10. Kann ein den Abhang herunter rollender Ball eingeholt werden? - Ein Beitrag zur Mathematiktagung des Japanischen Lehrerverbandes 1995 (CASIO)

Aufgabenstellung:

Yumiko hat einen Ball vom Gipfel einer Anhöhe rollen lassen. Nach einer Wartezeit von **1** [**s**] startet sie und rennt dem Ball mit einer Geschwindigkeit von **2,7** [**m/s**] nach. Der Ball rollt $0{,}5x^2$ [**m**] in x [**s**]. Kann sie den Ball einholen?

Mathematischer Hintergrund: Quadratische Funktionen

Diese Aufgabe wurde als eine weiterentwickelte Aufgabenstellung mit einer quadratischen Gleichung auf der **nationalen Mathematiktagung des Japanischen Lehrerverbands** im Jahre 1995 präsentiert.

Von Schülern wurden Ansichten wie die folgenden geäußert:

"Sie kann den Ball niemals einholen, weil der Ball offensichtlich schneller ist als sie."

und

"Sie kann den Ball nur einholen, wenn sie unmittelbar nach dessen Losrollen startet."

Ich habe den Schülern den Gebrauch des Graphiktaschenrechners erlaubt und ihnen eine gewisse Zeit zum Überlegen gegeben.

Im wesentlichen wurden die folgenden Lösungswege vorgeschlagen:

I. Wir setzen für x einen Wert ein.

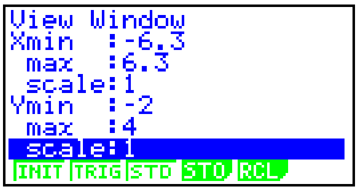
II. Wir lösen die quadratische Gleichung $0{,}5x^2 = 2{,}7(x - 1)$.

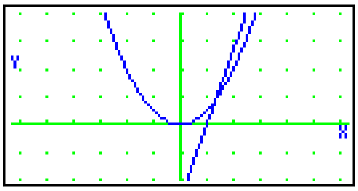
III. Wir stellen die beiden Gleichungen $y = 0{,}5x^2$ und $y = 2{,}7(x - 1)$ mit dem Graphiktaschenrechner graphisch dar und suchen ihre Schnittpunkte.

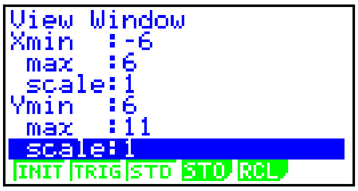
IV. Wir stellen die Gleichung $y = 0{,}5x^2 - 2{,}7(x - 1)$ mit dem Graphiktaschenrechner graphisch dar und suchen die Punkte, in denen der Graph die x-Achse schneidet (Nullstellen).

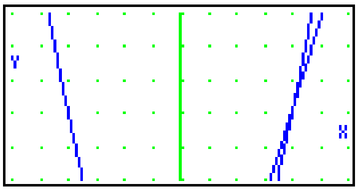
Über die Hälfte der Schüler war bestrebt, zur Lösung der Aufgabe den Graphiktaschenrechner zu benutzen, allerdings jeder mit einem anderen Ziel. Beispielsweise haben einige Schüler die Grundfunktionen des Graphiktaschenrechners angewendet, um die Lösungswege I und II auszuführen, während die Lösungswege III und IV von vornherein auf der Verfügbarkeit des Graphiktaschenrechners basieren. Ich glaube, es ist den Schülern überhaupt ziemlich schwergefallen, einen Lösungsweg ohne Graphiktaschenrechner zu finden. Nach einer Debatte waren sie sich schließlich einig, dass das Zeichnen eines Graphen den einfachsten Lösungsweg darstellt. Allerdings haben nur wenige den Lösungsweg IV verstanden. Die meisten bemühten sich, Graphen gemäß Lösungsweg III zu zeichnen.

Die beiden rechts abgebildeten Graphen entsprechend dem Lösungsweg III wurden mit dem Graphiktaschenrechner gezeichnet. Bei ihrer Betrachtung meinten einige Schüler:









”Schau an! Sie kann den Ball tatsächlich einholen!”

Ein Schüler, der das Problem nach Lösungsweg I, also durch Einsetzen einer Anzahl von x-Werten zu lösen versucht hatte, ergänzte, dass Yumiko den Ball sogar ein zweites Mal einholen könne.

In meinem Unterricht habe ich die Schüler den Graphiktaschenrechner benutzen lassen, weil ich eine solche Situation erwartet hatte. Das kleine Format des Taschenrechner-Bildschirms zwingt den Benutzer, den Graphen stark verkleinert zu betrachten, um ihn vollständig sehen zu können. Dabei ist der Graph, sagen wir, wenig eindeutig. Dies aber schätze ich als überaus nützlich ein, um Fähigkeiten der Schüler zum mathematischen Denken zu entwickeln. Als der Schüler geäußert hatte, dass Yumiko den Ball ein zweites Mal einholen könne, beeilten sich die Schüler, die Koordinatenachse mit der Scroll-Funktion so zu verschieben, dass sie den oberen rechten Teil des Graphen sehen konnten. Dabei stellten sie fest, dass tatsächlich ein zweiter Treffpunkt existiert, und sagten mir:

”Herr K., Yumiko hat eine zweite Chance, den Ball zu erwischen, wenn sie es beim ersten Mal nicht geschafft hat. Stimmt’s?”

Hat sie aber eine dritte Chance, wenn sie auch die zweite verpasst? Das war für die Schüler, die sich mit Parabeln noch nicht befasst hatten, eine wichtige Frage. Sie konnten sie rasch beantworten, weil sie beim weiteren Scrollen feststellten, dass sich die beiden Graphen kein weiteres Mal schneiden. Nachdem sie das bis an die Grenze der Möglichkeiten des Graphiktaschenrechners gescrollt hatten, gelangten sie am Ende zu dem Schluss, dass sich die Graphen niemals drei Mal oder öfter schneiden.

Andererseits wünschten auch die Schüler, die nach Lösungsweg I Werte eingesetzt oder die quadratische Gleichung des Lösungsweges II gelöst hatten, dass wir den rechten oberen Abschnitt des Graphen vor einer endgültigen Entscheidung untersuchen sollten. Sie waren einverstanden, dass der Graphiktaschenrechner benutzt werden sollte, bestanden jedoch auf ihrer Denkweise. Nach ihrer Auffassung ist der Graph von $y = 2{,}7(x - 1)$ eine Gerade, weil er der Graph einer linearen Funktion ist. y wächst also stetig an, wenn für x wachsende Werte eingesetzt werden. Sie wussten allerdings nicht, wie der Graph von $y = 0{,}5x^2$ gezeichnet wird. Die Schüler, die die quadratische Gleichung lösten, waren der Meinung, diese Gleichung habe ein oder zwei Lösungen. Sie waren aus diesem Grunde überzeugt, dass Yumiko eine zweite Chance habe.

Übrigens bin ich der Auffassung, dass der ideale Unterricht etwa in den Klassen 6 bis 9 auf dem Prinzip des Gruppenunterrichts aufbauen sollte. Das deshalb, weil es die Interaktion zwischen den Schülern, die das Graphenkonzept einbrachten, und denjenigen, die das nicht taten, möglich machte, die Aufgabenstellungen zu lösen. Zweckmäßigerweise sollten technische Hilfsmittel wie Computer, Graphiktaschenrechner usw. eingesetzt werden, was aber nicht dazu führen darf, dass die erwähnte Interaktion unterdrückt wird. Obgleich der Einsatz des Graphiktaschenrechners überaus effektiv ist, sollte jedoch nicht übersehen werden, dass er lediglich ein Werkzeug ist, das den Menschen bei seiner gedanklichen Tätigkeit unterstützt. Bevor die fortgeschritteneren Funktionen des Graphiktaschenrechners eingesetzt werden, muss der Umgang mit diesem Werkzeug allerdings im normalen Unterricht unbedingt gründlich gefestigt werden.