3. Berechnungen zur Konservendose - Kreiszylinderberechnung bei gegebener Oberfläche (Osawa)

Zielstellung:

Wir wollen uns damit beschäftigen, in welcher Weise beim Abfüllen in Dosen die Zielstellung realisiert wird, eine gegebene Materialmenge so zu verarbeiten, dass ein Behälter maximalen Fassungsvermögens entsteht.

Ein Vorläufer der Konservendosen, die uns heutzutage überall begegnen, war in Frankreich vorgeschlagen und von Napoleon im Jahre 1804 in die praktische Nutzung überführt worden. Die Blechdosen, wie wir sie heute kennen, wurden 1810 in England entwickelt. In Japan wurde das Konservieren in Dosen im Jahre 1871 eingeführt.

Wenn ein Schüler die Zylinderform untersucht, die heute für Dosen die weitaus üblichste ist, kann er erkennen, dass Dosen sehr überlegt produziert werden. Das Konservieren in Dosen ist in vielerlei Hinsicht vorteilhaft: hinsichtlich des Materialeinsatzes, der Einfachheit der vollständigen Abdichtung und Sterilisation, Transportierbarkeit, Leichtigkeit des Öffnens und weiterer Aspekte.

Unser Beispiel beschäftigt sich mit dem Aspekt der Effizienz des Materialeinsatzes, denn die Zylinderform der Dose hat sich nicht nur deshalb herausgebildet, weil sie für das Abfüllen zahlreicher Nahrungsmittel geeignet ist, sondern auch weil sie es gestattet, aus einer gegebenen Materialmenge einen Behälter maximalen Volumens herzustellen.
Die Schüler werden sich davon überzeugen, indem sie für die entsprechenden mathematischen Operationen den Graphiktaschenrechner einsetzen.

Vorschlag zur Unterrichtsgestaltung:

1. Bestimmung von Oberfläche und Volumen einer gegebenen Konservendose

Das Ausmessen der Dose ***A***, vgl. Bild 1, (z. B. Orangendose der Firma ***H***) ergab einen Zylinderdurchmesser von **7,40 cm** und eine Zylinderhöhe von **9,53 cm.**
Berechnet aus diesen Maßen die für die Dose ***A*** benötigte Menge Weißblech, d.h. die Oberfläche A_0 der Dose, und das Volumen V_0 der Dose.
Die Oberfläche A_0 der Dose kann nach der Formel
2 × Flächeninhalt der Grundfläche + Flächeninhalt der Mantelfläche
berechnet werden:

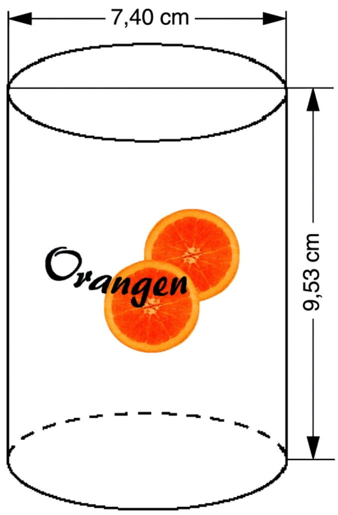

Bild 1: Dose ***A*** der Firma ***H***

$$A_0 = 2 \times \pi \times (7{,}4 / 2)^2 + \pi \times 7{,}4 \times 9{,}53 = 307{,}5682\ [\mathrm{cm}^2]$$

Das Volumen V_0 der Dose ergibt sich aus der Formel **Flächeninhalt der Grundfläche × Höhe**

$$V_0 = \pi \times (7{,}4 / 2)^2 \times 9{,}53 = 409{,}8701\ [cm^3]$$

Diese Berechnungen können im **RUN**-Menü des Graphiktaschenrechners ausgeführt werden. Weil der Graphiktaschenrechner den Rechenweg (Eingabeformel) auf dem Display anzeigt, entstehen weniger Rechenfehler. Im Folgenden wird dargestellt, wie die Berechnung auszuführen ist.

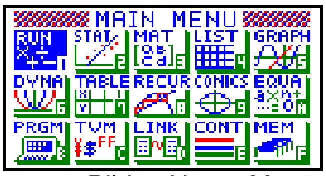

Bild 2: Haupt-Menü

Um in das Hauptmenü (**MAIN MENU**) zu gelangen, [MENU] drücken (Bild 2).

Mit den Cursor-Tasten ( ) auf **RUN** gehen und [EXE] drücken.

Dadurch wird im Graphiktaschenrechner das Eingabemenü zur Ausführung einer numerischen Berechnung geöffnet (Bild 3).

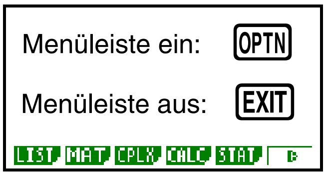

Bild 3: **RUN**-Menü

Tastenfolge:

[2] [×] [SHIFT] [EXP] [π] [×] [(] [7] [.] [4] [÷] [2] [)] [x^2] [+]
[SHIFT] [EXP] [π] [×] [7] [.] [4] [×] [9] [.] [5] [3] [→] [ALPHA] [X,θ,T] [A] [EXE]

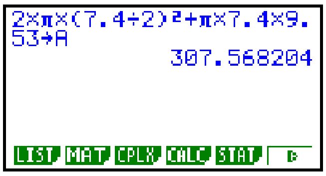

Bild 4: Oberfläche **A**

Diese Eingabe ergibt den Wert **307,5682 cm²** für die Oberfläche (Bild 4).

Tastenfolge:

[SHIFT] [EXP] [π] [×] [(] [7] [.] [4] [÷] [2] [)] [x^2] [×] [9] [.] [5] [3]
[→] [ALPHA] [2] [V] [EXE]

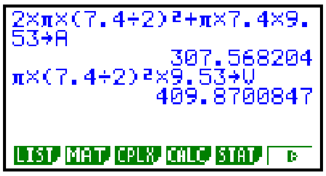

Bild 5: Volumen **V**

Diese Eingabe liefert den Wert **409,8701 cm³** für das Volumen (Bild 5).

2. Bestimmung des größtmöglichen Volumens

Als nächstes bestimmen wir das größtmögliche Volumen der zylindrischen Dose für die gegebene Blechoberfläche von **307,5682 cm²** aus dem Unterrichtsbeispiel im Abschnitt 1.

Mit dem Radius x (in cm) der Zylindergrundfläche und der Höhe h (in cm) des Zylinders ergeben sich die Oberfläche A_0 (**307,5682 cm²**, fest vorgegeben) und das Volumen y (in cm³) zu

$$A_0 = 2\pi x^2 + 2\pi x h \quad \dots \quad (1) \qquad \text{und} \qquad V_0 = y = \pi x^2 h \quad \dots \quad (2)$$

Aus **(1)** folgt $\quad h = (A_0 - 2\pi x^2) / (2\pi x) \quad \dots \quad (1')$

Durch Einsetzen von **(1')** in Gleichung **(2)** ergibt sich

$$y = \pi x^2 (A_0 - 2\pi x^2) / (2\pi x) = A_0 x / 2 - \pi x^3, \quad \text{d.h.} \quad y = A x / 2 - \pi x^3 \quad \dots \quad (3)$$

Bei vorgegebener Blechfläche **A** ergibt sich für den Radius x das Dosenvolumen y nach Formel **(3)**.

Es kann nun das **GRAPH** - Menü des Graphiktaschenrechners zur Bestimmung von y_{max} benutzt werden. Das wird wie folgt realisiert:

[MENU] drücken. Mit den Cursor-Tasten ( ) auf **GRAPH** gehen und [EXE] drücken.

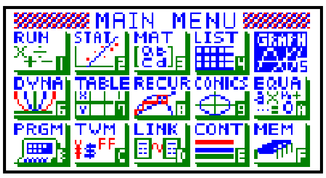

Bild 6: Haupt-Menü

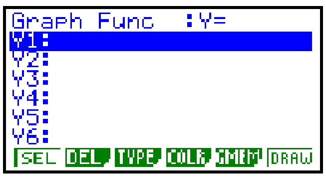

Bild 7: **GRAPH**-Menü

Vor dem Zeichnen des Graphen wird das **Betrachtungsfenster** eingestellt (sichtbarer x- und y-Bereich und Achsenskalierung).
Um das Display zur Einstellung des Betrachtungsfensters (View Window) aufzurufen (Bild 8), SHIFT F3 [V-Window] drücken.

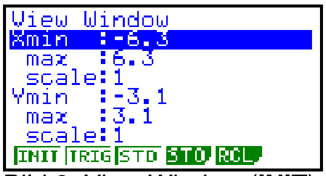

Bild 8: View Window (**INIT**)

Zum Einstellen der Werte mit den Cursor-Tasten ( ) nach oben oder unten gehen.

In diesem Beispiel sind folgende Einstellungen vorzunehmen:

Xmin markieren (Minimalwert für die x-Koordinate) und **0** drücken. EXE
max markieren (Maximalwert für die x-Koordinate) und **10** drücken. EXE
scale markieren (Skalierung der x-Achse) und **1** drücken. EXE
Ymin markieren (Minimalwert für die y-Koordinate) und **0** drücken. EXE
max markieren (Maximalwert für die y-Koordinate) und **600** drücken. EXE
scale markieren (Skalierung der y-Achse) und **100** drücken. EXE (Bild 9)

Bild 9: View Window

Zur Rückkehr zum **GRAPH** - Menü, vgl. Bild 7, wiederum EXE drücken.

Zur Eingabe der Formel
ALPHA X,θ,T [A] ÷ 2 × X,θ,T − SHIFT EXP [π] × X,θ,T ∧ 3
drücken (Bild 10).

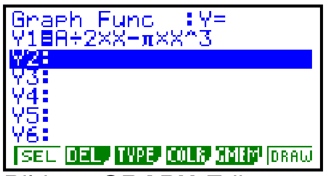

Bild 10: **GRAPH**-Editor

Um den Graphen von $y = Ax / 2 - \pi x^3$ zu zeichnen, F6 [**DRAW**] oder EXE drücken (Bild 11).

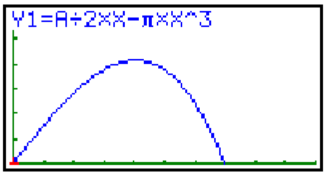

Bild 11: Graphik

Bestimmung des Maximalwertes von y, vgl. Bild 11 bis 13:
Die Trace-Funktion hilft, den Maximalwert näherungsweise zu bestimmen.

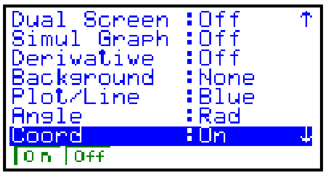

Bild 12: **SET UP**

Nun SHIFT F1 [**Trace**] drücken und mit den Cursor-Tasten den Trace-Cursor (+) nach rechts oder links ( ) auf dem Graphen bewegen.

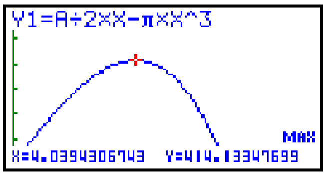

Bild 13: Maximum

Beim Bewegen des Trace-Cursors werden die jeweiligen Koordinaten der Cursor-Position unten auf dem Display angezeigt (**SET UP**: Coord: On).

Man findet über SHIFT F5 [**G-Solv**] den genauen Maximalwert:

y = **414,133477** für x = **4,0394307**.

Hinweis: Über $y' = 0$ können x_{max} und damit y_{max} exakt berechnet werden, vgl. Bild 14.

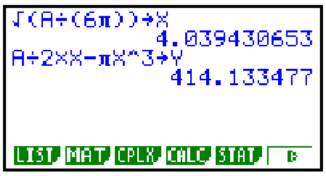

Bild 14:
Kontrolle im **RUN**-Menü

3. Vergleich des maximal möglichen Dosenvolumens mit dem Volumen der vorhandenen Konservendose

Wir vergleichen das Volumen der vorhandenen Dose V_0 (**409,8701 cm³**) mit dem maximal möglichen Volumen (**414,133477 cm³**), das bei der vorgegebenen Blechmenge (**307,5682 cm²**) erreichbar ist: $p = V_0 / V_{max} \times 100\,\% = 409{,}8701 / 414{,}133477 \times 100\,\% = 98{,}97053\,\%$.

Es ergibt sich ein Materialausnutzungsgrad von **98,97053 %**, was zeigt, dass die Dose ***A*** sehr wirtschaftlich dimensioniert worden ist.

Durch Analyse anderer Dosen können zahlreiche Beispiele für wirtschaftliche Dimensionierung gefunden werden. Ein Fass ***B*** (der Firma ***S***) hat z.B. hat einen Radius von 57,8 cm und einen Materialausnutzungsgrad von 97 %. Die Kaffeedose ***C*** (der Firma ***M***) hat einen Radius von 15,6 cm, eine Höhe von 17,3 cm und einen Materialausnutzungsgrad von 99,8 %.

In dem ausführlich dargestellten praktischen Beispiel wurden die Berechnungen mit dem Graphiktaschenrechner ausgeführt, um die grundsätzlichen Überlegungen beim Abfüllen in Konservendosen nachzuvollziehen.

Anmerkung:

Wir wollen als weiteres Beispiel die Berechnungen betrachten, in denen wir bei einem vorgegebenen Volumen $\mathbf{V = V_0 = 409{,}8701\ cm^3}$ den minimalen Materialeinsatz (Oberflächeninhalt der Dose ***A***) bestimmen.

Für den Oberflächeninhalt y (cm^2) ergibt sich bei einem Radius x (cm):

$$y = 2\pi x^2 + 2V_0 / x \ .$$

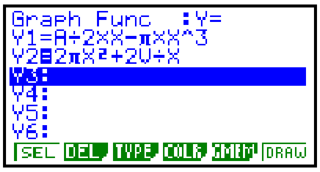

Bild 15: Graph-Func-Editor

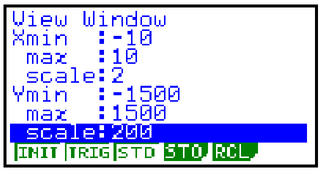

Bild 16: Fenstereinstellung

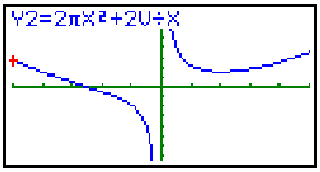

Bild 17: Graphik

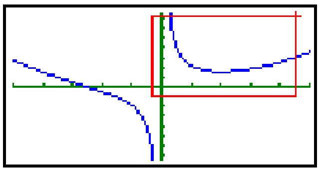

Bild 18: Zoom-Box

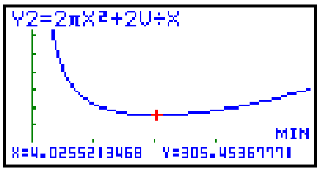

Bild 19: Minimum

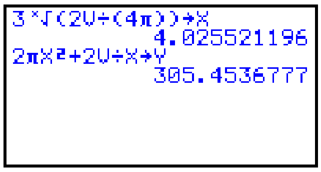

Bild 20: im **RUN**-Menü

Hinweis: Über $y' = 0$ können x_{min} und damit y_{min} exakt berechnet werden, vgl. Bild 20.

Im **GRAPH**-Menü des Graphiktaschenrechners wurden die in Bild 17 bis 19 gezeigten Graphen erzeugt. Wieder wurden die **Trace**-Funktion bzw. **G-Solv**-Funktion benutzt, um den Minimalwert von y ($\mathbf{= 305{,}4536777 = A_{min}}$) für x **= 4,025521** zu bestimmen. Die Oberfläche **A** der realen Dose ***A*** betrug $\mathbf{307{,}5682\ cm^2}$. Setzen wir den Minimalwert ($\mathbf{A_{min}}$) gleich **100 %**, dann ist der reale Wert gleich **100,692256 %**. Die Dose ***A*** ist somit sehr wirtschaftlich dimensioniert.

Literaturhinweis:

[1] **Handbuch der Konservierung** (in japanisch), Hrsg. Japan Canners Association, 1995.
Internet: http://www.jca-can.or.jp/handbook/ (Handbook - Online)

[2] **Max Box Min Tin** (in englisch, Maximales Volumen bei minimaler Oberfläche) von G.Corris, in: ***Mathematics in School***, Vol. 22, Nr. 3 (May 1993), 36 - 39.