5. Ein Klempner plant seine Arbeit mit dem Graphiktaschenrechner - Ein Lehrer-Schüler-Dialog: Blechkästen aus Kupferblech und minimale Kosten **(Maki)**

Zielstellung:

Im vorangehenden Beitrag wurde dargestellt, wie die Entwicklung der Fähigkeiten der Schüler stimuliert werden kann. Während die jetzige Problemstellung ähnlich wie die der "größtmöglichen Faltschachtel" ist, wird sie in der folgenden Unterrichtsstunde doch von der entgegengesetzten Seite aus angegangen. Machen Sie sich mal den Spaß, den Standpunkt eines Klempners einzunehmen.

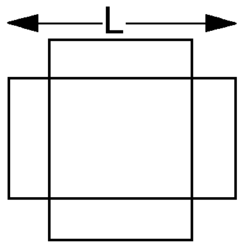
Mathematischer Hintergrund: Untersuchung der Veränderung von Funktionswerten

Das **"Problem des geringsten Blechbedarfs" (Min Tin)** ist ein Optimierungsproblem, das an das **"Problem der größtmöglichen Faltschachtel" (Max Box)** anschließt. Diesmal wird die Fläche eines Blechbehälters minimiert, ohne dass das Volumen geändert wird. Für die Formulierung der Aufgabe wurden Teile einer Problemstellung herangezogen, die *G. Corris* von der Millfield School in England in [1] veröffentlicht hat.
Um das Erfassen der Behandlung der Aufgabenstellung zu erleichtern, wird das Unterrichtsgeschehen als Lehrer-Schüler-Dialog wiedergegeben.

Lehrer: *"Ein Klempner hat das folgende Fax erhalten:"*

Fax (die Problemstellung):
Liefern Sie mir baldmöglichst 100 Stück eines quaderförmigen Messbehälters aus Kupferblech mit einem Volumen von **500 cm³**. Die Maße des Behälters sind gleichgültig.

Der Klempner freute sich über den Auftrag, schnitt vier identische Quadrate an den Ecken eines Stücks Kupferblech aus und bog aus dem Blech einen Behälter mit **500 cm³** Inhalt zurecht. *"Welche Abmessungen hat jeder dieser 100 Behälter?"*



Schüler A: *"Ich denke, es ist leichter, wenn wir uns zuerst nur mit einem anstelle von 100 Behältern beschäftigen. Wir werden sicher das Problem lösen können, wenn wir so herangehen, dass wir uns fragen: Wie lang muss die Seitenlänge L eines Quadrats sein, aus dem ein Behälter mit einem Volumen von* **500 cm³** *hergestellt werden kann?"*

Schüler C: *"Um einen Behälter aus einem Quadrat der Seitenlänge L fertigen zu können, müssen wir die vier Ecken herausschneiden. Wir können also die Problemstellung genauso wie das vorhergehende Faltschachtel-Problem behandeln."*

Lehrer: *"Wie lautet die Formel, wenn die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate gleich H ist ?"*

Schüler B: *"Die Höhe H des Behälters, die sich aus der Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate ergibt, führt zur Formel für das Volumen:"* $V = H(L-2H)^2,\ 0 < H < L/2$.

Schüler A: *"Laut Fax ist das Volumen gegeben.* V = **500 cm^3** *ist eine Konstante, und die Formel von Schüler B geht über in:"*

$$500 = H(L - 2H)^2,\quad L > 2H, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(1)}$$

Schüler C: *"Diese Gleichung kann nicht gelöst werden. Wir haben zwei Variable und nur eine Gleichung." (Kurzes Schweigen)*

Schüler A: *"Wenn wir* H *irgendeinen Wert zuordnen, können wir eine quadratische Gleichung formulieren und nach* L *auflösen."*

Lehrer: *"OK. Jeder nimmt für* H *seine Sitznummer und löst die sich ergebende quadratische Gleichung nach* L *auf. Das wird sicher interessant und verschafft uns etwas Übung im Lösen quadratischer Gleichungen.*

Schüler B: *"Dividieren der Gleichung* **(1)** *durch* H *und Formulieren einer quadratischen Gleichung für* L *ist leicht. Die Formel lautet:"*

$$L^2 - 4HL + 4H^2 - 500/H = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(2)}$$

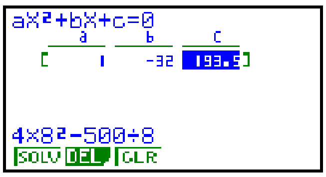
Lehrer: *"Wie beim Faltschachtel-Problem schreibt jeder seine Lösung in die Tabelle an der Tafel."*

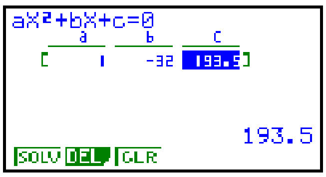
Schüler C: *"Ich habe Sitznummer* **8***, setze in* **(2)** *also* H *gleich* **8** *und löse die quadratische Gleichung nach* L *auf. Die Lösung von* $L^2 - 4 * 8L + 4 * 8^2 - 500/8 = 0$ *lautet ... ? "*

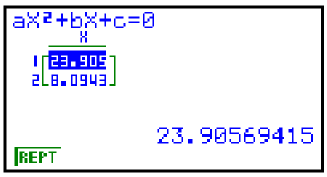
Lehrer: *"Das ist genau der richtige Zeitpunkt für den Graphiktaschenrechner, dessen Möglichkeiten uns zur Lösung verhelfen werden. Siehe auch unter* ***"Lösung der quadratischen Gleichung über das EQUA-Menü"****, wofür beim Faltschachtel-Problem in einer vorangehenden Unterrichtsstunde die Operationenfolge mit dem Taschenrechner beschrieben wurde."*

Die etwas umfangreicheren Berechnungen, die zur Lösung der quadratischen Gleichung erforderlich sind, werden dem Rechner überlassen. Dieses Lernverfahren ist eine der Möglichkeiten, Schüler wie C, die die Mathematik "nicht sonderlich lieben", von mathematischer Plackerei zu entlasten.

Die Operationenfolge mit dem Taschenrechner zum Lösen einer quadratischen Gleichung beim Faltschachtel-Problem erforderte den Aufruf des Eingabefensters für eine quadratische Gleichung innerhalb des **EQUA**-Menüs:







Betrachtet nur den Term links unten auf dem Display. Für jeden Koeffizienten kann ein Formelterm eingegeben werden. Nachdem alle Koeffizienten (wie im zweiten Bild dargestellt) eingegeben worden sind, **F1** **[SOLV]** drücken.

Die zwei Lösungen der quadratischen Gleichung sind L = **23,91** und L = **8,09** .

Schüler C: *"Wenn die Seitenlänge des ausgeschnittenen Quadrats gleich* **8cm** *ist, muss das Ausgangsquadrat eine Seitenlänge von* **8,09cm** *oder* **23,91cm** *haben, damit ein Behälter mit* **500cm^3** *Volumen gefertigt werden kann."*

Schüler B: *"Der Wert* **8,09** *löst zwar die quadratische Gleichung; aus einem Quadrat mit der Seitenlänge* **8,09cm** *kann man aber keine Quadrate mit der Seitenlänge* **8cm** *ausschneiden."*

Schüler A: *"Schau dir Formel* **(1)** *an. Ist die Bedingung* $L > 2H$ *nicht erfüllt, bedeutet das, dass der Behälter nicht hergestellt werden kann. Deshalb ist die einzige Lösung der Gleichung von C der Wert* **23,9cm**.*"*

Lehrer: *"Füllt jetzt die Tabelle aus."*

Tabelle 1: Die verschiedenartigen 500cm³-Behälter der einzelnen Schüler

H ... Sitznummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
L ... gemäß **(2)**	24,4	19,8	18,9	19,2	20,0	21,1	22,5	23,9	25,5	27,1	28,7	30,5	32,2	...

Schüler C: *"Es ist erstaunlich, dass so viele Behälter mit verschiedenen Abmessungen dasselbe Volumen haben können."*

Lehrer: *"Hm, aber welchen Behälter hat der Klempner nun tatsächlich produziert ? "*

Schüler B: *"Jedenfalls hat er sich gefreut, dass er eine beliebige Abmessung für den* **500cm³**-*Behälter wählen durfte."*

Schüler C: *"Wir sollten uns also überlegen, welcher Behälter die geringsten Materialkosten verursacht."*

Schüler A: *"Ja! Sicher hat er den Behälter mit der kleinstmöglichen Blechfläche ausgesucht."*

Schüler B: *"Die Fläche* A *kann geschrieben werden als* $A = L^2 - 4\,H^2$. *Wir sollten also die errechneten Werte* L *und* H *in diese Formel einsetzen."*

Lehrer: *"OK. Fügen wir also der Tabelle1 eine Zeile "* Fläche A*" hinzu."*

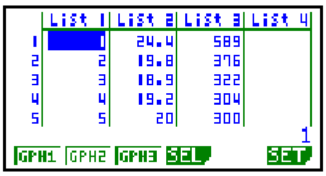
Tabelle 2: Ausgabewerte für die Fläche (werden vom Graphiktaschenrechner sofort erzeugt)

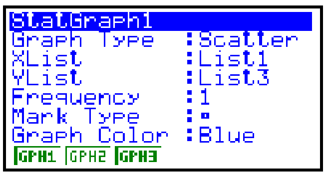
H ... Sitznummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
L ... gemäß **(2)**	24,4	19,8	18,9	19,2	20,0	21,1	22,5	23,9	25,5	27,1	28,7	30,5	32,2	...
A ... Fläche	589	376	322	304	300	302	308	315	324	333	342	352	361	...

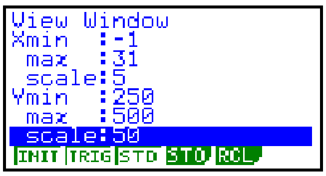
Schüler C: *"Wir suchen uns jetzt den Behälter mit der kleinsten Fläche."*

Schüler A: *"Wir sollten die Liste auch einmal auf dem Graphiktaschenrechner graphisch darstellen."*

Vorgehensweise zur graphischen Veranschaulichung verbundener Listen (Zahlenpaare):
Den Listeneditor (**STAT**-Menü), wie in der vorangehenden Faltschachtel-Aufgabe gelernt, aufrufen und die Datenlisten eingeben:







Sitznummern in **List1** und zugeordnete Flächen in **List3** eingeben. Dann F1 [**GRPH**] drücken --> F6 [**SET**]. Den Graphiktyp wählen durch Drücken von F1 [**Scat**]. F1 [**List1**] für die Eingabe in **XList** und F3 [**List3**] für die Eingabe in **YList** drücken. Dann EXE --> SHIFT F3 [**V-Window**] drücken. Minima und Maxima beider Achsen einstellen, wie im Einstellfenster (View Window) zu sehen. Die Graphik erzeugen durch Drücken: EXE --> F1 [**GRPH**] --> F1 [**GPH1**].

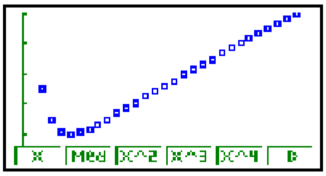
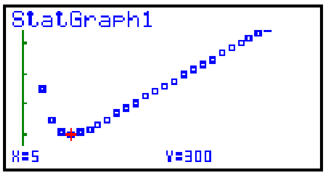



Bild 1: StatGraph1

Falls Probleme auftreten:

a) Wenn das Minimum in der Graphik nicht zu sehen ist, den Graphen in der gewünschten Richtung mit den Cursor-Tasten ( ) scrollen.

b) Wenn der Versuch mißlingt, **List1** oder **List3** einzugeben, weil in diesen Listen bereits Daten enthalten sind, **List1**-Daten löschen durch Drücken MENU --> 4 [**LIST**](Listeneditor) --> F4 [**DEL-A**] --> F1 [**YES**]. Auf gleiche Weise **List3**-Daten löschen. Eine Dateneingabe ist hier möglich. Zur Rückkehr zum Anfangsdisplay des **STAT**-Menüs nach Beendigung der Eingabe MENU --> 4 [**STAT**] drücken.

Schüler C: *"Wenn man sich den Graphen anschaut, könnte man das Minimum der Flächen beim vierten Wert (Nr. 4) vermuten."*

Schüler A: *"In der Tabelle ist es der fünfte Wert (Nr. 5)."*

Lehrer: *"Die Fläche für den ersten Wert beträgt* **589cm³** *und wird auf dem Display gar nicht dargestellt, denn der Ymax-Wert, den wir im Einstelldisplay gewählt haben, ist* **500**.*"*

Schüler B: *"Dann hat also der Klempner einen Behälter mit einer Fläche von* **300cm²** *durch Ausschneiden von Quadraten mit der Seitenlänge* **5cm** *aus dem Kupferblech hergestellt. Stimmt das? "*

Lehrer: *"Das geht so aus den Daten hervor."*

Schüler C: *"Was kostet eigentlich das Kupferblech? "*

Lehrer: *"Setzen wir* **0,75 Euro-Cent** *je* **cm²** *an."*

Schüler B: *"So betragen seine Materialkosten* **225** *(* **= 300 ∗ 0,75** *)* **Cent** *je Behälter, also* **22500** *(* **= 100 ∗ 100** *)* **Cent = 225€** *für* **100** *Behälter."*

Schüler A: *"Für meine Sitznummer* **15** *ist die Blechfläche* **380cm²** *. Damit kosten die* **100** *Behälter* **380 ∗ 0,75 ∗ 100 = 285€** *Das sind* **80€** *mehr als die Behälter kosten, die der Klempner herstellt."*

Schüler C: *"Der Klempner hat eben seine Arbeit mit dem Graphiktaschenrechner geplant!"*

Hinweise:

Das **"Problem des geringsten Blechbedarfs" (Min Tin)** ist ein hervorragendes Beispiel dafür, wie die Mathematik im täglichen Leben nutzbringend eingesetzt werden kann. Das Minimum kann auch mit der Differenzialrechnung leicht ermittelt werden. Es bedeuten wie oben:

L ... Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats, H ... Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate, V ... Volumen mit dem Flächenbedarf A. Dann gelten mit $L > 2H$ die Gleichungen

$$V = H(L - 2H)^2 \quad \text{............ (1)} \qquad A = L^2 - 4H^2 \quad \text{............ (2)}$$

Formel **(1)** nach L auflösen: $L = 2H + \sqrt{V/H}$. Danach L in **(2)** substituieren.

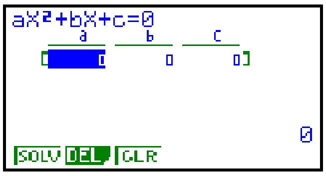
Man erhält:

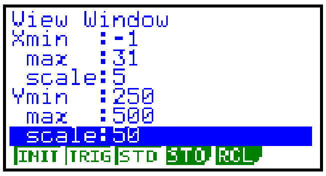
$$A = 4\sqrt{VH} + V/H \quad .... \quad \textbf{(3)}$$

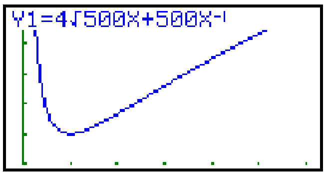
Formel **(3)** liefert $dA/dH = 2\sqrt{V/H} - V/H^2$. Somit $dA/dH = 0$ für $H = \sqrt[3]{V/4}$.

Zur Bedienung des Graphiktaschenrechners:

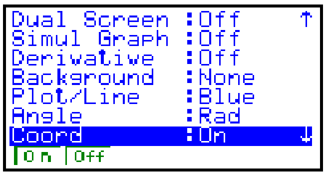
Formel **(3)** für $V = 500$ als Graphen darstellen:







Aus dem Haupt-Menü (**MAIN MENU**) das **GRAPH**-Menü auswählen und den Formelterm mit $x = H$ eingeben. Dann SHIFT F3 [**V-Window**] drücken und die gezeigten Einstellwerte eingeben. Zum Zeichnen des Graphen EXE --> F6 [**DRAW**] drücken.



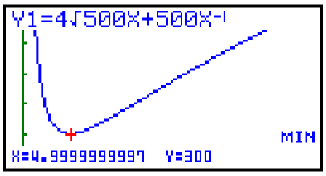


Bild 2: Graph Y1

Das vorletzte Bild zeigt das **SET UP** zum **GRAPH**-Menü. Das **Min** wurde über **G-Solv** ermittelt.

Im allgemeinen kann die optimale Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate aus $H = \sqrt[3]{V/4}$ bestimmt werden. Diese Länge kann in $L = 2H + \sqrt{V/H}$ eingesetzt werden, um die optimale Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates zu ermitteln.

Der aus Tabelle 2 abgeleitete Graph (Bild 1: StatGraph1) und der Y1-Graph von Bild 2 sind einander ziemlich ähnlich.

Die hier abgehandelte Problemstellung ist ein konkretes Beispiel zur Anwendung des Graphiktaschenrechners, um Extremwertaufgaben ohne höhere Mathematik zu lösen.

Anmerkung des Herausgebers:

Diese Aufgabenstellung kann aus Sicht der Analysis auch wie folgt formuliert werden:

$$A = A(H,L) = L^2 - 4H^2 \longrightarrow \text{Min}$$

unter der Nebenbedingung $V = V(H,L) = H(L - 2H)^2 = 500$.

Literaturhinweis:

[1] **Max Box Min Tin** (in englisch, Maximales Volumen bei minimaler Oberfläche) von G.Corris, in: ***Mathematics in School***, Vol. 22, Nr. 3 (May 1993), 36 - 39.

