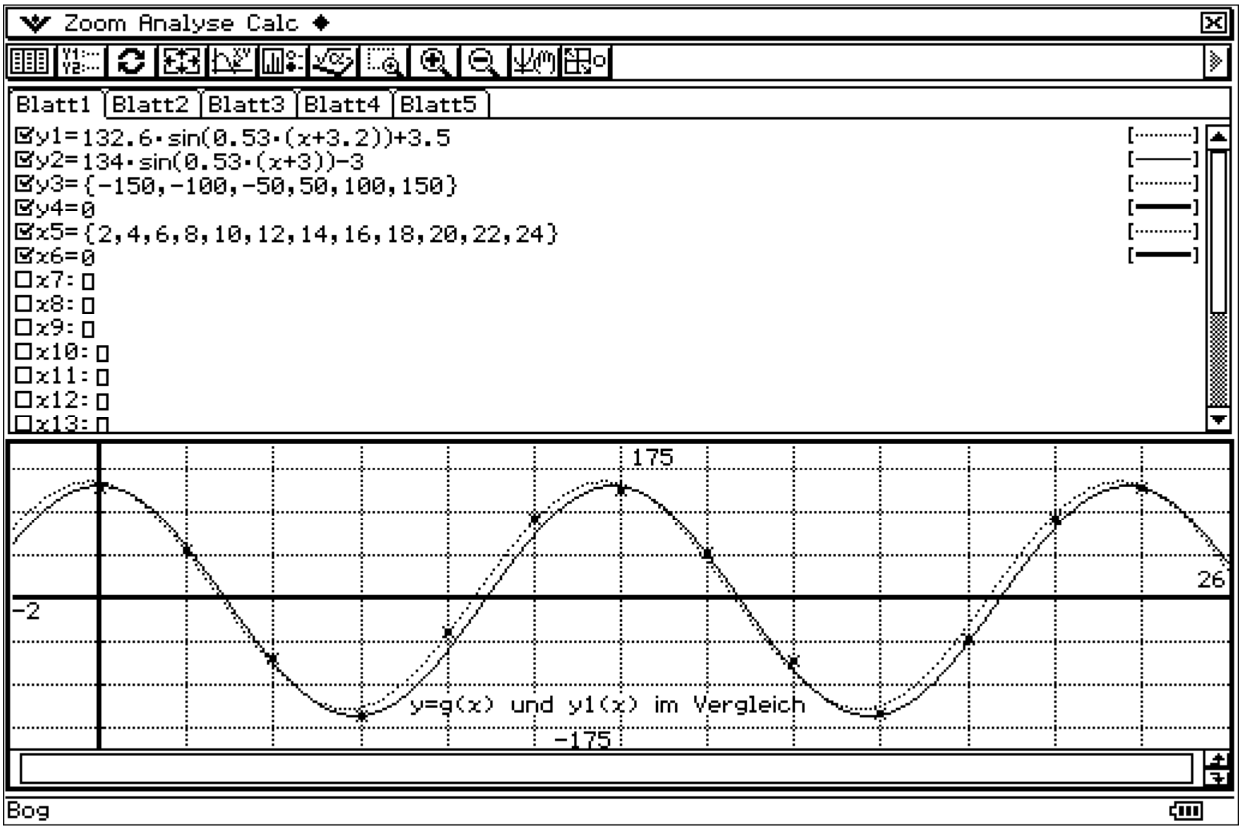
sum((listyy-y2(listxx))^2) ergibt 1172.423526

1.692204725/0.5261224376 ergibt 3.216370571

Die Kontrollrechnung zeigt, dass die gegebene Funktion
y = g(x) = 134*sin(0,53*(x+3))-3

etwas verschoben ist im Vergleich zur sin-Regressionsfunktion
y1(x) = 132,6*sin(0,53*(x+3,2))+3,5

y = g(x) und y = y1(x) im Vergleich:



ges. Bewertung der Parameter a, b, c und d anhand der Datentabelle

Lösung:

Parameter a=134:
Amplitude der sin-Schwingung, in der Tabelle liegen
die Maxima bei 130, 126 und 128 (im Mittel bei 128) und
die Minima bei -137 und -135 (im Mittel bei -136).
Es ergibt sich eine mittlere Amplitude von ±132-4.
Unter Beachtung einer senkrechten Verschiebung um -4 (Parameter d)
würden die Extrema von ±132 auf 128 und -136 verschoben.
Der Parameter a=132 wäre im Mittel gesehen etwas günstiger.

Parameter d=-3:
Verschiebung der sin-Schwingung nach unten (Richtung negative y-Achse)
Ausgehend von der mittleren Amplitude 132 wäre aus Sicht der Extrema
eine Verschiebung um -4 etwas günstiger.

Parameter b=0,53:
Anpassung der Periodenlänge T=2π an die Periodenlänge T=12:
ω=2π/T=2π/12 ergibt 0,52, was etwa dem Parameter b entspricht.

2*π/12 ergibt 0.5235987756

Parameter c=3:
Verschiebung um c = 3 = T/4 nach links
(b*c etwa π/2 bzw. c=3=T/4 ist eine viertel Periode von T=12)
Damit beginnt die Schwingung zum Zeitpunkt 0 im Hochpunkt.

ges. g(4) und g(14) und Interpretation
der Unterschiede zum tabellierten Wert (zwei mögliche Ursachen erläutern)

Lösung:

Define g(x)=y2(x)
done

g(x) ergibt 134*sin(0.53*(x+3))-3
g(4) ergibt -75.13092811
g(14) ergibt 51.00022165

x= 4: gemessener Wert: -69, modellierter Wert: -75
x=14: gemessener Wert: 53, modellierter Wert: 51

mögliche Ursachen für die Unterschiede:

1. Modellanpassung ist nicht optimal (bessere Parameteranpassung oder g(x) könnte besser eine Überlagerung unterschiedlicher trigonometrischer Funktionen sein: Fourieranalyse)
2. statistische Datenerhebung ist mit (zufälligen) Fehlern behaftet: Messfehler in der Datenerfassung, die zu den festgestellten Unterschieden zur Modellfunktion führen könnten. Bereits die Rundung erfasster Daten kann zu Messfehlern führen.

Teilaufgabe b)

geg. Modellfunktion g(x)=134*sin(0.53*(x+3))-3, 24≤x≤48,

ges. Zeitpunkte für die kommenden 24 Stunden (nach der Datenerfassung) mit
- Abweichung 0 (auf Normalnull) (einen Lösungsweg ohne GTR angeben)
- extremale Abweichungen (nach unten: Minima, nach oben Maxima)

Lösung:

Nullstellen von g(x):

solve(g(x)=0,x,24,24,36) ergibt {x=26.59542139,x=32.607445}
solve(g(x)=0,x,36,36,48) ergibt {x=38.45048801,x=44.46251162}

Es gibt vier Nullstellen:
$x_{n1} \approx 26.6$, $x_{n2} \approx 32.6$, $x_{n3} \approx 38.5$ und $x_{n4} \approx 44.5$

Umrechnung der Dezimalzahlen in Stunden und Minuten (und Sekunden):

toDMS(26.59542139) ergibt dms(26,35,43.517004)
toDMS(32.607445) ergibt dms(32,36,26.802)
toDMS(38.45048801) ergibt dms(38,27,1.756836)
toDMS(44.46251162) ergibt dms(44,27,45.041832)

Es handelt sich damit am Folgetag um die Uhrzeiten:
2:36Uhr, 8:36Uhr, 14:27Uhr und 20:28Uhr

Rechnung per Hand (mittels arcsin-Funktion)**:**

134*sin(0.53*(x+3))-3 = 0 ergibt sin(0.53*(x+3)) = 3/134

Im Hauptargumentbereich der sin-Funktion (-π/2 bis π/2) hat man die Umkehrfunktion:
0.53*(x+3) = arcsin(3/134) ∈ [-π/2,π/2]
Hieraus ergeben sich unter Beachtung der weiteren Kurvenanteile der sin-Funktion die anderen Lösungen wie folgt:

0.53*(x+3) = arcsin(3/134) und
0.53*(x+3) = π-arcsin(3/134) für die erste Periode.

Notwendige Rechnung im GTR:

$\sin^{-1}$(3/134) ergibt 0.02238993037
π-$\sin^{-1}$(3/134) ergibt 3.119202723

Hieraus für die k-te Periode:
0.53*(x+3) = arcsin(3/134)+k*2π = k*2π + arcsin(3/134)
0.53*(x+3) = π-arcsin(3/134)+k*2π = (2k+1)*π - arcsin(3/134)

nach x umgestellt:

x = (k*2*π + arcsin(3/134)) / 0.53 – 3 und x = ((2*k+1)*π-arcsin(3/134)) / 0.53 – 3,

k∈N derart, dass die x-Werte im Intervall [24, 48] liegen.

Kontrolle im GTR:

x=(5*π-sin⁻¹(3/134))/0.53-3	ergibt	x=26.59542139
x=(6*π+sin⁻¹(3/134))/0.53-3	ergibt	x=32.607445
x=(7*π-sin⁻¹(3/134))/0.53-3	ergibt	x=38.45048801
x=(8*π+sin⁻¹(3/134))/0.53-3	ergibt	x=44.46251162

Extremstellen:

fMin(g(x),x,24,36)	ergibt	{MinValue=-137,x=29.6014332}
fMax(g(x),x,24,36)	ergibt	{MaxValue=131,x=35.52896651}
fMin(g(x),x,36,48)	ergibt	{MinValue=-137,x=41.45649981}
fMax(g(x),x,36,48)	ergibt	{MaxValue=131,x=47.38403312}

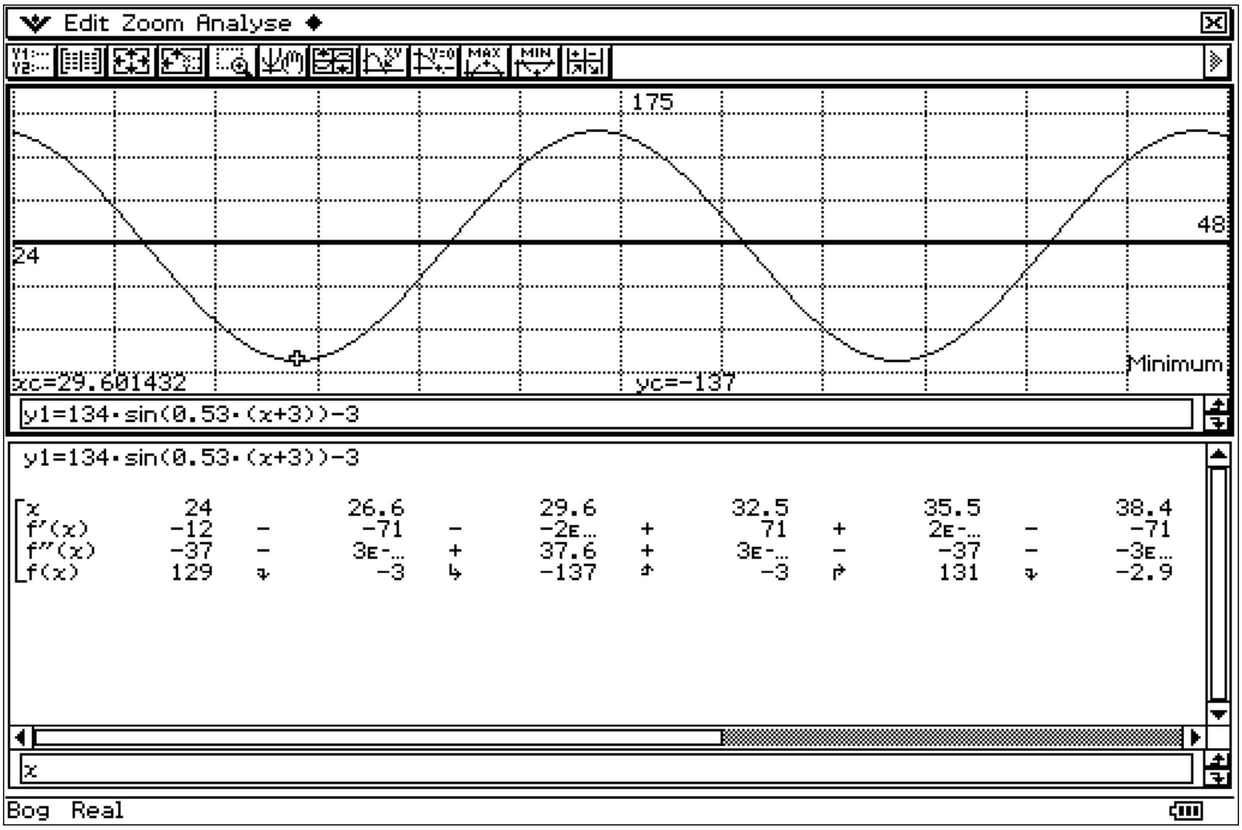
Umrechnung der Dezimalzahlen in Stunden und Minuten (und Sekunden):

toDMS(29.6014332)	ergibt	dms(29,36,5.15952)
toDMS(35.52896651)	ergibt	dms(35,31,44.279436)
toDMS(41.45649981)	ergibt	dms(41,27,23.399316)
toDMS(47.38403312)	ergibt	dms(47,23,2.519232)

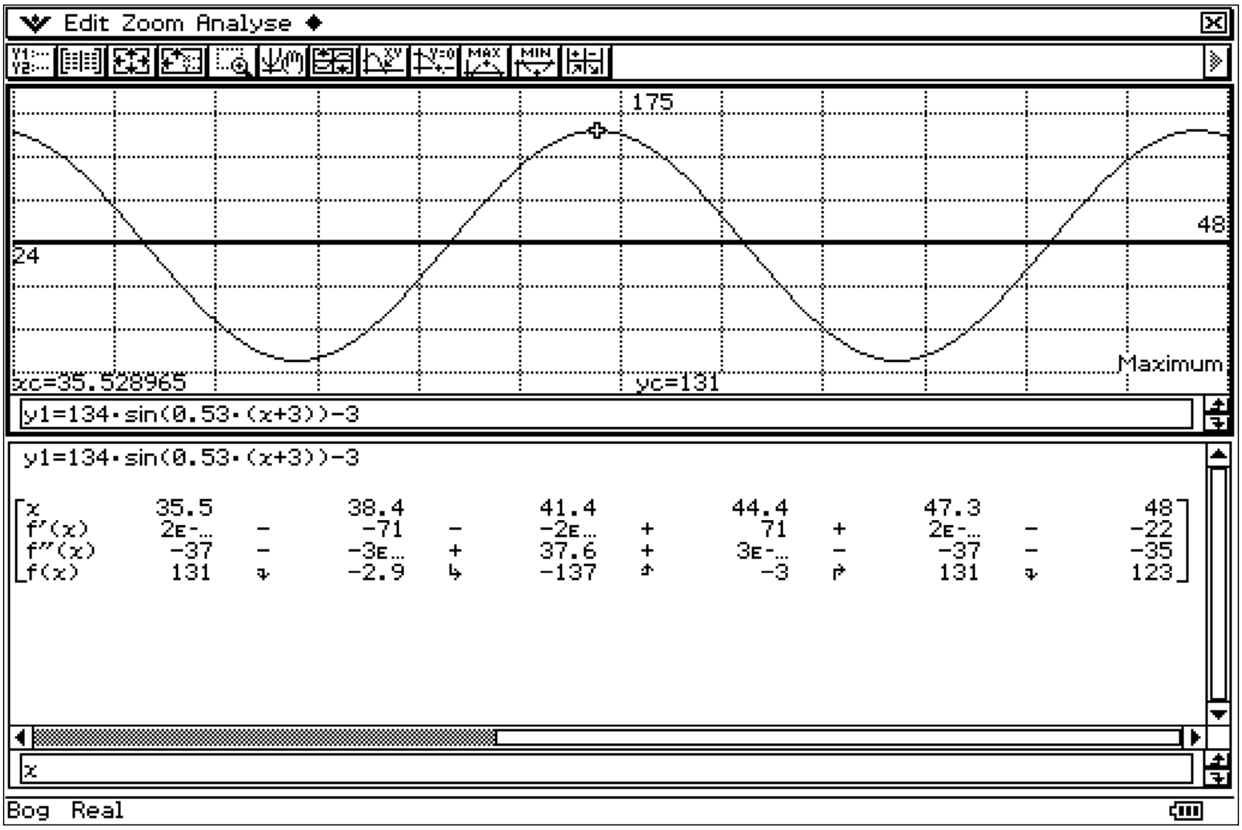
Es handelt sich damit am Folgetag um die Uhrzeiten:
Min: 5:36Uhr, Max: 11:32Uhr, Min: 17:27Uhr und Max: 23:23Uhr

Alternativer Lösungsweg zum Auffinden der Extrema:
graphische Darstellung mit zusammenfassender Ergebnistabelle

graphische Auswertung der Extrema



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS



Die zusammenfassende Tabelle enthält neben Informationen an den Intervallendpunkten (hier 24 bis 48) Angaben zu den Extremstellen (f'(x)=0) und Wendestellen (f''(x)=0) sowie Hinweise auf das Monotonieverhalten zwischen den Nullstellen der 1. bzw. 2. Ableitung.

Weitere Möglichkeit zum Auffinden der Extrema ist denkbar:
analytische Auswertung der Nullstellengleichung g'(x)=0 (notwendige Bedingung für Extrem-stellen) im Intervall von 24 bis 48:

Define g(x)=134*sin(0.53*(x+3))-3
done
Define g1(x)=diff(g(x),x)
done

g1(x) ergibt 71.02*cos(0.53*(x+3))

solve(g1(x)=0,x,24,24,48) ergibt
{x=29.6014332, x=35.52896651, x=41.45649981, x=47.38403312}

Damit gibt es vier extremwertverdächtige Stellen.

Hinreichende Bedingung:

Define g2(x)=diff(g(x),x,2)
done

signum(g2(x)|x=29.6014332)	ergibt	1
signum(g2(x)|x=35.52896651)	ergibt	-1
signum(g2(x)|x=41.45649981)	ergibt	1
signum(g2(x)|x=47.38403312)	ergibt	-1

signum +1 bedeutet Minimumstelle (konvexer Kurvenverlauf)
signum -1 bedeutet Maximumstelle (konkaver Kurvenverlauf)

Teilaufgabe c)

ges. Flächeninhalt ∫(|g(x)|,x,1,10), Interpretation des Ergebnisses

Lösung:

Nullstellen des Integranden:

Define g(x)=134*sin(0.53*(x+3))-3
done

solve(g(x)=0,x,1,1,10) ergibt {x=2.885288157,x=8.897311769}

2.885288157 ⇒ x_{n1} 8.897311769 ⇒ x_{n2}

Beachtung positiver und negativer Flächenanteile:

∫(abs(g(x)),x,1,10) = ∫(g(x),x,1,x_{n1}) + ∫(-g(x),x,x_{n1},x_{n2}) + ∫(g(x),x,x_{n2},10)
ergibt

Rechnung im GTR(CAS):

∫(g(x),x,1,x_{n1}) + ∫(-g(x),x,x_{n1},x_{n2}) + ∫(g(x),x,x_{n2},10) ergibt 680.4679244

Der Flächeninhalt beträgt 680,5 Flächeneinheiten.

geg. Gleichung ∫(g(x),x,1,u) = 0 mit $1<u<15$

ges. Auffinden und Interpretation der Näherungslösungen der gegebenen Gleichung.

Lösung:

Berechnung der Näherungslösungen:

solve(∫(g(x),x,1,u)=0,u,1,1,15) ergibt {u=1,u=4.754833251,u=13.1958121}

Im offenen Intervall (1;15) gibt es zwei Lösungen:
u_1 = 4.754833251 ≈ **4.7548** und u_2 = 13.1958121 ≈ **13.1958**

Interpretation:

u_1 = 4,7548 bedeutet:
Ein positiver und ein negativer Flächenanteil heben sich auf.
g(x) hat eine Nullstelle im Integrationsintervall.

u_2 = 13,1958 bedeutet:
Zwei positive und ein negativer Flächenanteil heben sich auf.
g(x) hat zwei Nullstellen im Integrationsintervall.

Teilaufgabe d)

geg. f(x) = sin(x+c)+d und Punkt P(3|2)

ges. Bedingung an c und d derart, dass f punktsymmetrisch zu P
im gesamten Definitionsbereich R ist.

Lösung:

y = sin(x) ist punktsymmetrisch zu O(0|0), d.h. ungerade Funktion.
y = sin(x-3) ist punktsymmetrisch zu Q(3|0) (Verschiebung nach rechts)
y = sin(x-3)+2 ist punktsymmetrisch zu P(3|2) (Verschiebung nach oben)

Antwort: c = -3 und d = 2.

geg. k(x) = sin(2*(x+c)) + d
ges. Einfluss des Faktors 2 auf die Parameter c und d
im Zusammenhang mit der Punktsymmetrie zu P

Lösung:

Der Faktor 2 verändert die Periodizität T=2π in T=π und ist ansonsten ohne Einfluss auf die Verschiebung im Argumentbereich x und Wertebereich y.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

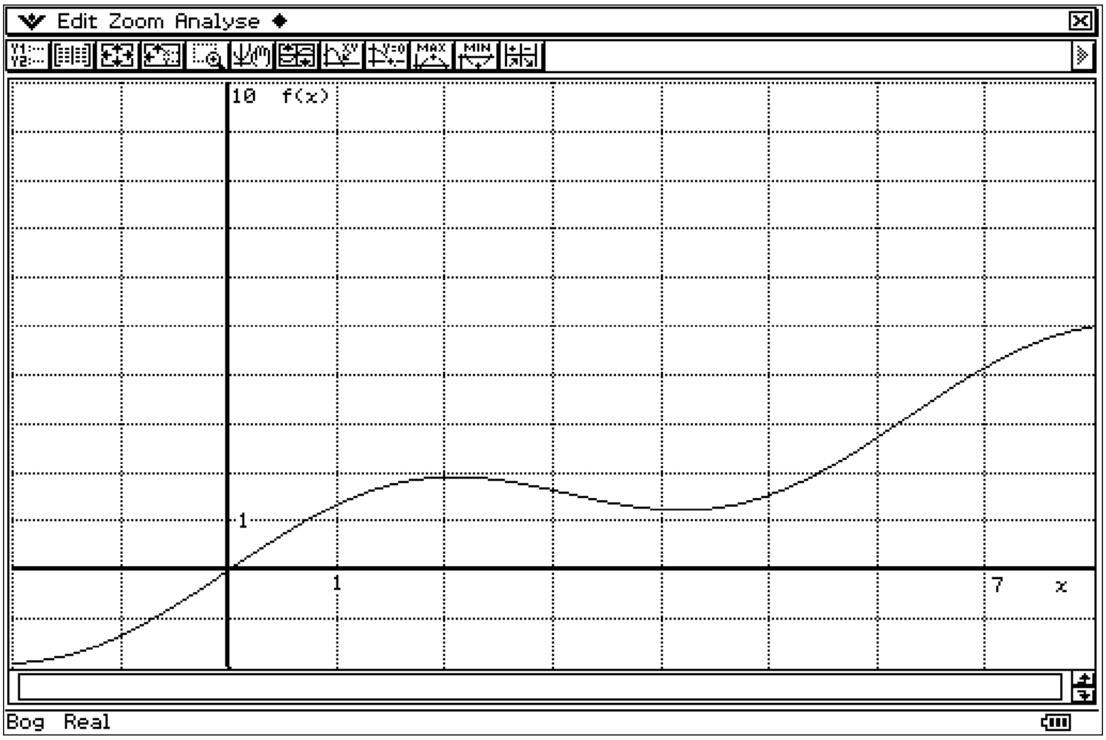
Pflichtaufgabenteil 1: Analysis
===============================

Wahlaufgaben 1A, 1B

Aufgabe 1B (Analysis):

geg. Funktionenschar f_k mit f_k (x) = k*x + sin(x), 0 ≤ k ≤ 2, 0 ≤ x ≤ 2π.

Graph für f_k mit k=1/2



Teilaufgabe a)

ges. analytische Berechnung der Extrempunkte für f_k mit k=1/2 und k=1

Lösung:

Fall k=1/2:

1/2 ⇒k
Define f(x) = k*x+sin(x)
done

Define f1(x)=diff(f(x),x)
done

Define f2(x)=diff(f(x),x,2)
done

simplify(f1(x)) ergibt cos(x)+1/2
simplify(f2(x)) ergibt -sin(x)

notwendige Bedingung:

allgemeine Lösung:
solve(f1(x)=0,x) ergibt {x=2*π*constn(1)-2*π/3,x=2*π*constn(2)+2*π/3}

spezielle Lösungen:
solve(f1(x)=0,x,0,0,2*π) ergibt {x=2.094395102,x=4.188790205}

Es gibt zwei extremwertverdächtige Stellen
x = 2*π/3 = 2.094395102 und x = 2*π - 2*π/3 = 4*π/3 = 4.188790205

Kontrolle:
2*π/3 ergibt 2.094395102
4*π/3 ergibt 4.188790205

hinreichende Bedingung:

signum(f2(x)|x=2*π/3) ergibt -1
signum(f2(x)|x=4*π/3) ergibt 1

Ergebnis:
Hochpunkt H(2*π/3| f(2*π/3)) mit f(2*π/3) = π/3 + √(3)/2 ≈ 1,91
Tiefpunkt T(4*π/3| f(4*π/3)) mit f(4*π/3) = 2*π/3 - √(3)/2 ≈ 1,23

Rechnung im GTR(CAS):

f(2*π/3) ergibt π/3 + 3^(1/2)/2
approx(ans) ergibt 1.913222955
f(4*π/3) ergibt 2*π/3 - 3^(1/2)/2
approx(ans) ergibt 1.228369699

Weitere (globale) Extrempunkte befinden sich in den Randpunkten des betrachteten Kurvenastes in Intervall 0≤x≤2π:

Tiefpunkt (global): T(0|0) und **Hochpunkt (global): H(2π|2π)**

Fall k=1:

1⇒k

Define f(x)=k*x+sin(x)
done

Define f1(x)=diff(f(x),x)
done

simplify(f1(x)) ergibt cos(x)+1

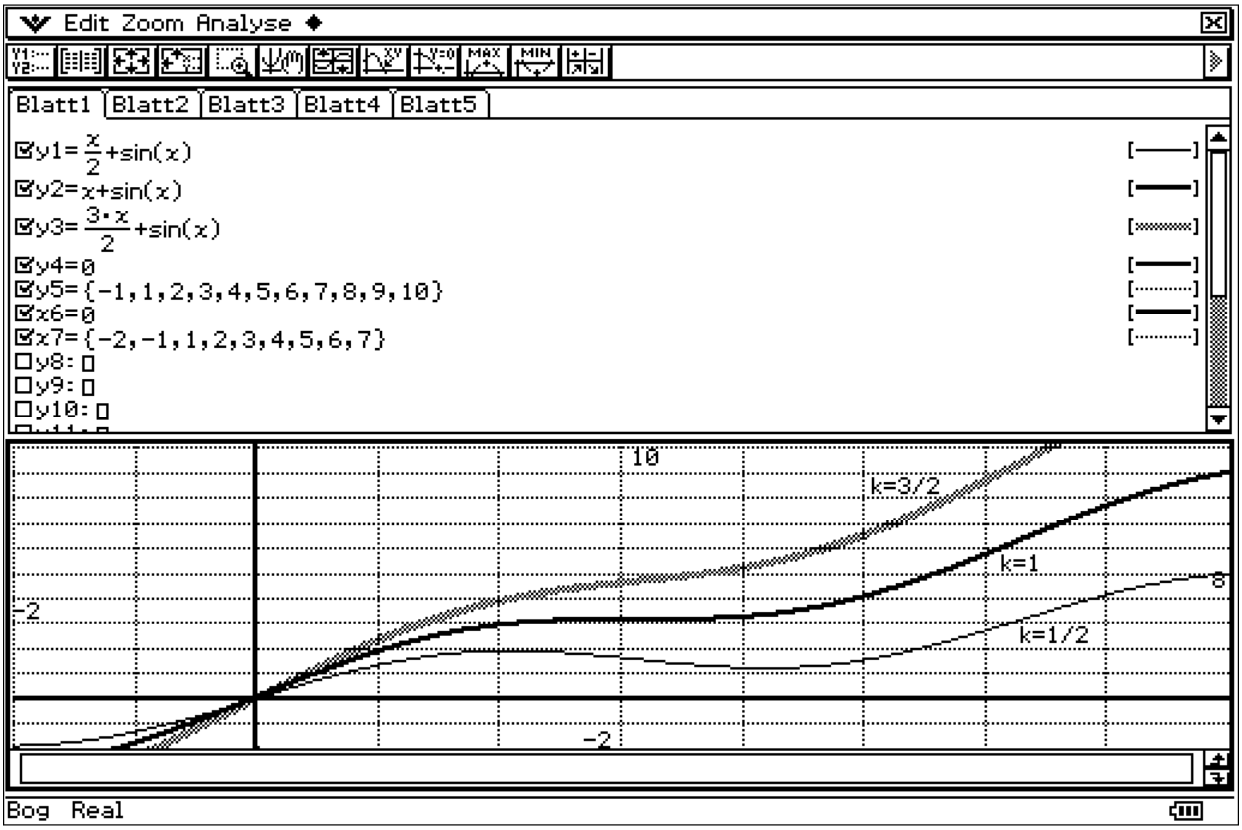
$f_1'(x) = \cos(x)+1 \geq -1+1 = 0$,

d.h. der Kurvenverlauf ist im betrachteten Intervall überall monoton wachsend (1. Ableitung nichtnegativ).
Damit gibt es im Fall k=1 keine lokalen Extrempunkte (nur globale Randextrema).

ges. Skizzen für zwei weitere charakteristische Graphen, z.B. k=1 und k=3/2
Begründung der Auswahl

Lösung:

Graph für f_k mit k=1 und k=3/2 (neben k=1/2):



Begründung der Auswahl: Die Fälle k = 1/2 < 1 und k = 1 wurden bereits untersucht.
Offen ist ein Fall mit k > 1, z.B. k = 3/2.

ges. Klassifikation der Graphen für $0 \leq k \leq 2$ hinsichtlich vorhandener (lokaler) Extrempunkte

Lösung:

Define f(x,k)=k*x+sin(x)
done
Define f1(x,k)=k+cos(x)
done

Define f2(x,k)=-sin(x)
done

solve(f1(x,k)=0,x) ergibt {x=cos⁻¹(k)+2*π*constn(1)-π, x=-cos⁻¹(k)+2*π*constn(2)+π}

Die arccos-Funktion ist nur für Argumente zwischen -1 und 1 definiert, d.h.

für k>1 gibt es keine Lösung, d.h. keine lokalen Extremstellen.

für k=1 ist arccos(1)=0,
d.h. es gibt genau eine Lösung x=π im Intervall 0≤x≤2π.

solve(f1(x,1)=0,x,0,0,2*π) ergibt {x=3.141592654}

Hinreichende Bedingung:
Es gilt $f_1'(x) = 1+\cos(x) \geq 1-1 = 0$, d.h. der Kurvenverlauf ist im betrachteten Intervall überall monoton wachsend (1. Ableitung nichtnegativ).
Damit gibt es keine lokalen Extrempunkte (nur globale Randextrema).

für 0 ≤ k < 1 gibt es zwei lokale Extremstellen im Intervall 0 ≤ x ≤ 2π: x = π ± arccos(k),
da die 2. Ableitung nicht 0 ist:

f2(x,k)|x=π+cos⁻¹(k) ergibt (-k^2+1)^(1/2)
f2(x,k)|x=π-cos⁻¹(k) ergibt -(-k^2+1)^(1/2)

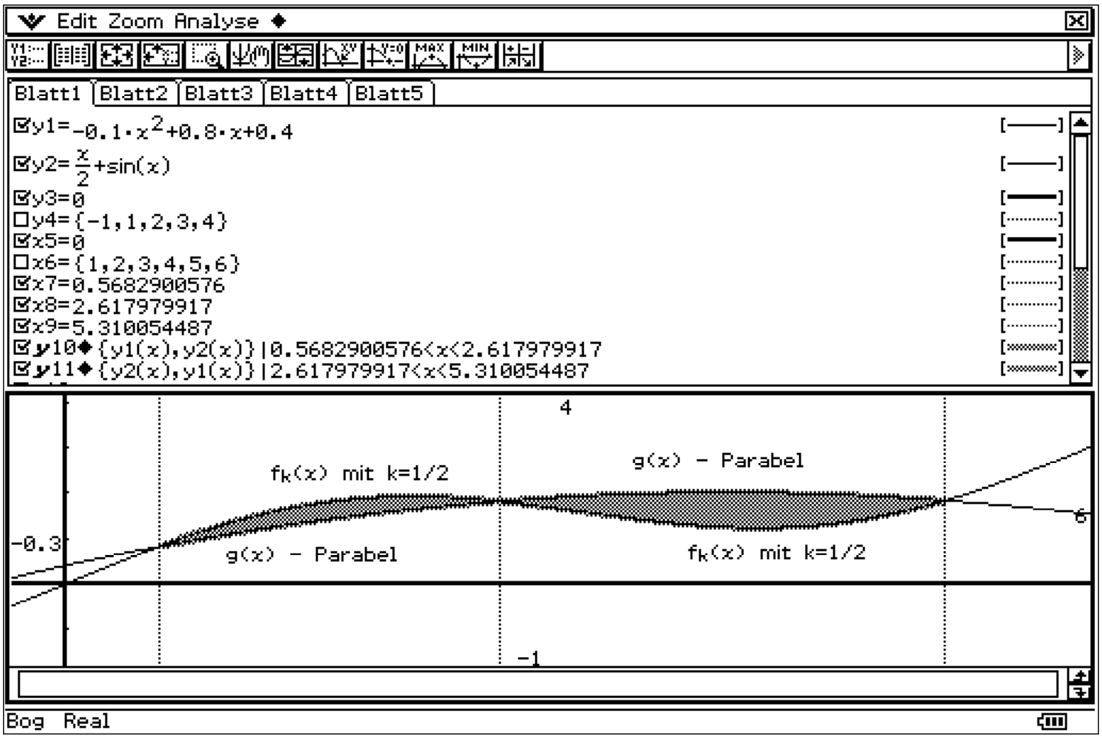
abschließende Klassifikation der Kurvenschar:
für 0 ≤ k < 1: zwei lokale Extrempunkte **für 1 ≤ k ≤ 2:** keine lokalen Extrempunkte

Teilaufgabe b)

geg. g(x) = -0.1*x^2 + 0.8*x + 0.4 und $f_k(x)$ = k*x+sin(x) mit k=1/2
g und f_k begrenzen zwei abgeschlossene Flächenstücke

ges. Skizze der Graphen und Schraffur der Flächenstücke

Lösung: Schraffur der Flächenstücke:



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

ges. Flächeninhalt der Gesamtfläche,
Vorgehen bei vorzeichenbehafteten Flächenanteilen in diesem Beispiel

Lösung: Schnittstellen ermitteln:

Define g(x) = -0.1*x^2 + 0.8*x + 0.4
done
Define f(x) = x/2 + sin(x)
done

solve(f(x)=g(x),x) ergibt {x=-2.247693029,x=0.5682900576,x=2.617979917,x=5.310054487}
0.5682900576 $\Rightarrow x_{n1}$ 2.617979917 $\Rightarrow x_{n2}$ 5.310054487 $\Rightarrow x_{n3}$

Die erste Lösung entfällt (nicht im Intervall von f)

Zerlegung des Integrals in zwei positive Teilintegrale:

∫(|f(x)-g(x)|, x, x_{n1}, x_{n3}) = ∫(f(x)-g(x), x, x_{n1}, x_{n2}) + ∫(g(x)-f(x), x, x_{n2}, x_{n3})

Rechnung im GTR(CAS):

∫(f(x)-g(x),x,x_{n1},x_{n2}) + ∫(g(x)-f(x),x,x_{n2},x_{n3}) ergibt 1.815556222

Ergebnis: die Gesamtfläche beträgt ca. 1,82 Flächeneinheiten.

Teilaufgabe c)

geg. Polynomapproximation für f_k (k=1/2) im Intervall 0 ≤ x ≤ 2π durch
h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d
mit h(0) = f_k (0),h(2π) = f_k (2π), h'(2π/3) = f_k'(2π/3) und h'(4π/3) = f_k'(4π/3)
ges. h mit den Koeffizienten a, b, c, d

Lösung: d=0 ist auch sofort aus der ersten Bedingung erkennbar.

Define f(x)=x/2+sin(x)
done
Define h(x)=a*x^3+b*x^2+c*x+d
done
solve({h(0)=f(0), h(2*π)=f(2*π), diff(h(x),x,1,2*π/3)=diff(f(x),x,1,2*π/3),
diff(h(x),x,1,4*π/3)=diff(f(x),x,1,4*π/3)}, {a,b,c,d})
ergibt {a=3/(4*π^2), b=-9/(4*π), c=2, d=0}
{a=3/(4*π^2),b=-9/(4*π),c=2,d=0} ergibt {a=0.07599088773, b=-0.7161972439, c=2, d=0}

Ergebnis: h(x) = 3/(4*π^2)*x^3 - 9/(4*π)*x^2 + 2*x **≈ 0.076*x^3 - 0.716*x^2 + 2*x**

geg. Maß für Güte der Näherungsformel h(x) für fk(x) (mit k=1/2) sei der Unterschied
der zur x-Achse gebildeten Flächeninhalte über dem betrachteten Intervall 0≤x≤2π.
Die Näherungsformel ist akzeptabel, wenn die Flächeninhalte um höchstens 5%

voneinander abweichen.

ges. Beurteilung der Güte der Näherungsformel

Lösung:

Berechnung der Flächeninhalte:

Define f(x) = x/2+sin(x)

done

Define h(x) = 3/(4*π^2)*x^3 - 9/(4*π)*x^2 + 2*x

done

∫(f(x),x,0,2*π)⇒Af ergibt π^2
∫(h(x),x,0,2*π)⇒Ah ergibt π^2

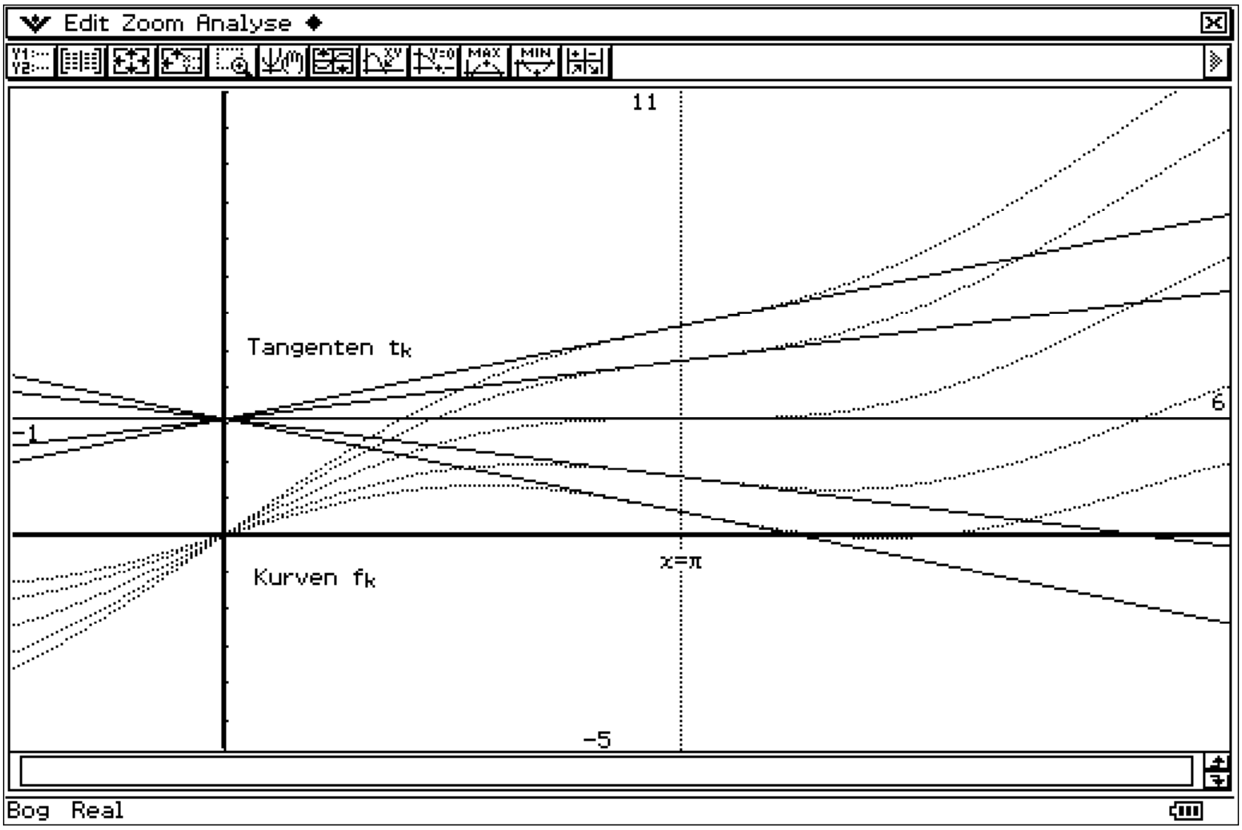
Die Flächeninhalte stimmen überein, d.h. 0% Abweichung, damit ist die Näherungsformel akzeptabel.

Teilaufgabe d)

geg. Tangenten t_k an f_k an der Stelle π
ges. Nachweis eines gemeinsamen Schnittpunkts aller Tangenten, Skizze

Lösung:

Skizze der Tangenten:



CASIO EDUCATIONAL PROJECTS

Rechnung:

Tangentengleichung: $y = t_k(x) = f_k'(\pi)*(x-\pi) + f_k(\pi)$, d.h.

$y = t_k(x) = (k+\cos(\pi))*(x-\pi) + k*\pi+\sin(\pi) = (k-1)*(x-\pi) + k*\pi = (k-1)*x + \pi$

Damit haben alle Tangenten das Absolutglied π (Schnittpunkt mit y-Achse S(0|π)).

Der gemeinsame Schnittpunkt ist S(0|π).

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik
==

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 1 (Block 2A, Stochastik):

Teilaufgabe a)

geg. Urne mit N=1000 Kugeln (M rote und N-M blaue Kugeln)
Probenentnahme von n=10 Kugeln (ohne Zurücklegen), dabei k rote Kugeln erhalten.
Nach Zurücklegen der 10 Kugeln die Probenentnahme wiederholen.
Insgesamt gibt es 12 derartiger Probenentnahmen aus stets der gleichen Grundgesamtheit mit folgendem Gesamtergebnis
(Verteilungstabelle einer Zufallsgröße X)

k (Anzahl der roten Kugeln)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl h_k der Proben mit k roten Kugeln	0	0	2	4	3	1	2	0	0	0	0

ges. Parameterschätzungen für μ = E(X) und σ = D(X) zur gegebenen Verteilungstabelle einer Zufallsgröße X

Lösung:

Schätzung für E(X): empirischer Mittelwert
$\bar{x}$ = (1/12)*∑(k*h_k,k,0,10) = 3,75

Rechnung im GTR(CAS):

seq(k,k,0,10,1) ⇒ listk	ergibt	{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
{0,0,2,4,3,1,2,0,0,0,0} ⇒ listh	ergibt	{0,0,2,4,3,1,2,0,0,0,0}
sum(listh)	ergibt	12
sum(listk*listh)/12 ⇒ xquer	ergibt	3.75

Schätzung für D(X): empirische Standardabweichung

s = √((1/11) * ∑((k-$\bar{x}$)^2*h_k, k, 0, 10)) = 1,299 ≈ 1,36.

Rechnung im GTR(CAS):

(1/11*sum((listk-xquer)^2*listh))^(1/2) ⇒ s ergibt 1.356801051

Anmerkung:
Die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X ist eine hypergeometrische Verteilung H(N,M,n), wobei M unbekannt ist.

Es gilt hierbei P(X=k) = nCr(M,k) * nCr(N-M,n-k) / nCr(N,n), k=0,1,2,...,10,
sofern 10 ≤ M ≤ 990 gilt (andernfalls sind bestimmte k-Werte unmöglich).

E(X) = n*M/N und D^2(X) = n * (M/N) * (1 - M/N) * (N-n)/(N-1)

Mit n*M/N=3,75, d.h. M/N=0,375 ergibt sich theoretisch D^2(X) = 3,75*0,625*990/999 = 2.32

3.75*0.625*990/999 ergibt 2.322635135
ans^(1/2) ergibt 1.524019401

d.h. D(X) = 1,52.

ges. begründete Prognose für M

Lösung:
Mit dem empirischen Mittelwert 3,75 als Schätzung für E(X) = n*M/N ergibt sich
M = 3,75*N/n = 375.

andere Begründung:
Mit einer Probenentnahme (n=10) erhält man im Mittel 3,75 rote Kugeln.
Das sind 37,5% des Stichprobenumfanges. Somit könnte man vermuten,
dass 37,5% aller Kugeln rot sind, d.h. 375 bei N=1000 Kugeln insgesamt.

Intervallschätzung für μ (Vertrauensintervall):
Der empirische Mittelwert $\bar{x}$ ist näherungsweise normalverteilt.
Die zentrierte und normierte Größe ($\bar{x}$-μ)/(s/√(12)) ist näherungsweise t-verteilt mit n-1 Freiheitsgraden.

Mit einem Vertrauensniveau von 95% erhält man folgende Intervallschätzung für μ:

OneSampleTInt 0.95, 3.75, 1.3568, 12
done
DispStat
done

ergibt für das 1-Stichproben-t-Intervall für μ:
linke Grenze (Left): 2.8879
rechte Grenze (Right): 4.6121

d.h. 2.8879 ≤ μ ≤ 4.6121

Hinweis:
Intervallschätzung für σ (Vertrauensintervall):
Die empirische Größe (n-1)*s^2, normiert mit σ^2, ist näherungsweise Chi-Quadrat-verteilt mit n-1 Freiheitsgraden.
Mit einem Vertrauensniveau von 95% erhält man folgende Intervallschätzung für σ:

((n-1)*s^2 / **invChiCDf(0.025,11)**)^(1/2) ≤ σ ≤ ((n-1)*s^2 / **invChiCDf(0.975,11)**)^(1/2)

1.3568 ⇒ s 12 ⇒ n
((n-1)*s^2 / invChiCDf(0.025,11))^(1/2) ergibt 0.9611505407
((n-1)*s^2 / invChiCDf(0.975,11))^(1/2) ergibt 2.303680894

d.h. 0.9612 ≤ σ ≤ 2.3037

Teilaufgabe b)

geg. Urne U_{50} mit M=20 roten und N-M=30 blauen Kugeln (d.h. N=50).
Probenentnahme (mit oder ohne Zurücklegen) vom Umfang n=10.

ges. Wahrscheinlichkeiten
P({genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen mit Zurücklegen}),
P({mindestens 2 rote Kugeln entnommen beim Ziehen mit Zurücklegen}),
P({genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen ohne Zurücklegen}).

Lösung:

Ziehen mit Zurücklegen: Binomialverteilung

P({genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen **mit** Zurücklegen}) =
binomialPDf(4,10,0.4) = 0.2508 ≈ 0.251

P({mindestens 2 rote Kugeln entnommen beim Ziehen **mit** Zurücklegen}) =
1-binomialCDf(1,10,0.4) = 0.9536 ≈ 0.954

Ziehen ohne Zurücklegen: hypergeometrische Verteilung

P({genau 4 rote Kugeln entnommen beim Ziehen **ohne** Zurücklegen}) =
nCr(20,4) * nCr(30,6) / (nCr(50,10) = 0.2801 ≈ 0.280

Rechnung im GTR(CAS):

binomialPDf(4,10,0.4)	ergibt	0.250822656
1-binomialCDf(1,10,0.4)	ergibt	0.9536425984
nCr(20,4)*nCr(30,6)/nCr(50,10)	ergibt	0.2800586031

Teilaufgabe c)

geg. drei Urnen U_{50} (20 rote, 30 blaue Kugeln),
U_{100} (40 rote, 60 blaue Kugeln),
U_{1000} (400 rote, 600 blaue Kugeln).
jeweils Probenentnahmen (Stichprobenumfang n=10)
Zufallsgröße X ist die zufällige Anzahl der roten Kugeln in der Probe.

Diagramme D_{50}, D_{100}, D_{1000} für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgröße X.

Erzeugung der Daten für die gegebenen Diagramme D_{50}, D_{100}, D_{1000}

seq(k,k,0,21,1) ⇒ listk ergibt {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21}

approx(seq(nCr(10,k/2)*0.4^(k/2)*0.6^(10-k/2)*(1+cos(k*π))/2,k,-1,20,1)) ⇒ listb ergibt
{0, **6.05E-3**, 0, **0.040**, 0, **0.121**, 0, **0.215**, 0, **0.251**, 0, **0.201**, 0, **0.111**, 0, **0.042**, 0, **0.011**, 0, **1.57E-3**, 0, **1.05E-4**}

approx(seq(nCr(20,k/2)*nCr(30,10-k/2)/nCr(50,10)*(1+cos(k*π))/2,k,0,21,1)) ⇒ listh5 ergibt
{**2.92E-3**, 0, **0.028**, 0, **0.108**, 0, **0.226**, 0, **0.280**, 0, **0.215**, 0, **0.103**, 0, **0.031**, 0, **5.33E-3**, 0, **4.91E-4**, 0, **1.80E-5**, 0}

approx(seq(nCr(40,k/2)*nCr(60,10-k/2)/nCr(100,10)*(1+cos(k*π))/2,k,0,21,1)) ⇒ listh10 ergibt
{**4.36E-3**, 0, **0.034**, 0, **0.115**, 0, **0.220**, 0, **0.264**, 0, **0.208**, 0, **0.108**, 0, **0.037**, 0, **7.86E-3**, 0, **9.48E-4**, 0, **4.90E-5**, 0}

approx(seq(∏((400-i)/(i+1),i,0,k/2-1) * ∏((600-i)/(i+1),i,0,10-k/2-1) / ∏((1000-i)/(i+1),i,0,9) * (1+cos(k*π))/2,k,0,21,1)) ⇒ listh100 ergibt
{**5.87E-3**, 0, **0.040**, 0, **0.120**, 0, **0.216**, 0, **0.252**, 0, **0.201**, 0, **0.111**, 0, **0.042**, 0, **0.010**, 0, **1.50E-3**, 0, **9.79E-5**, 0}

Mischung der Listen: wechselweise H(N, 0.4*N, 10) und B(10, 0.4)

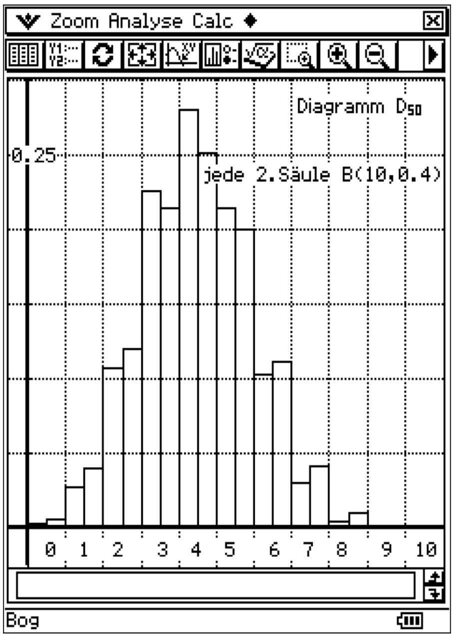
approx(listb+listh5) ⇒ list50 ergibt
{2.92E-3, **6.05E-3**, 0.028, **0.040**, 0.108, **0.121**, 0.226, **0.215**, 0.280, **0.251**, 0.215, **0.201**, 0.103, **0.111**, 0.031, **0.042**, 5.33E-3, **0.011**, 4.91E-4, **1.571E-3**, 1.80E-5, **1.05E-4**}

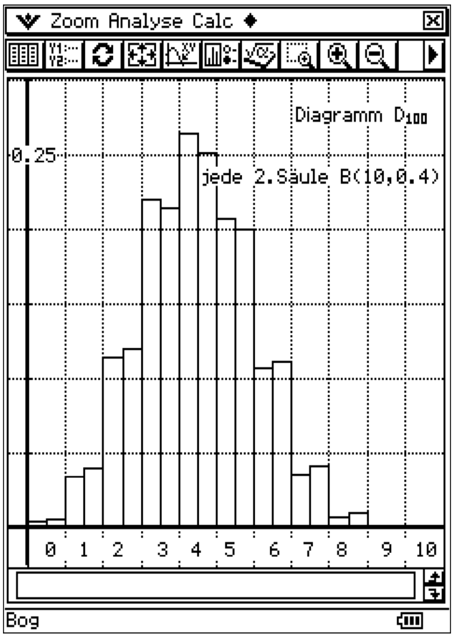
approx(listb+listh10) ⇒ list100 ergibt
{4.36E-3, **6.05E-3**, 0.034, **0.040**, 0.115, **0.121**, 0.220, **0.215**, 0.264, **0.251**, 0.208, **0.201**, 0.108, **0.111**, 0.037, **0.042**, 7.86E-3, **0.011**, 9.48E-4, **1.57E-3**, 4.90E-5, **1.05E-4**}

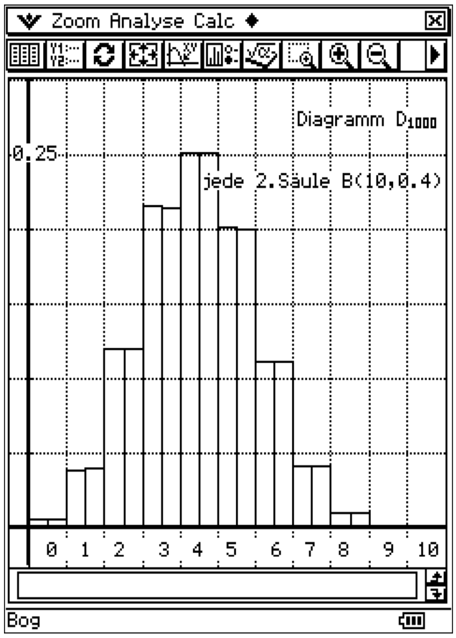
approx(listb+listh100) ⇒ list1000 ergibt
{5.87E-3, **6.05E-3**, 0.040, **0.040**, 0.120, **0.121**, 0.216, **0.215**, 0.252, **0.251**, 0.201, **0.201**, 0.111, **0.111**, 0.042, **0.042**, 0.010, **0.011**, 1.50E-3, **1.57E-3**, 9.80E-5, **1.05E-4}**

Stabdiagramme (Histogramme):

Man erkennt Säulenpaare, jeweils links **H(N, 0.4*N,10)-** und rechts **B(10,0.4)-**Säulen zur Wahrscheinlichkeit P(X = k). Mit wachsendem N nähern sich die **H(N,M,10)-**Wahrscheinlichkeiten den **B(10,0.4)-**Wahrscheinlichkeiten an:







ges. Begründung für die Unabhängigkeit der B(10,0.4)-Einzelwahrscheinlichkeiten
für P(X=k) von der benutzten Urne U_{50}, U_{100}, U_{1000}

Lösung:
Ziehen mit Zurücklegen gleicht dem Bernoulli-Schema mit dem 10maligen Ziehen bei einer Erfolgswahrscheinlichkeit 0.4 (eine rote Kugel zu ziehen). Jede Urne hat die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit 0.4. Damit ist es egal, mit welcher Urne experimentiert wird.

ges. Beschreibung der Veränderung der Wahrscheinlichkeiten P(X=k) beim Ziehen
aus Urnen mit zunehmender Größe N (50, 100, 1000) anhand der Diagramme

Lösung:
Mit zunehmendem N nähern sich die H(N,M,10)-Einzelwahrscheinlichkeiten den B(10,0.4)-Einzelwahrscheinlichkeiten an.

Faustregel:
Für n/N = 10/N ≤ 0.05 gilt mit p=M/N eine näherungsweise Übereinstimmung von H(N,M,n)-
Und B(n,p)-Einzelwahrscheinlichkeiten.
D.h., für kleine n und große N ist es rein rechnerisch ohne Bedeutung, ob die wenigen n entnommenen Kugeln nach jeder Einzelentnahme wieder zurückgelegt wurden oder nicht. Die stochastischen Verhältnisse in einer sehr großen Urne ändern sich dabei nur noch unwesentlich.

ges. Erläuterung der Aussage (ohne Berechnungen):
"P(X=4) ist beim Ziehen ohne Zurücklegen monoton fallend, wenn N anwächst (n=10 bleibt dabei unverändert)"

Lösung:
Anhand der Diagramme erkennt man das monotone Abfallen der Einzelwahrscheinlichkeit P(X=4) beim Ziehen ohne Zurücklegen und gleichzeitig das Anwachsen für extreme X.

Im Grenzfall N→∞ stellt sich die Einzelwahrscheinlichkeit der Binomialverteilung ein, die unabhängig von der Urnengröße gilt:

nCr(10,4) * 0.4^4 * 0.6^6 = 0.2508.

Theoretisch gilt:
P(X=4) = (nCr(M,4)*nCr(N-M,6)/nCr(N,10) (Einzelwahrscheinlichkeit der hypergeometrischen Verteilung) mit M = 0.4*N.
Hieraus: P(X=4) = nCr(0.4*N,4)*nCr(N-0.4*N,6)/nCr(N,10)

simplify(simplify(nCr(0.4*N,4)) * simplify(nCr(0.6*N,6)) / simplify(nCr(N,10))) ergibt
N*(N-5)*(4536*N-37800)*(3*N-5)*(3*N-10)*(3*N-20)*(2*N-5)*(2*N-15) /
(1953125*(N-1)*(N-2)*(N-3)*(N-4)*(N-6)*(N-7)*(N-8)*(N-9))

lim(N*(N-5)*(4536*N-37800)*(3*N-5)*(3*N-10)*(3*N-20)*(2*N-5)*(2*N-15) /
(1953125*(N-1)*(N-2)*(N-3)*(N-4)*(N-6)*(N-7)*(N-8)*(N-9)),N,∞)
ergibt 0.2508

expand(N*(N-5)*(4536*N-37800)*(3*N-5)*(3*N-10)*(3*N-20)*(2*N-5)*(2*N-15) /
(1953125*(N-1)*(N-2)*(N-3)*(N-4)*(N-6)*(N-7)*(N-8)*(N-9)),N)

ergibt 0.063/(N-1) + 0.032/(N-2) + 0.041/(N-3) + 0.132/(N-4) + 0.197/(N-6) + 0.095/(N-7) + 0.129/(N-8) + 0.565/(N-9) + 0.2508

Anhand der Partialbruchzerlegung (nur positive echt gebrochen rationale Anteile) erkennt man die strenge Monotonie bei wachsendem N.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik
==

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 2 (Block 2A, Analytische Geometrie):

geg. vier Punkte A(-1|-3|-2), B(7|9|-8), C(17|23|13), D(5|5|22) in der Ebene E,

Ebenengleichung der Ebene E: **[[84],[-57],[-2]]▫[[x],[y],[z]] = 91**

Kontrolle:

-[[1,3,2]] $\Rightarrow$ A [[7,9,-8]] $\Rightarrow$ B [[17,23,13]] $\Rightarrow$ C [[5,5,22]] $\Rightarrow$ D

dotP(crossP(B-A,C-A),D-A) ergibt 0

Damit liegen A, B, C und D in einer Ebene.

crossP(B-A,C-A)/4 ergibt [[84,-57,-2]]
dotP(ans,A) ergibt 91

Damit gilt die obige Ebenengleichung.

Teilaufgabe a)

ges. Nachweis, dass ABCD ein Trapez ist. Untersuchung auf Symmetrie

Lösung:

B-A	ergibt	[[8,12,-6]]
D-C	ergibt	[[-12,-18,9]]
-1.5*(B-A)	ergibt	[[-12,-18,9]]

d.h. **-1.5*(B-A) = D-C**, damit liegen zwei parallele Seiten vor.

Untersuchung der Winkel:

$\cos^{-1}$(dotP(B-A,D-A)/(norm(B-A)*norm(D-A)))	ergibt	90°
$\cos^{-1}$(dotP(C-B,A-B)/(norm(C-B)*norm(A-B)))	ergibt	106.719964°
$\cos^{-1}$(dotP(D-C,B-C)/(norm(D-C)*norm(B-C)))	ergibt	73.28003596°
$\cos^{-1}$(dotP(C-D,A-D)/(norm(C-D)*norm(A-D)))	ergibt	90°

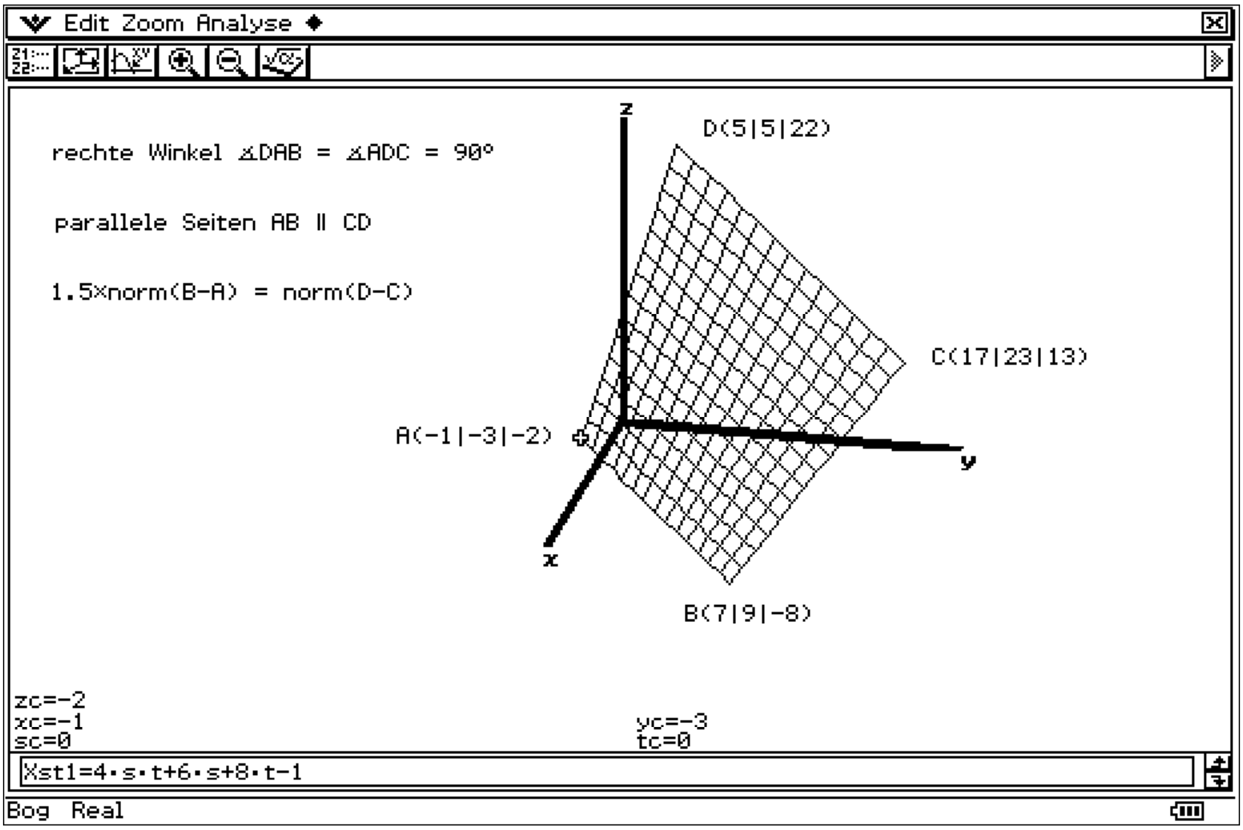
Damit ist das Trapez unsymmetrisch. Die Winkel in den Eckpunkten A und sind jeweils 90°.
Die Winkel in den Eckpunkten betragen 106,72° bzw. 73,28°.

3D-Grafik des Trapezes:

Parameterdarstellung:

X(s,t) = A + s*(D-A) + t*(1+s/2)*(B-A) mit 0 ≤ s ≤ 1 und 0 ≤ t ≤ 1.

simplify(A + s*(D-A) + t*(1+s/2)*(B-A)) ergibt
[[4*s*t+6*s+8*t-1, 6*s*t+8*s+12*t-3, -3*s*t+24*s-6*t-2]]



Teilaufgabe b)

geg. Geradenschar g_k mit [[x],[y],[z]] = [[2],[1],[9]] + t*[[19],[28],[k]], k∈R.

ges. Lagebeziehungen von g_k zu Ebene E in Abhängigkeit von k, Schnittpunkte

Lösung:

Schnittpunkt:

[[84],[-57],[-2]]▫[[x],[y],[z]] = 91 ergibt [[84],[-57],[-2]]▫([[2],[1],[9]] + t*[[19],[28],[k]]) = 91, d.h.

dotP([[84],[-57],[-2]],[[2],[1],[9]]+t*[[19],[28],[k]]) = 91 ergibt
-2*(k*t+9)-57*(28*t+1)+84*(19*t+2) = 91

simplify(ans) ergibt -2*k*t+93 = 91

d.h. für k*t=1 bzw. **t=1/k (k≠0) gibt es einen Schnittpunkt**.
[[2],[1],[9]] + t*[[19],[28],[k]] mit t=1/k ergibt: [[19/k+2],[28/k+1],[10]]
Der Schnittpunkt hat die Koordinaten **S(2+19/k|1+28/k|10).**

Für k=0 gibt es keinen Schnittpunkt, d.h. g_0 liegt parallel zu E (aber nicht in E). Würde g_0 in E verlaufen, müsste es unendlich viele Schnittpunkte geben, was aber nicht der Fall ist.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

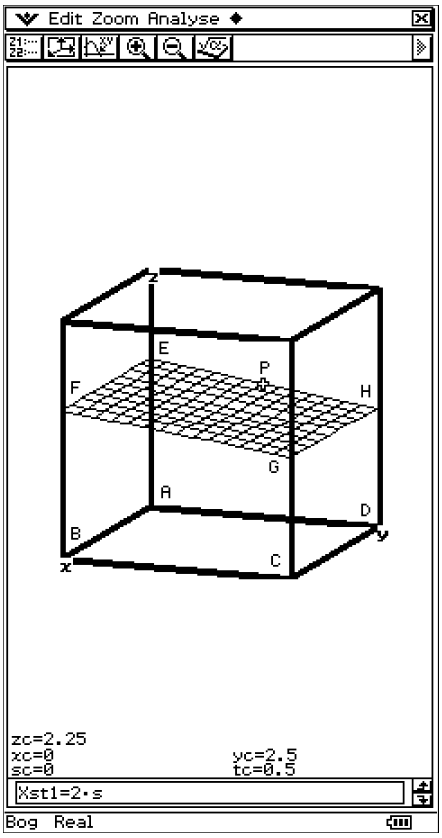
Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik
===

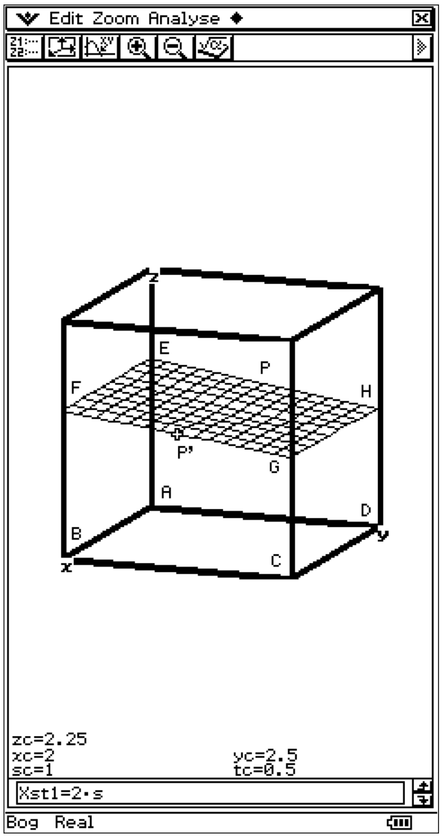
Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 1 (Block 2B, Analytische Geometrie):

geg. Planskizze (Carport, Lage im 1. Oktanten),
vgl. Skizze (Breite 2m, Tiefe 5m, Höhe 2,5m vorn, 2m hinten)
Grundfläche A, B, C und D mit **C(2|5|0)** und A im Koordinatenursprung
Dachfläche E, F, G und H mit **E(0|0|2,5)**

3D-Grafik (Planskizze):





Die Stützbalken AP, DP und BP', CP' sind in den Bildern nicht eingezeichnet.

Teilaufgabe a)

ges. fehlende Koordinaten der Eckpunkte (aus Skizze erkennbar, E und C vorgegeben)

Lösung:

Grundfläche A, B, C und D mit A(0|0|0), B(2|0|0), C(2|5|0), D(0|5|0)

Dachfläche E, F, G und H mit E(0|0|2,5), F(2|0|2,5), G(2|5|2), H(0|5|2)

3D-Skizze:

[[0,0,0]] ⇒ A [[2,0,0]] ⇒ B [[2,5,0]] ⇒ C [[0,5,0]] ⇒ D
[[0,0,2.5]] ⇒ E [[2,0,2.5]] ⇒ F [[2,5,2]] ⇒ G [[0,5,2]] ⇒ H

Dachebene in Parameterdarstellung (für 3D-Grafik, Planskizze):

X(s,t) = E+s*(F-E)+t*(H-E), 0 ≤ s ≤ 1, 0 ≤ t ≤ 1, d.h.

E+s*(F-E)+t*(H-E) ergibt [[2*s, 5*t, -0.5*t+2.5]]

ges. Koordinaten von P und P' in der Mitte der Strecken EH bzw. FG

Lösung:

(E+H)/2 ⇒ P ergibt [[0,2.5,2.25]]
(F+G)/2 ⇒ Pstrich ergibt [[2,2.5,2.25]]

vgl. 3D-Grafik,

Antwort: P(0|2,5|2,25) und **P'(2|2,5|2,25)**

ges. Balkenlängen zu EH, AP und PD

Lösung:

norm(H-E) ergibt 5.024937811
norm(P-A) ergibt 3.363406012
norm(P-D) ergibt 3.363406012

Antwort: Die Längen sind **||EH|| ≈ 5,02m, ||AP|| = ||PD|| ≈ 3,36m**

ges. Ebenengleichung (Dachebene) in Koordinatenform

Lösung:

crossP(F-E,H-E)⇒N ergibt [[0,1,10]]
dotP(N,[[x,y,z]])=dotP(N,E) ergibt y+10*z=25

Die Ebenengleichung lautet: **0x+1y+10z = 25** (d.h. x ohne Einfluss auf die Gleichung)

Teilaufgabe b)

geg. Lichtquelle in L(1|0|3) (oberhalb der Dachebene)

ges. Eckpunkte des Dachschattens in x-y-Ebene

Lösung:

Geradengleichungen für LE, LF, LG, LH bestimmen und z=0 setzen

[[1,0,3]]⇒L

Schattenpunkt E':

L+t*(E-L) ergibt [[-t+1,0,-0.5*t+3]]
solve(ans[1,3]=0,t) ergibt {t=6}
L+t*(E-L)|t=6 ergibt [[-5,0,0]]

Schattenpunkt F':

L+t*(F-L) ergibt [[t+1,0,-0.5*t+3]]
solve(ans[1,3]=0,t) ergibt {t=6}
L+t*(F-L)|t=6 ergibt [[7,0,0]]

Schattenpunkt G':

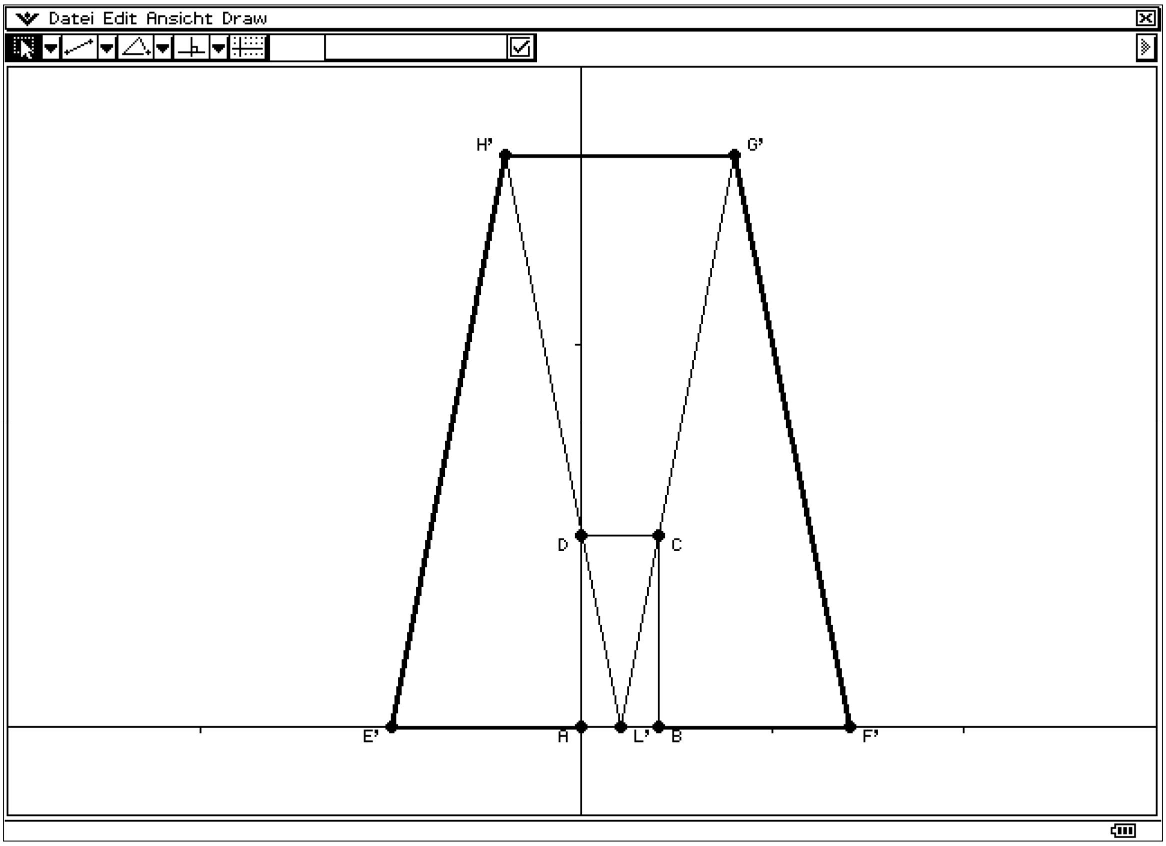
L+t*(G-L) ergibt [[t+1,5*t,-t+3]]
solve(ans[1,3]=0,t) ergibt {t=3}
L+t*(G-L)|t=3 ergibt [[4,15,0]]

Schattenpunkt H':

L+t*(H-L) ergibt [[-t+1,5*t,-t+3]]
solve(ans[1,3]=0,t) ergibt {t=3}
L+t*(H-L)|t=3 ergibt [[-2,15,0]]

Antwort: Die Schattenpunkte sind **E'(-5|0|0), F'(7|0|0), G'(4|15|0)** und **H'(-2|15|0)**

Skizze der Schattenfläche im Geometriemenü:



ges. Geometrische Form der Schattenfläche

Lösung:

Es handelt sich um ein Trapez, da die Seiten E'F' (auf der x-Achse liegend) und G'H' zueinander parallel sind.
vgl. auch Skizze im Geometriemenü.

Teilaufgabe c)

geg. Q auf EH derart, dass Gesamtlänge der Balken AQ und QD minimal wird.

ges. minimale Gesamtlänge

Lösung:

Ansatz für Q: Q(0|y|z)

[[0,y,z]] ⇒ Q
Define f(y,z) = norm(A-Q)+norm(Q-D)
done
f(y,z) ergibt (y^2+z^2-10*y+25)^(1/2)+(y^2+z^2)^(1/2)

Nebenbedingung:
Q auf EH, d.h. Q = E + t*(H-E) mit 0≤t≤1
Hieraus folgt:

E+t*(H-E) ergibt [[0,5*t,-0.5*t+2.5]]

Einsetzen in Zielfunktion f(y,z) ergibt:

f(y,z)|{y=5*t, z=-0.5*t+2.5} ergibt (101*t^2-10*t+25)^(1/2)/2+(101*t^2-210*t+125)^(1/2)/2

Define g(t) = √(101*t^2 - 10*t + 25)/2 + √(101*t^2 - 210*t + 125)/2
done

fMin(g(t),t,0,1)	ergibt	{MinValue = 5*(18281)^(1/2)/101, t = 545/909}
approx(ans)	ergibt	{MinValue = 6.693428135, t = 0.599559956}
E+t*(H-E)|t=545/909	ergibt	[[0, 2.99779978, 2.200220022]]

Ergebnis:
Wird Q in **Q(0|3|2,2)** gelegt, entsteht eine minimale Gesamtlänge 5*√(18281)/101 ≈ **6,69** m.

Niedersachsen 2007 Abitur Mathe-Grundkurs (GK)
Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgabenteil 2: Analytische Geometrie/ Stochastik
==

Wahlblöcke 2A, 2B

Aufgabe 2 (Block 2B, Stochastik):

Teilaufgabe a)

geg. Simulationsprogramm zum Münzwurf (Glücksspiel per Computer)

Spielregeln:
Spieleinsatz (ein Spiel) 2€
Spielende, wenn "Zahl" oben liegt
Spielfortsetzung, wenn "Wappen" oben liegt
Spielabbruch, wenn 4mal "Wappen" oben liegt.

Auszahlung (Gewinn):

"Zahl" im 1. Wurf:	1€ (Trostpreis)
"Zahl" im 2. Wurf:	2€ (Einsatz zurück)
"Zahl" im 3. Wurf:	3€ (Gewinn)
"Zahl" im 4. Wurf:	4€ (Hauptgewinn)
4mal "Wappen":	0€ (Einsatz verspielt)

ges. Wahrscheinlichkeitsverteilung für die zufällige Auszahlung $X \in \{0,1,2,3,4\}$

Lösung:

P(X=1)=1/2
P(X=2) = (1/2)^(2) = 1/4
P(X=3) = (1/2)^(3) = 1/8
P(X=4) = (1/2)^(4) = 1/16
P(X=0) = 1 - (1/2+(1/2)^2+(1/2)^3+(1/2)^4) = 1 - ∑((1/2)^k,k,1,4) = 1/16

Rechnung im GTR(CAS):

seq(0.5^k,k,1,4,1) ⇒ listp ergibt {1/2,1/4,1/8,1/16}
1-sum(listp) ergibt 1/16

Antwort: P(X=k) = (1/2)^k für k=1,2,3,4 und P(X=0) = 1/16.

ges. Beurteilung der Fairness des Spiels

Lösung:

erwarteter Gewinn G = 0.5*1 + 0.25*2 + 0.125*3 + 0.0625*4 - 2 = -0.375

0.5*1+0.25*2+0.125*3+0.0625*4-2 ergibt -0.375

Ergebnis:
Es handelt sich um ein unfaires Spiel, da im Mittel ein Verlust für den Spieler entsteht.

Teilaufgabe b)

geg. Simulationsprogramm auch mit p = P({"Wappen" liegt oben}) = 0.4 möglich,
(neue Ausgangssituation)
neben der vorher betrachteten Simulation (Alternative) p = 0.5,
Bernoulli-Schema mit n=100 Münzwürfen und Feststellung des Auftretens von "Wappen"
(zufällige Anzahl S_n)

ges. Entscheidung anhand von S_n darüber,
ob Simulation mit p=0,4 (gezinkte Münze) oder mit p=0,5 (ideale Münze, Alternative) erfolgte.

Lösung:

S_n bist binomialverteilt mit den Parametern p und n=100.
Es sei b die Entscheidungsgrenze derart,
dass bei S_n zu klein, d.h. S_n<b, auf p=0.4 (manipulierte Münze)
und bei S_n≥b, d.h. S_n nicht zu klein, auf p=0.5 (nicht manipulierte Münze) getippt wird.

Ansatz:
b sei nicht ganzzahlig, dann gilt
P(S_n<b) = binomialCDf(b,100,0.4)
P(S_n≥b) = 1-binomialCDf(b,100,0.5)
b sollte derart gewählt sein, dass P(S_n<b) = P(S_n≥b) gilt.

Beispiele der Suche nach b (GTR oder Tabelle nutzen)

40 ⇒ b
{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.5433, 0.9716, 0.4283}

41 ⇒ b
{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.6225, 0.9557, 0.3332}

42 ⇒ b
{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.6967, 0.9334, 0.2367}

43 ⇒ b
{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.7635, 0.9033, 0.1399}

44 ⇒ b
{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.8211, 0.8644, **0.0433**}

45 ⇒ b
{binomialCDf(b,100,0.4), 1 - binomialCDf(b,100,0.5),
|binomialCDf(b,100,0.4) + binomialCDf(b,100,0.5) - 1|}
ergibt {0.8689, 0.8159, 0.0530}

Damit erscheint folgende Entscheidungsregel sinnvoll:

Falls höchstens 44mal "Wappen" erscheint, ist die Simulation vermutlich manipuliert, falls mindestens 45mal "Wappen" erscheint, ist die Simulation vermutlich nicht manipuliert.

b = 44.5 bedeutet, dass sich hier die Wahrscheinlichkeiten $P(S_n<44.5)$ und $P(S_n\geq 44.5)$ am stärksten gleichen:
$P(S_n<44.5) = 0.8211$ und $P(S_n\geq 44.5) = 0.8644$ (Unterschied lediglich 0.0433).

geg. Präzisierung der Entscheidungsregel:
Es wird zunächst von der gegebenen manipulierten Simulation (Nullhypothese) ausgegangen, d.h. H_0: $p = p_0 = 0,4$.
Der Fehler 1.Art (Ablehnung von H_0 wegen "S_n zu groß", obwohl eine manipulierte Simulation erfolgte) soll höchstens 5% betragen (Signifikanzniveau α=0.05),
d.h. einseitige Alternative H_a: $p > p_0$

ges. Ablehnungsbereich K* auf dem Signifikanzniveau α = 0.05
und Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (Nichtablehnung von H_0, obwohl eine nichtmanipulierte Simulation vorlag.)

Lösung:
unter H_0 gilt:
$P(S_n\in K^*) = P(S_n>b) = \alpha = 0.05$, d.h. b = invBinomialCDf(0.95,100,0.4) = 48

Kontrolle: GTR bzw. Tabelle nutzen

invBinomialCDf(0.95,100,0.4) ergibt 48
1-binomialCDf(48,100,0.4) ergibt 0.04230142019
1-binomialCDf(47,100,0.4) ergibt 0.0637891769

Ergebnis: Der Ablehnungsbereich ist K* = {49, 50, ..., 100}
Ist S_n größer als 48 muss H_0 auf dem Signifikanzniveau α = 0.05 (exakter **4,23%,** Irrtumswahrscheinlichkeit) abgelehnt werden.

Wird H_0 nicht abgelehnt, kann ein Fehler 2. Art entstehen mit der Wahrscheinlichkeit:
$P(S_n \geq 49)$ = 1-binomialCDf(48,100,0.5) = 0.3822 ≈ **38,2%.**

Rechnung im GTR(CAS): bzw. Tabelle nutzen

binomialCDf(48,100,0.5)   ergibt   0.3821767172

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art **0.3822** und ist damit merklich größer als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

Weiter oben wurde bereits darüber diskutiert, dass b = 44,5 beide Fehler optimiert.
In diesem Fall wäre α = 1-binomialCDf(44,100,0.4) = 0.1789 ≈ 17,9%

Rechnung im GTR(CAS): bzw. Tabelle nutzen

1-binomialCDf(44,100,0.4)   ergibt   0.1789016327

ges. Erläuterung am gegebenen Beispiel für die Begriffe Fehler 1. und 2. Art

Lösung:

Angenommen, die Simulation ergab 50mal "Wappen", d.h. S_n=50. Die Anzahl S_n=50 kann sowohl unter H_0 ($p=p_0=0{,}4$) als auch unter Ha ($p=0{,}5>p_0$) entstehen.
Auf dem Signifikanzniveau α=0.05 ist $Sn=50 \in K^*$ ein kritischer Wert und führt zur Ablehnung von H_0. Wenn H_0 richtig ist, wird damit ein Fehler 1. Art gegangen. Man würde damit eine nicht manipulierte Simulation vermuten, obwohl das Ergebnis von einer simulierten Simulation stammt.

Angenommen, die Simulation ergab 48mal "Wappen", d.h. S_n=48. Die Anzahl S_n=48 kann sowohl unter H_0 ($p=p_0=0{,}4$) als auch unter Ha ($p=0{,}5>p_0$) entstehen.

Auf dem Signifikanzniveau α=0.05 ist $Sn=48 \notin K^*$ kein kritischer Wert und führt zur Nichtablehnung von H_0. Wenn H_0 falsch ist, wird damit ein Fehler 2. Art gegangen. Man würde damit eine manipulierte Simulation vermuten, obwohl das Ergebnis von einer nicht simulierten Simulation stammt.