8. Verwendung des Graphiktaschenrechners in der Sekundarstufe I - Ein Lehrer-Schüler-Dialog: Quadratische Funktionen, Kurvenscharen und Zahlenfolgen (CASIO)

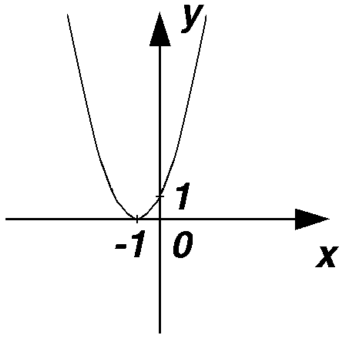
Zielstellung:

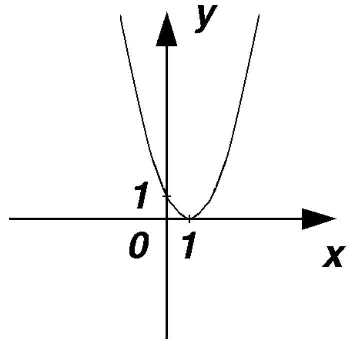
Die Schüler haben in einer der vorangehenden Klassen die linearen Funktionen (Geraden) $y = \mathrm{f}(x) = \mathrm{m}x + \mathrm{n}$ und einfache quadratische Funktionen (Parabeln) $y = \mathrm{f}(x) = \mathrm{a}x^2$ kennengelernt.
Für die heutige Stunde habe ich geplant, mit den Schülern weiterführende Überlegungen zu den Graphen quadratischer Funktion anzustellen, wozu sie diese beiden genannten Funktionstypen heranziehen sollen.
Sie kennen die quadratische Ergänzung noch nicht.

Mathematischer Hintergrund: Quadratische Funktionen und Differenzenfolgen

Ding-dong. Es klingelt zum Unterrichtsbeginn. Lehrer K. tritt ein.

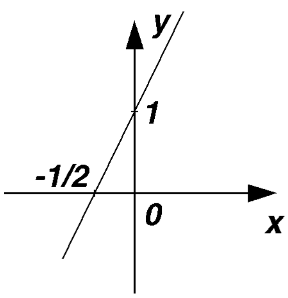
Lehrer K.: Gleich zu Beginn eine Wissensfrage. Welche der beiden graphischen Darstellungen entspricht der Funktion $y = \mathrm{f}(x) = x^2 + 2x + 1$?

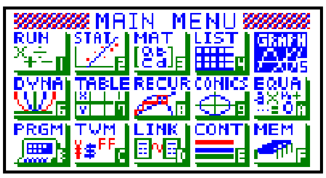


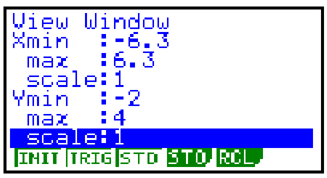


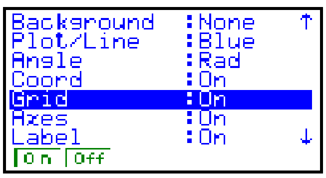
Albert: Die linke Darstellung ist richtig, denn wir können $y = x^2 + 2x + 1$ in $y = (x + 1)^2$ umformen, d.h. die Abszisse des Scheitelpunkts muss bei **-1** ($x = -1$) liegen.

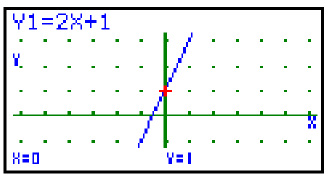
Lehrer K.: Richtig. Wir wollen jetzt aber eine andere Vorgehensweise ausprobieren, und zwar positionieren wir in der x-y-Ebene Punkte (Zahlenpaare) nach einer bestimmten Regel. Zuerst zeichnen wir eine Gerade, die graphische Darstellung einer linearen Funktion, die Sie in einer früheren Klasse kennengelernt haben.



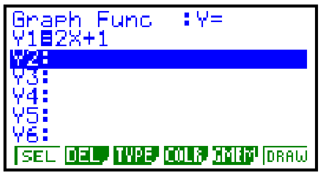








Wir wollen zum Zeichnen des Graphen für $y = 2x + 1$ den Graphiktaschenrechner **CFX-9850GB Plus** verwenden. Wählen Sie das **GRAPH**-Menü im Hauptmenü (**MAIN MENU**) aus und geben Sie nacheinander [2] [X,θ,T] [+] [1] ein und drücken Sie [EXE]. Betrachtungsfenster- und **SET UP**-Einstellung siehe oben. [F6] **[DRAW]** drücken, um die Gerade zu zeichnen.



Albert: Ich denke, wir brauchen für einen derart einfachen Graphen keinen Graphiktaschenrechner.

Lehrer K.: Seien Sie nicht so voreilig. Stellen Sie sich den Graphen einfach mal vom Standpunkt des Funktionsbegriffs aus vor:

"Ein Wert von x bestimmt einen und nur einen Wert von y."

Ich bin sicher, dass Sie diese Aussage der eindeutigen Zuordnung verstehen. Heute ist es unsere Aufgabe, für diese Aussage eine graphische Interpretation zu finden.

Der Prozess, in dessen Verlauf wir die Punkte finden, die der Gleichung $y = 2x + 1$ genügen, kann wie folgt in Worte gefasst werden:

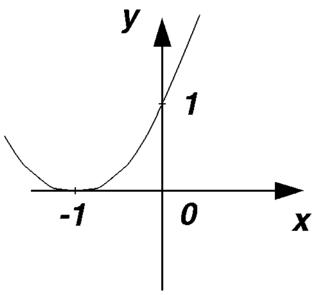
"Der Graph einer Funktion '$y = \ldots$' wird gezeichnet, indem wir diejenigen Punkte suchen, deren Koordinaten der Funktionsvorschrift genügen, d.h. für jedes x wird auf einer gedachten senkrechten Geraden parallel zur y-Achse der Wert y abgetragen."

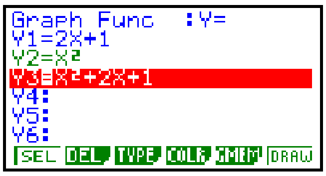
(Das entspricht, um ein Beispiel aus dem wirklichen Leben zu nehmen, dem Suchen nach einer verlorenen Kontaktlinse auf dem Schulhof nach der Strategie, dass sich alle Schüler in einer Linie aufstellen und senkrecht dazu jeden Zollbreit des Hofes prüfen.)

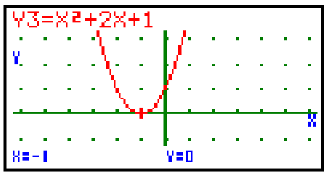
Dieses Prinzip wollen wir ***"Faksimile-Prinzip"*** (Prinzip der originalgetreuen Abbildung) nennen.

Wir wollen jetzt den Graphen einer quadratischen Funktion nach diesem Prinzip unter suchen. Zeichnen wir also mit dem Graphiktaschenrechner den Graphen der Funktion $y = x^2 + 2x + 1$.

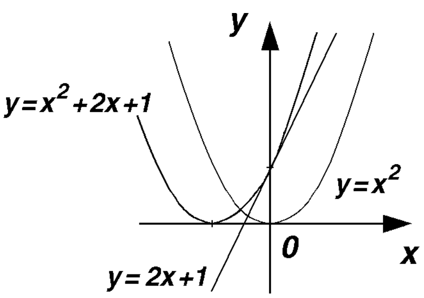
Bill: Gut. Wir wählen das **GRAPH**-Menü aus, geben $x^2 + 2x + 1$ ein und drücken [EXE].

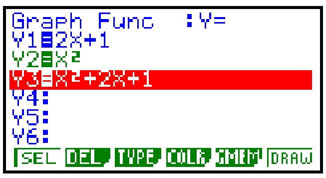


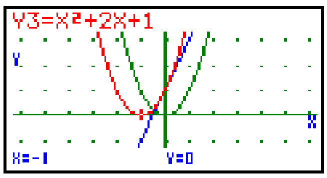




Lehrer K.: OK. Wir zeichnen jetzt die Graphen der linearen und der quadratischen Funktionen nicht mehr getrennt voneinander, sondern gemeinsam. Wir prüfen die Beziehung zwischen $y = 2x + 1$, $y = x^2$ und $y = x^2 + 2x + 1$, indem wir die Graphen mit dem Graphiktaschenrechner gleichzeitig darstellen. Geben Sie in $\mathbf{Y1} = 2x + 1$ ein, in $\mathbf{Y2} = x^2$ und in $\mathbf{Y3} = x^2 + 2x + 1$.







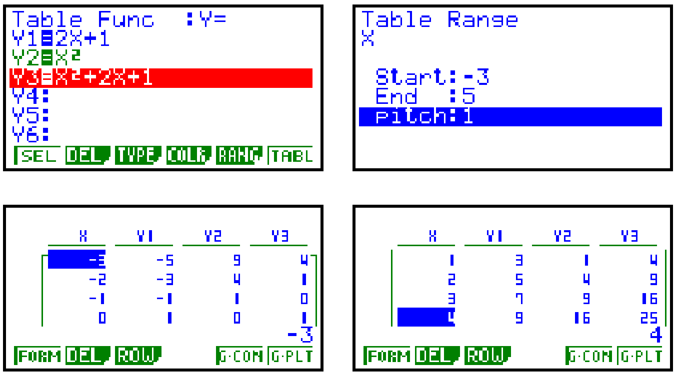
Charlie: Mir scheint, die Gerade $y = 2x + 1$ ist die Tangente an die Kurve $y = x^2 + 2x + 1$ im Punkt $y = 1$, dem Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lehrer K.: Großartiger Spürsinn! Suchen wir nach dem Grund dafür auf der Grundlage des Satzes ***"Ein Wert von x bestimmt einen und nur einen Wert von y."***

Donald: Wir haben in der vorherigen Klasse die Tabelle als Hilfsmittel kennengelernt und können, so glaube ich, jetzt darauf zurückgreifen.

Lehrer K.: Schön. Legen wir also eine Tabelle an, und zwar mit dem Graphiktaschenrechner. Wählen Sie das **TABLE**-Menü im Hauptmenü (**MAIN MENU**) aus. Im Untermenü F5 [**RANG**] (RANGE) werden Sie aufgefordert, den Bereich für x festzulegen, und zwar z. B. wie folgt: Startwert: **-3**, Endwert: **5**, Schrittweite: **1**.
Drücken Sie jetzt EXE und F6 [**TABL**](TABLE), und Sie erhalten die folgende Tabelle:

X	Y1	Y2	Y3
-3	-5	9	4
-2	-3	4	1
-1	-1	1	0
0	1	0	1
1	3	1	4
2	5	4	9
3	7	9	16
4	9	16	25
5	11	25	36



Donald: Die Tabelle zeigt uns den Zusammenhang **Y3 = Y1 + Y2**.

Lehrer K.: Wenn wir diese Beziehung mit dem Faksimile-Prinzip überprüfen, sehen wir, dass die Wahl eines Wertes von x der Untersuchung der x-y-Ebene durch senkrechtes Teilen entspricht. Deshalb gibt die Beziehung **Y3 = Y1 + Y2** die Addition der Ordinaten wie folgt an:
$x^2 + 2x + 1 = (2x + 1) + x^2$
Anders ausgedrückt: Anstelle für einen y-Wert ein x in $x^2 + 2x + 1$ einzusetzen, addieren wir den Wert von x^2 zu $y = 2x + 1$.
Der richtige Graph unserer eingangs gestellten Wissensfrage ist der linke, weil die Gerade $y = 2x + 1$ die Tangente an die Parabel des linken, nicht aber des rechten Bildes ist.
Können Sie nachweisen, dass $y = 2x + 1$ die Tangente ist?

Edward: Aus den Funktionen $y = x^2 + 2x + 1$ und $y = 2x + 1$ folgt durch Gleichsetzen $x^2 + 2x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$, d.h. $x = 0$ (nur eine Lösung, ein gemeinsamer Punkt). Damit ist die Gerade die Tangente an die Kurve im Punkt **P(0, 1)** .

Lehrer K.: Hat jemand noch einen Gedanken, was die Tabelle anbelangt?

Frank: Die Folge **Y1** ist die **Differenzenfolge** von Folge **Y3**.
Y3: 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36
Y1: -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11

Lehrer K.: Wenn wir die Folge **Y3** als a_n schreiben, wobei der x-Bereich ganze Zahlen umfasst, d.h. **Y3** = y**(n)** = a_n , dann ist die Folge **Y1** die erste Differenzenfolge der Folge **Y3**.

$$\ldots,\ a_3 - a_2 = 7,\ a_2 - a_1 = 5,\ a_1 - a_0 = 3,\ a_0 - a_{-1} = 1,\ a_{-1} - a_{-2} = -1,\ \ldots$$

Frank: Ich führe das zu Ende. Aus diesen Differenzen ergibt sich die folgende Beziehung:

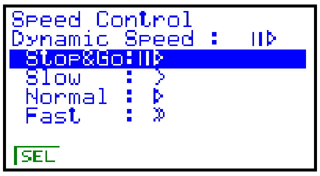
$$a_{n+1} - a_n = 2n + 3,\quad a_0 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

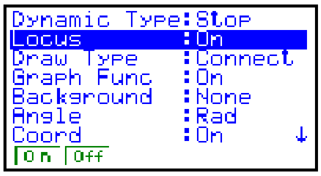
Aus der Rekursionsformel **(1)** erhalten wir a_n als Summe wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= 2(n-1) + 3 \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= 2(n-2) + 3 \\ &\ldots \\ a_1 - a_0 &= 2\times 0 + 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a_n &= a_0 + 2\big((n-1) + (n-2) + \ldots + 1 + 0\big) + 3n \\ &= a_0 + 2\big(\ n(n-1)/2\ \big) + 3n = n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Somit gilt $a_n = n^2 + 2n + 1$. Das bedeutet $f(x) = x^2 + 2x + 1$ mit $x = n$ (ganze Zahl).

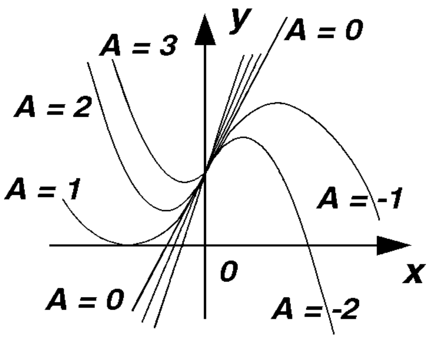
Lehrer K.: Nun betrachten wir ein etwas anspruchsvolleres Problem.
Untersuchen wir einmal den Graphen der Funktion $y = x^2 + 2x + 1$ im **DYNA**-Menü, das im Hauptmenü (**MAIN MENU**) ausgewählt wird. Dann wird der Funktionstyp **Y = AX² + BX + C** eingegeben. Im Untermenü **VAR** werden **B** und **C** werden mit den Werten **2** bzw. **1** belegt. **A** wird als Dynamik-Variable markiert (**SEL**). **SPEED** auf **Stop&Go** einstellen, vgl. **SET UP** mit **Dynamic Type: Stop**.

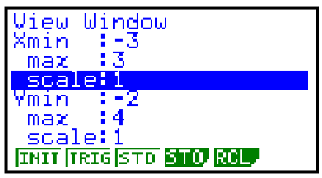


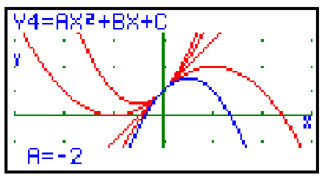


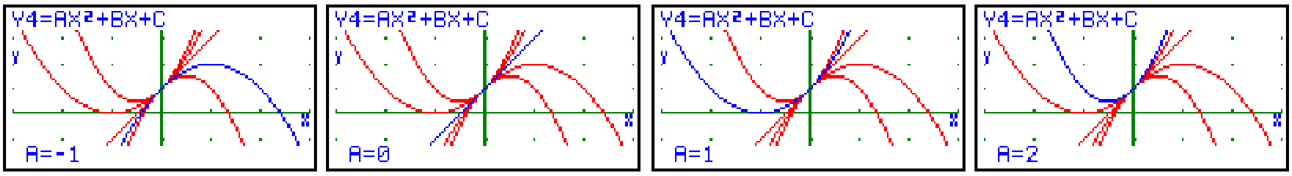
Für den Laufbereich der Variablen **A** drücken Sie **RANG** and geben den Startwert **-2**, Endwert **2** und Schrittweite **1** ein. Dann drücken Sie EXE und F6 [**DYNA**]. Es erscheint die Mitteilung: "**One Moment please!** (Bitte einen Moment warten!)". Nach kurzer Zeit werden die Graphen der Kurvenschar mit dem Scharparameter **A** angezeigt. Wir brauchen die Wartezeit nicht ungenutzt verstreichen zu lassen: Es ist immer wieder reizvoll, die Schüler das Ergebnis erraten und dann mit der tatsächlichen Ausgabe des Rechners vergleichen zu lassen.

Wenn Sie zuvor im **SET UP** durch Drücken von SHIFT [**SET UP**] **Locus: On** einschalten, werden die roten Graphen der definierten Kurvenschar als Hintergrundbild entsprechend dem festgesetzten **A**-Bereich ausgegeben (in diesem Falle 5 Kurven), und es wird ein blauer Graph entsprechend dem aktuellen Wert von **A** in der Kurvenschar hervorgehoben. Das ist sehr nützlich, weil dadurch die gesamte Veränderung des Graphen in Abhängigkeit von **A** erkennbar ist.







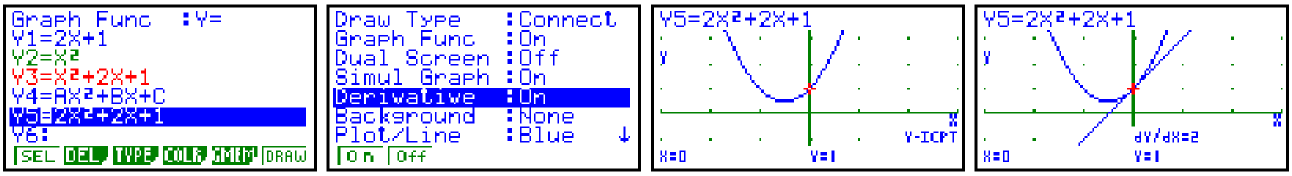


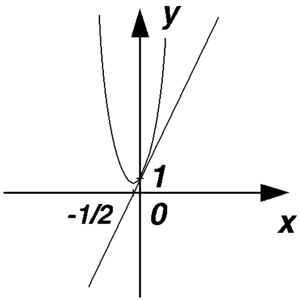
Zusammenfassung:

Jeder Graph von $y = ax^2 + 2x + 1$ (mit $a \neq 0$, fest vorgegeben) hat den Graphen von $y = 2x + 1$ ($a = 0$) im Schnittpunkt mit der y-Achse als Tangente.
Umgekehrt ist der Graph $y = 2x + 1$ die gemeinsame Tangente an die Graphen der Kurvenschar $y = ax^2 + 2x + 1$ im Schnittpunkt mit der y-Achse.

Begründung:

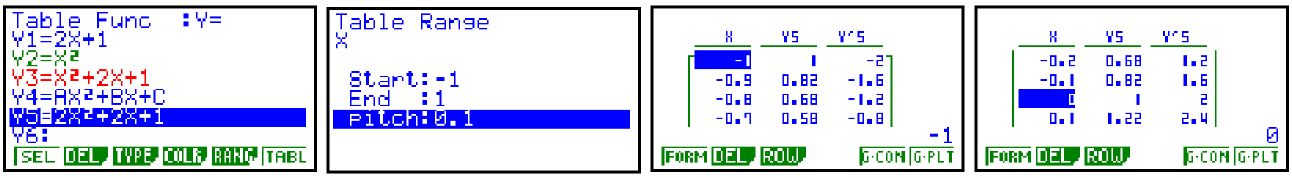
Wir beweisen mit dem Graphiktaschenrechner, dass $y = 2x + 1$ die Tangente ist, auf folgende Weise: Öffnen Sie durch Drücken von SHIFT MENU [SET UP] das **SET UP** und wählen Sie **Derivative: On** (Ableitung: ein). Im **GRAPH**-Menü geben Sie **Y1 =** $2x^2 + 2x + 1$ ein und drücken EXE.



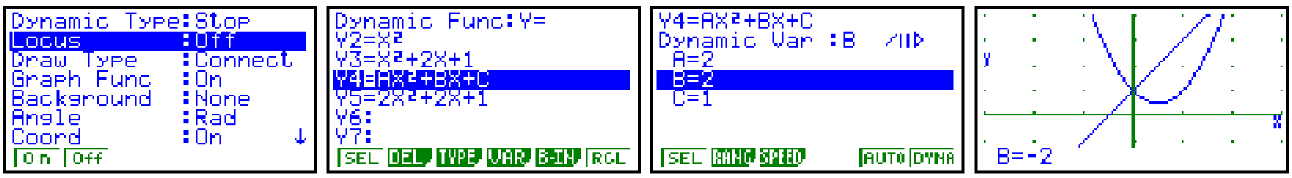


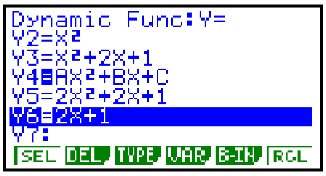
Nachdem der Graph gezeichnet ist, drücken Sie F4 zur Auswahl von **[Tang]** (Tangentenanstieg) in der sich öffnenden Menüleiste mit F2. Drücken Sie die Cursor-nach-rechts-Taste, bis für die im Display angezeigte x-Koordinate $x = 0$ erreicht ist. (Gleichzeitig bewegt sich eine +-Marke auf dem Graphen.) Drücken Sie EXE, wenn $x = 0$ erreicht ist. Es wird nunmehr eine Tangente an der markierten Stelle mit dem y-Abschnitt $y = 1$ auf der y-Achse gezeichnet. Bei einigen Einstellungen des Betrachtungsfensters [**V-Window**] kann mit der +-Marke die x-Position nicht exakt gleich **0** erreicht werden. Achten Sie darauf, das Betrachtungsfenster nicht zu weit zu zoomen.

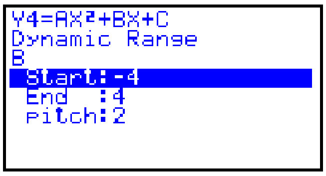
Für eine numerische Überprüfung der Koordinaten und Ableitung wählen Sie im Hauptmenü das **TABLE**-Menü aus und legen den Tabellenbereich (F4 **[RANG]** - RANGE) von **-1** bis **1** mit der Schittweite **0,1** (Eingabe: **0.1**) fest und drücken EXE.

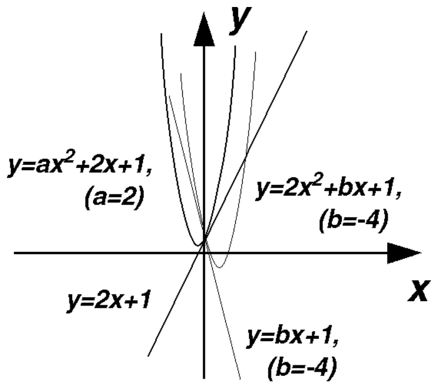


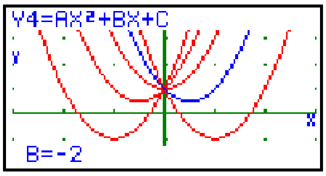
George: Ich habe den Graphen $y = 2x^2 + bx + 1$ untersucht, weil mich interessiert hat, was ausgegeben wird. Hier ist das Ergebnis – ich habe **DYNA**-Menü (mit Locus: Off) benutzt:











Die Kurvenschar
$y = 2x^2 + bx + 1$

Lehrer K.: Zweckmäßigerweise wird der Graph $y = 2x^2 + bx + 1$ wie folgt dargestellt. Zeichnen Sie eine Parabel, so dass der Graph $y = bx + 1$ die Tangente an diese Parabel im Punkt $\mathbf{P}(x, y) = \mathbf{P}(0, 1)$, ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse, ist. Ist der Koeffizient des quadratischen Terms konstant ($= 2$), ist diese Parabel mit dem Graphen von $y = 2x^2$ kongruent, also von gleicher Form. Den Grund wollen wir in der nächsten Unterrichtsstunde zu finden versuchen.

Wir sehen ferner, dass sich die Graphen $y = x^2 + 2x + c$ entlang einer Linie parallel zur y-Achse aufwärts oder abwärts bewegen (Kurvenschar mit dem Scharparameter c).

Jetzt werden Sie die folgende Behauptung verstehen:

> Allgemein können wir den Graphen $y = ax^2 + bx + c$ zeichnen, indem wir den Graphen $y = ax^2$ so verschieben, dass die Gerade $y = bx + c$ die Tangente an seinem Schnittpunkt $\mathbf{P}(0, c)$ mit der y-Achse ist.

Sie sehen, das Faksimile-Prinzip ist sehr nützlich. In der nächsten Unterrichtsstunde wollen wir unser Verständnis für Graphen mithilfe des Graphiktaschenrechners weiter schärfen.

Untersuchen Sie inzwischen, falls Sie interessiert sind, die Graphen $y = x + \sin x$ und $y = x^2 + \sin x$.