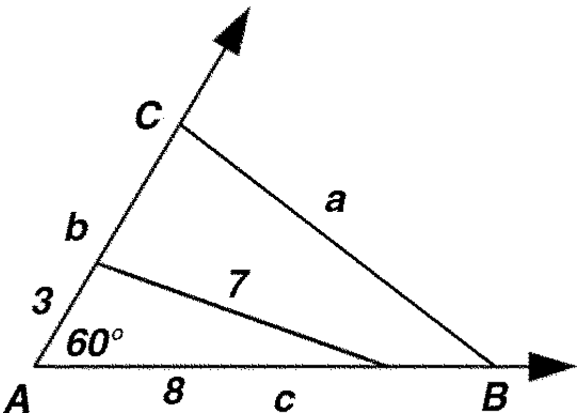
12. Wieviele Dreiecke haben einen Innenwinkel von 60° -
Diskussion über ganzzahlige Seitenlängen im Kosinussatz **(CASIO)**

Zielstellung:
Während im rechtwinkligen Dreieck ganzzahlige Seitenlängen bekannt sind (pythagoreische Zahlen), wird nun dieser Frage in Dreiecken mit einem Innenwinkel von 60° nachgegangen.

Mathematischer Hintergrund: Kosinussatz, Diophantische Gleichung

Aus der ersten Abbildung geht hervor, dass es unendlich viele Dreiecke mit einem Innenwinkel von 60° gibt. Wir wollen aber an das Problem anders herangehen. Wir können ein Dreieck mit einem Innenwinkel von 60° nicht konstruieren, indem wir drei beliebige Strecken zeichnen. Es muss eine Beziehung zwischen den Längen der drei Seiten geben. Diesem Gedanken wollen wir uns jetzt widmen, wenn alle drei Seiten ganzzahlige Längen besitzen, z.B. **7**, **3**, **8**. (Im Folgenden wird ein Dreieck mit den drei Seiten a, b und c durch das Tripel $\{a, b, c\}$ bezeichnet.)



Aufgabenstellung 1:

Wir wollen uns das Verhältnis dreier Strecken mit ganzzahligen Längen überlegen, die ein Dreieck mit einem Innenwinkel von 60° bilden.

Lösungsweg:

Auf das Dreieck $\triangle$ABC wenden wir den Kosinussatz an.

Aus $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60°$ folgt $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ... **(1)**

Wir wollen die nichtlineare Gleichung **(1)** mit drei Variablen ganzzahlig lösen (Diophantische Gleichung) und formen **(1)** wie folgt um:

$a^2 = (b-c)^2 + bc$, d.h. $a^2 - (b-c)^2 = bc$ und $(a-b+c)(a+b-c) = bc$ ... **(2)**

Nun zerlegen wir **(2)** in die folgenden zwei Terme, wobei **m** und **n** natürliche Zahlen sind:

$(a-b+c) = b\,\mathrm{n/m}$ ... **(3)**

$(a+b-c) = c\,\mathrm{m/n}$ ... **(4)**

(4) - (3) ergibt $2b - 2c = c\,\mathrm{m/n} - b\,\mathrm{n/m}$, d.h. $c = b(\mathrm{n}^2+2\mathrm{mn})/(\mathrm{m}^2+2\mathrm{mn})$ ... **(5)**

Jetzt eliminieren wir c durch Addition von **(3)** und **(4)** unter Verwendung von **(5)** und erhalten:

$2a = b\,\mathrm{n/m} + b\,\mathrm{m/n} \times (\mathrm{n}^2+2\mathrm{mn})/(\mathrm{m}^2+2\mathrm{mn})$, d.h. $$a = b(m^2+mn+n^2)/(m^2+2mn) \quad ... \quad (6)$$

Mit **(5)** und **(6)** ist das Verhältnis der ganzen Zahlen $\{a, b, c\}$ bestimmt:

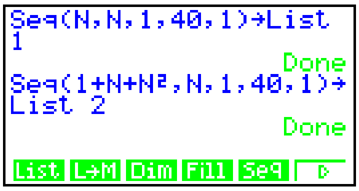
$$a : b : c = (m^2+mn+n^2) : (m^2+2mn) : (2mn+n^2) \quad ... \quad (7)$$

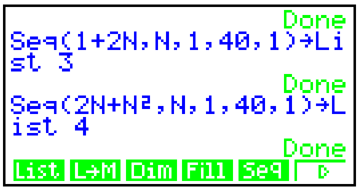
Das Ergebnis ist nun aber alles andere als anschaulich. Wir untersuchen deshalb das Verhältnis **(7)** mit dem Graphiktaschenrechner.

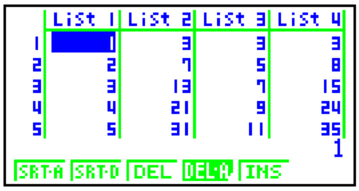
Für **m = 1**, **n = 1, 2, ..., 40** definieren wir im **RUN**-Menü folgende Listen, die wir dann im **LIST**-Menü einsehen können:

Seq(N, N, 1, 40, 1) → List1 **Seq(1+ N + N², N ,1, 40, 1) → List2**

Seq(1+ 2N, N ,1, 40, 1) → List3 **Seq(2N + N², N, 1, 40, 1) → List4**



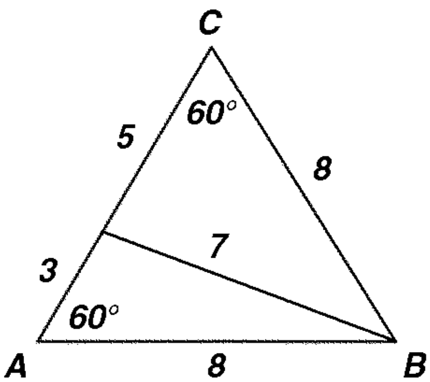




Ganz rasch gibt uns der Rechner die Tabelle rechts aus. Das Dreieck **{7, 3, 8}** finden wir allerdings nicht. Warum?
Das liegt daran, dass **(7)** ein Verhältnis liefert. Wir müssen also nach eine Gruppe von drei Zahlen suchen, die Vielfache von **{7, 3, 8}** sind, und finden eine solche Gruppe bei **n = 4**.

Dieses Problem soll nun genauer in meinem Unterricht behandelt werden.

Ein Schüler zeichnete ein Dreieck mit **{7, 3, 8}**, indem er ein Dreieck mit **{7, 5, 8}** aus dem rechts abgebildeten gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge **8** abtrennte (**8 - 5 = 3**). Ein anderer Schüler benutzte den Kosinussatz und versuchte, ein Dreieck mit **{13, 7, 15}** zu zeichnen, indem er ein Dreieck mit **{13, 8, 15}** aus dem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge **15** abtrennte (**15 - 8 = 7**). Das Ergebnis ist ein neues Dreieck mit einem Winkel von **60°**, so dass wir ein weiteres Verhältnis ganzer Zahlen gewonnen haben.



Aus **(7)** folgt das Ergebnis (ein weiteres Verhältnis dreier Seiten $\{a, b, c\}$, bei **m = 1**)

$$\boxed{a : b : c = (n^2+n+1) : (2n+1) : (n^2+2n) \quad ... \quad (8)}$$

und mit unserer obigen Entdeckung:

$$a : b : c = (1+n+n^2) : (2n+n^2-(1+2n)) : (2n+n^2)\text{, d.h.}$$

$$\boxed{a : b : c = (n^2+n+1) : (n^2-1) : (n^2+2n) \quad ... \quad (9)}$$

Um bestmöglich zu zeigen, wie nützlich der Graphiktaschenrechner sein kann, werden weitere Aufgabenstellungen unterbreitet:

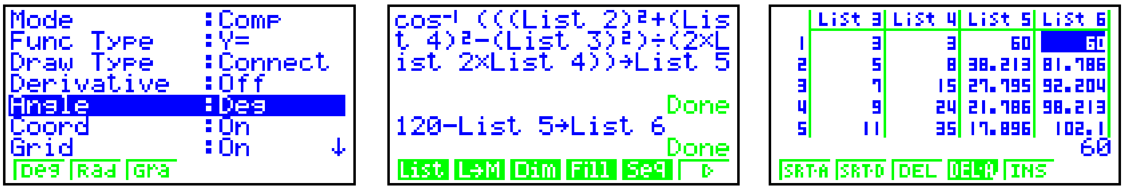
Aufgabenstellung 2:

*Wir wollen die Veränderungen der anderen Innenwinkel eines Dreiecks mit dem **60°**-Winkel bei **A** untersuchen.*

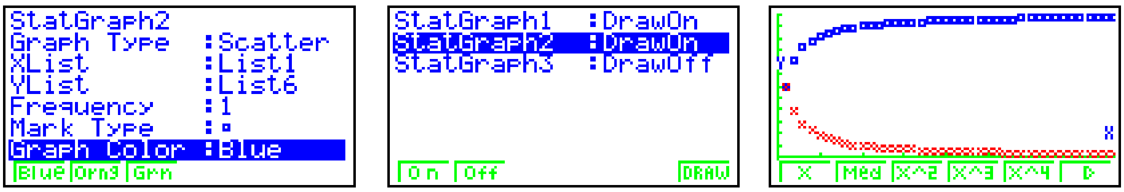
Mit einem Graphiktaschenrechner brauchen wir für die Lösung viel weniger Zeit. Ausgehend von Tabelle 1 (List1 bis List4) geben wir **∢ABC** in **List5** ein, indem wir den Kosinussatz anwenden.

$$\cos \sphericalangle ABC = (a^2 + c^2 - b^2) / 2ac \text{, d.h. } \sphericalangle ABC = \arccos\left((a^2 + c^2 - b^2) / 2ac \right)$$

Wir nutzen dazu die Listenarithmetik im **RUN**-Menü, nachdem zuvor im **SET UP** der Winkelmodus auf Altgrad (Deg) eingestellt wurde. **List6** enthält den dritten Winkel **∢BCA = 120° - ∢ABC**:



Mit den bisherigen Werten haben wir die rechts stehende Tabelle erhalten. Für **n = 1** entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge **3**, und die Winkel in **List5** und **List6** sind **60°**.
Jetzt veranschaulichen wir uns die Änderungen der Winkel.
Im **STAT**-Menü können wir die Winkelwerte von **List5** und **List6** gleichzeitig in einem Scatterplot gegenüberstellen. Dazu müssen wir im x-y-Koordinatensytem auf der x-Achse die Werte von **n** und auf der y-Achse die jeweiligen Winkelwerte abtragen, indem wir Datenpaare über **(List1,List5)** bzw. **(List1, List6)** in **StatGraph1** bzw. **StatGraph2** definieren:



In den rechts abgebildeten Graphen erkennen wir, dass sich die beiden anderen Winkel rasch verändern, wenn wir den Wert von b um **2** erhöhen, bis b den Wert **9** erreicht, und wenn **n > 9** wird, geht **∢ABC** allmählich gegen **0°** und **∢BCA** gegen **120°**. Ich nenne hier ein Beispiel, bei dem uns die naheliegende Frage eines Schülers zu einer Anzahl weiterer Entdeckungen führen kann. Wenn Sie interessiert sind, beschäftigen Sie sich mit den folgenden Aufgabenstellungen:

Aufgabenstellung 3:

Untersuchen wir das Verhältnis der drei Seiten in **(7)** *für* **m = 2**.

Aufgabenstellung 4:

Untersuchen wir das Verhältnis der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, das einen Winkel von **90°** *hat. (Pythagoreische Zahlen im Satz des Pythagoras:* $a^2 = b^2 + c^2$ *)*

Ich hoffe, es gelingt Ihnen, aus einer Schülerfrage einen Weg zu unerwarteten Entdeckungen abzuleiten und die angeführten Aufgabenstellungen zu nutzen, um der Fantasie der Schüler Genüge zu tun.