14. Der gezinkte Würfel - Workshop zu statistischen Datensimulationen und Untersuchungen zur Testgröße und zur Testentscheidung beim Test auf Gleichverteilung (Chancengleichheit aller Augenzahlen) (Paditz)

Was den Schüler/Studenten besonders interessiert:

Entsteht beim Würfelexperiment (mit einem idealen Würfel) und Auswertung der vermuteten Gleichverteilung im Chi^2-Anpassungstest tatsächlich eine Chi^2-verteilte Testgröße? Welche (Prüf-)Verteilung hat die Testgröße, wenn der Würfel in Wirklichkeit „gezinkt" war? Wie sind die Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. und 2. Art zu interpretieren?

Mathematischer Hintergrund:

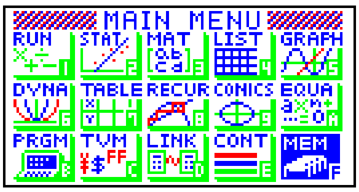
Datensimulation, Zufallszahlen, Beschreibende Statistik, Histogramme und Häufigkeitspolygone, Ereignisse und Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Schließende Statistik (Tests)

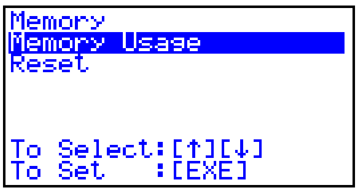
Beschreibung der Zufallsexperimente und der Datenauswertung:

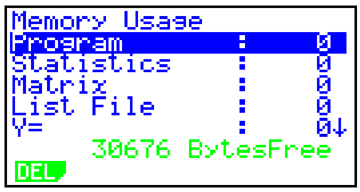
Auf der Grundlage von **M** (z.B. **M = 250**) Würfelexperimenten, wobei in jedem Experiment **N** (z.B. **N = 100**) Augenzahlen simuliert werden sollen, berechnet der Taschenrechner gemäß dem Chi-Quadrat-Anpassungstest **M** Chi-Quadrat-verteilte Testgrößen. Die Auswertung dieser Testgrößen im Histogramm wird mit der theoretischen Chi-Quadratdichte-Funktion (mit **5** Freiheitsgraden) als statistische Prüfverteilung des Chi-Quadrat-Anpassungstests verglichen.

Ablauf des Workshops:

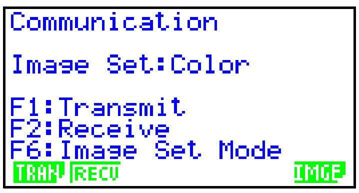
Der Workshop erfordert interaktives Arbeiten, d.h. es wird mit einzelnen Teilprogrammen gearbeitet, die vom Lehrerrechner auf die Schülerrechner mit einem Linkkabel überspielt oder auch individuell eingegeben werden können. Bei der individuellen Eingabe lernen die Schüler die Wirkungsweise einzelner Programmbefehle kennen und festigen so ihre Informatikkenntnisse.
Da insgesamt viel Speicherplatz benötigt wird, sollte vor Übernahme der Teilprogramme nicht benötigter Speicherplatz freigegeben werden, z.B. über das **MEM**-Menü ein **Reset** durchführen.

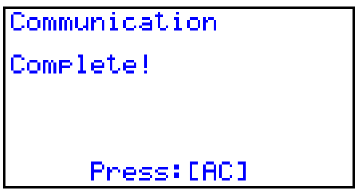


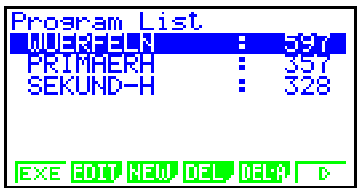




Zum Überspielen der Programme vom Lehrerrechner zum Schülerrechner öffnen beide Beteiligten das **LINK**-Menü und wählen **Transmit** (Senden) bzw. **Receive** (Empfangen) aus, nachdem beide Rechner mit einem **LINK**-Kabel verbunden sind. Die Programmübertragung wird im Senderrechner gestartet, nachdem zuvor der Empfängerrechner mit **F2** in Empfangsbereitschaft versetzt wurde.







Auf den folgenden Seiten werden zunächst die Programmtexte, so wie diese nach Aufruf des **PRGM**-Menüs im Programm-Editor (**EDIT**) einsehbar sind, vorgestellt und kommentiert.

Das Programm „WUERFELN“:

`ClrText↵`	Löschbefehle
`ClrGraph↵`	
`ClrList↵`	
`"Idealer Wuerfel ?"↵`	Textanzeigen nach Programmstart
`"Code 1 fuer Ja"↵`	
`"Code 0 fuer Nein"↵`	
`?→A↵`	Eingabeaufforderungen,
`"Anzahl Experimente:"↵`	nach Eingabe jeweils weiter mit EXE
`?→M↵`	
`"Anzahl der Wuerfe:"↵`	
`?→N↵`	
`N÷6→E↵`	Theoret. Häufigkeit **E = N / 6** einer Augenzahl
`M→Dim List 1↵`	Liste **List1** für die Chi^2-Testgrößen
`6→Dim List 2↵`	Liste **List2** für die sechs Häufigkeiten der
`0→K↵`	Augenzahlen eines Experiments
`ClrText↵`	
`Lbl M↵`	
`K+1→K↵`	
`0×List 2→List 2↵`	Liste **List2** mit den Anfangshäufigkeiten Null
`If A=1↵`	
`Then For 1→I To N Step 1↵`	
`Int (6×Ran#+1)→D↵`	Simulation des idealen Würfels (Augenzahl **D**)
`List 2[D]+1→List 2[D]↵`	Erhöhung der Häufigkeit für Augenzahl **D**
`Next↵`	
`Else For 1→I To N Step 1↵`	
`Int (11×Ran#)→R↵`	Simulation eines „gezinkten“ Würfels (Augenzahl **D**)
`Int (R÷2)+1→D↵`	
`List 2[D]+1→List 2[D]↵`	Erhöhung der Häufigkeit für Augenzahl **D**
`Next↵`	
`IfEnd↵`	
`Sum (((List 2-E)^2)÷E)→C↵`	Berechnung der Chi^2-Testgröße **C**
`Locate 1,2,"Exp. No:"↵`	
`Locate 10,2,K↵`	
`Locate 1,4,"Chi^2-Statistik ="↵`	Anzeige zum aktuellen (**K**-ten) Experiment
`Locate 10,6,C↵`	
`C→List 1[K]↵`	
`If K<M↵`	
`Then Goto M↵`	Rücksprung zum Start des nächsten Experiments
`IfEnd↵`	
`ClrText↵`	
`Locate 1,1,"Fertig!"↵`	Anzeige zum Abschluß der **M** Würfelexperimente
`Locate 1,2,"Anzahl Experimente:"↵`	
`Locate 10,3,M↵`	
`Locate 1,4,"Anzahl der Wuerfe:"↵`	
`Locate 10,5,N↵`	
`Locate 1,6,"Wuerfelcode:"↵`	
`Locate 15,6,A↵`	
`If A=1↵`	
`Then Locate 1,7,"Idealen W. simuliert"↵`	
`Else Locate 1,7,"Gezinkten W simuliert"↵`	
`IfEnd↵`	
`SortA(List 1)↵`	Sortierung (aufsteigend) der Chi^2-Testgrößen
`Stop↵`	

Hinweis: Dreh- und Angelpunkt der Simulation im Programm „**WUERFELN**“ ist die Prüfgröße

C = `Sum (((List 2−E)^2)÷E)` $= \sum(h_i - n\,p_i)^2 / (n\,p_i)$,

wobei h_i die simulierte absolute Häufigkeit der Augenzahl **X = i** im **k**-ten Experiment beschreibt und p_i die theoretische Wahrscheinlichkeit p_i **= P(X = i) = 1/6** , **i = 1, 2, ..., 6**, darstellt.

Das Programm „**PRIMAERH**“ erzeugt die primäre Häufigkeitsverteilung der **M** simulierten Testgrößen zu den **M** Würfelexperimenten in den verbundenen Datenlisten **List2** (Liste der unterschiedlichen **C**-Werte) und **List3** (Liste der zugehörigen Häufigkeiten):

`ClrText↵`	Löschbefehl
`"Einen Moment bitte,"↵`	
`" "↵`	Textanzeige nach Programmstart
`"bin beschaeftigt ..."↵`	
`0→L↵`	
`M→Dim List 2↵`	Liste **List2** der unterschiedlichen Chi^2-Werte
`M→Dim List 3↵`	Liste **List3** der zugehörigen Häufigkeiten
`Lbl S↵`	
`List 1[1]→List 2[1]↵`	
`1→List 3[1]↵`	
`1→K↵`	
`1→I↵`	
`Lbl P↵`	
`K+1→K↵`	
`If List 1[K]=List 1[K−1]↵`	Vergleich benachbarter **C**-Werte
`Then Goto Q↵`	
`IfEnd↵`	
`I+1→I↵`	Erhöhung des **List2**-Index **I** (neuer **C**-Wert)
`List 1[K]→List 2[I]↵`	
`1→List 3[I]↵`	
`Goto R↵`	
`Lbl Q↵`	
`List 3[I]+1→List 3[I]↵`	Erhöhung der Häufigkeit (gleiche **C**-Werte)
`Lbl R↵`	
`If K<M↵`	
`Then Goto P↵`	
`IfEnd↵`	
`If L=1↵`	
`Then Goto T↵`	
`IfEnd↵`	
`I→Dim List 2↵`	Endindex **I** als Dimension der Listen **List2**, **List3**
`I→Dim List 3↵`	
`1→L↵`	
`Goto S↵`	Zweiter Sortierungsdurchlauf mit Endindex **I**
`Lbl T↵`	
`ClrText↵`	
`Locate 1,2,"Fertig,"↵`	Anzeige zum Abschluß der Aufstellung der
`Locate 1,4,"primaere Haeufig-"↵`	primären Häufigkeitstabelle
`Locate 1,5,"keitsverteilung"↵`	
`Locate 1,6,"ermittelt!"↵`	
`Stop↵`	

Hinweis:

Die in jedem der **M** Würfelexperimente simulierten **N** Augenzahlen $X_1, X_2, ..., X_N \in \{1, 2, ..., 6\}$ werden im Programm **„WUERFELN“** lediglich als Indexvariable **D** benutzt, um die absoluten Häufigkeiten h_i, **i = 1, 2, ..., 6**, eines Experiments festzustellen und um schließlich die Prüfgröße **C** für das Würfelexperiment festzuhalten. Die Urdatenliste im Ergebnis des Programmes **„WUERFELN“** ist die Liste **List1** der **C**-Werte, d.h. **List1** $= \{C_1, C_2, ..., C_M\}$.

Man stelle sich hierbei vor, dass in **M = 250** Experimenten mit je **N = 100** Würfen insgesamt **25000** Augenzahlen durch den Taschenrechner simuliert werden! Dies erfordert natürlich etwas Rechenzeit - etwa 30 min. Während in jedem Schülerrechner die Datensimulation läuft, kann in dieser Zeit durch den Lehrer das weitere Vorgehen zur Datenauswertung erläutert werden:
Im Ergebnis des zweiten Teilprogramms **„PRIMAERH“** liegt die primäre Häufigkeitsverteilung in Form der verbundenen Datenlisten **List2** $= \{C_1, C_2, ..., C_I\}$ und **List3** $= \{h_1, h_2, ..., h_I\}$ vor.

Im nun folgenden dritten Teilprogramm **„SEKUND-H“** wird die sekundäre Häufigkeitsverteilung auf Grundlage einer Klasseneinteilung für die **C**-Werte ermittelt. Die **C**-Werte sind nichtnegative Zahlen, so dass hier folgende (halboffenen) Intervalle zur Klassenbildung betrachtet werden:

$$[0\,;1)\,,[1\,;2)\,,[2\,;3)\,,\ \ ...,\ [B-1\,;B)\,.$$

Die sogenannte Reduktionslage (Beginn der Klasseneinteilung) ist **0** und wird bei der Histogrammdefinition als **Start**(-Wert) vorgegeben. Die Klassenbreite (pitch) beträgt **1** und wird bei der Histogrammdefinition als **pitch**(-Wert) vorgegeben. Um diese Werte individuell einstellen zu können, ist im **SET UP** in der ersten Zeile **Stat Wind** (Statistik-Betrachtungsfenstereinstellung) die Voreinstellung **Manual** statt **Auto** auszuwählen. D.h. **„SEKUND-H“** erzeugt bereits Datenlisten für das Häufigkeitspolygon. Außer der linken Klassengrenze **0** werden in Liste **List4** deshalb die Klassenmitten eingetragen, um die verbundenen Listen **List4** und **List5** später zum Darstellen des Häufigkeitspolygons nutzen zu können:

```
"Einen Moment bitte,"↵
" "↵
"bin beschaeftigt ..."↵
```

Textanzeige nach Programmstart

```
Dim List 2→A↵
Int (List 2[A]+2)→Dim List 4↵
Int (List 2[A]+2)→Dim List 5↵
Int (List 2[A]+1)→B↵
Seq(-.5+X,X,0,B,1)→List 4↵
0→List 4[1]↵
```

Liste **List4** für die Abzissen des Häufigkeits-polygons

```
0×List 4→List 5↵
```

Bereitstellung von Liste **List5** für die Ordinaten

```
0→K↵
Lbl Q↵
K+1→K↵
Int (List 1[K])+2→L↵
List 5[L]+1→List 5[L]↵
If K<M↵
Then Goto Q↵
IfEnd↵
List 5[2]→List 5[1]↵
```

Aus der Urdatenlise **List1** werden die Ordinaten des Häufigkeitspolygons ermittelt, die wegen der benutzten Klassenbreite 1 den Klassenhäufigkeiten entsprechen.

```
ClrText↵
Locate 1,2,"Fertig,"↵
Locate 1,4,"sekundaere Haeufig-"↵
Locate 1,5,"keitsverteilung"↵
Locate 1,6,"ermittelt!"↵
Stop↵
```

Anzeige zum Abschluß der Aufstellung der sekundären Häufigkeitsverteilung für das Häufigkeitspolygon

Zielstellung der Datenauswertung:

Die zufälligen Abweichungen zwischen den simulierten empirischen Häufigkeiten h_i und den bekannten theoretischen Häufigkeiten $\mathbf{N \times p_i = N \times P(X = i) = N \times 1/6}$, **i = 1, 2, ..., 6**, werden über die quadrierten Differenzen in der Prüfgröße **C** erfaßt, welche in Liste **List1** in **M**-facher Realisierung aus **M** Würfelexperimenten vorliegt.

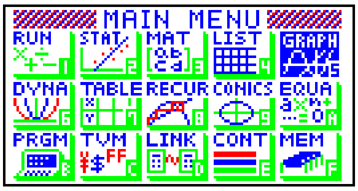
Unter der Nullhypothese **H_0: „Der simulierte Würfel ist ein idealer Würfel“** fallen die Prüfgrößen **C** in der Regel sehr klein aus, weil die simulierten Daten die Nullhypothese abbilden und auftretende Differenzen in **C** rein zufälliger Natur sind. Ist die Nullhypothese jedoch falsch, d.h. die simulierten Daten verhalten sich anders als die Nullhypothese, dann ist das über die Prüfgrößen **C** feststellbar: Sie fallen in der Regel größer aus, weil es wesentliche (signifikate) Abweichungen zwischen den simulierten empirischen Häufigkeiten h_i und den bekannten theoretischen Häufigkeiten $\mathbf{N \times p_i = N \times P(X = i) = N \times 1/6}$, **i = 1, 2, ..., 6**, gibt (vgl. kritische Werte von **C** auf S. 71 bzw. S. 76).

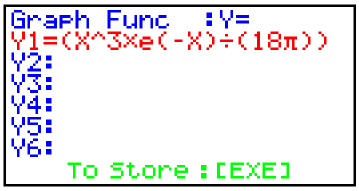
Der Chi-Quadrat-Anpasungstest sagt aus, dass unter **H_0** die Prüfgröße **C** Chi-Quadrat-verteilt ist (mit **5** Freiheitsgraden).

> **Die statistische Datenauswertung in diesen Würfelexperimenten hat genau folgende Fragestellung zum Inhalt:**
>
> **Ist es tatsächlich so, dass sich die simulierten C-Werte wie eine Chi-Quadrat-verteilte Zufallsgröße (mit 5 Freiheitsgraden) verhalten?**

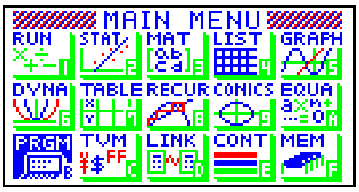
Die Dichtefunktion der statistischen Prüfverteilung des Chi-Quadrat-Anpassungstests wird im **GRAPH**-Menü programmiert und mit dem Faktor **M** gestreckt: Der Flächeninhalt unter einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beträgt **1**. Will man jedoch die Dichtefunktion über das Histogramm bzw. das Häufigkeitspolygon legen, gilt es zu beachten, dass diese statistischen Graphiken auf absoluten Häufigkeiten basieren und damit den Flächeninhalt **M** darstellen.

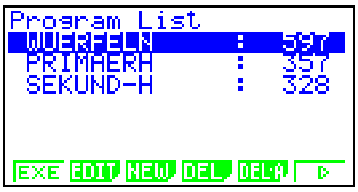
Damit wird im **GRAPH**-Menü folgende Funktion eingegeben: $\mathbf{Y1 = M \times \sqrt{(X\hat{}3 \times e(-X) / 18\pi)}}$.

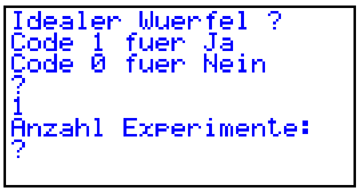


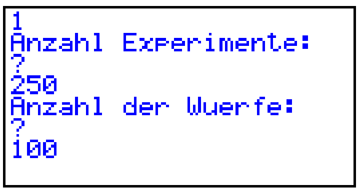


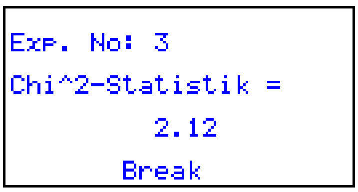
Bilder und Tabellen zum Würfelexperiment mit einem simulierten idealen Würfel:



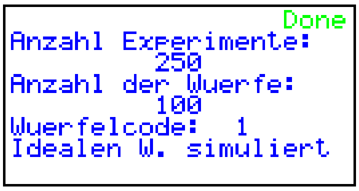


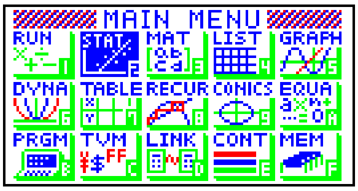


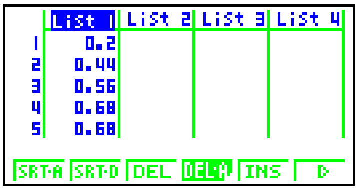




Aktuelle Anzeige des momentan erreichten Standes der Simulation bei **M=250** Würfel-Experimenten mit je **N=100** Würfen.





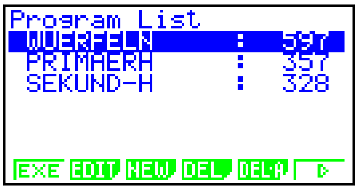


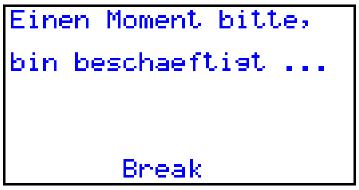
Der Taschenrechner hat **25000**mal gewürfelt und dabei **250** Experimente durchgeführt und entsprechend viele Prüfgrößen **C** erzeugt, die bereits in sortierter Reihenfolge in Liste **List1** vorliegen:

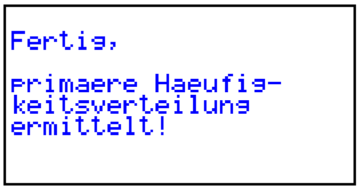
List 1 : 250 data (Blau: Grenzbereich, Rot: kritische Werte, vgl. S.81)

[1] = 0.2	[51] = 2.12	[101] = 3.56	[151] = 5	[201] = 7.16
[2] = 0.44	[52] = 2.12	[102] = 3.56	[152] = 5	[202] = 7.4
[3] = 0.56	[53] = 2.24	[103] = 3.68	[153] = 5.12	[203] = 7.4
[4] = 0.68	[54] = 2.24	[104] = 3.68	[154] = 5.12	[204] = 7.52
[5] = 0.68	[55] = 2.36	[105] = 3.68	[155] = 5.24	[205] = 7.64
[6] = 0.8	[56] = 2.36	[106] = 3.68	[156] = 5.36	[206] = 7.64
[7] = 0.8	[57] = 2.48	[107] = 3.68	[157] = 5.36	[207] = 7.88
[8] = 0.8	[58] = 2.48	[108] = 3.68	[158] = 5.48	[208] = 8
[9] = 0.92	[59] = 2.6	[109] = 3.8	[159] = 5.48	[209] = 8
[10] = 0.92	[60] = 2.6	[110] = 3.8	[160] = 5.48	[210] = 8.12
[11] = 0.92	[61] = 2.6	[111] = 3.8	[161] = 5.48	[211] = 8.12
[12] = 1.04	[62] = 2.6	[112] = 3.8	[162] = 5.48	[212] = 8.12
[13] = 1.16	[63] = 2.6	[113] = 3.8	[163] = 5.6	[213] = 8.48
[14] = 1.16	[64] = 2.6	[114] = 3.8	[164] = 5.72	[214] = 8.48
[15] = 1.16	[65] = 2.6	[115] = 3.92	[165] = 5.72	[215] = 8.6
[16] = 1.28	[66] = 2.72	[116] = 3.92	[166] = 5.72	[216] = 8.6
[17] = 1.28	[67] = 2.72	[117] = 4.04	[167] = 5.84	[217] = 8.72
[18] = 1.4	[68] = 2.72	[118] = 4.04	[168] = 5.84	[218] = 8.84
[19] = 1.4	[69] = 2.72	[119] = 4.04	[169] = 5.84	[219] = 8.96
[20] = 1.4	[70] = 2.84	[120] = 4.04	[170] = 5.84	[220] = 9.08
[21] = 1.52	[71] = 2.84	[121] = 4.04	[171] = 5.96	[221] = 9.2
[22] = 1.52	[72] = 2.96	[122] = 4.04	[172] = 5.96	[222] = 9.56
[23] = 1.64	[73] = 2.96	[123] = 4.16	[173] = 5.96	[223] = 9.68
[24] = 1.64	[74] = 2.96	[124] = 4.16	[174] = 5.96	[224] = 9.68
[25] = 1.64	[75] = 2.96	[125] = 4.16	[175] = 6.08	[225] = 9.8
[26] = 1.64	[76] = 3.08	[126] = 4.16	[176] = 6.08	[226] = 9.92
[27] = 1.64	[77] = 3.08	[127] = 4.16	[177] = 6.08	[227] = 10.04
[28] = 1.64	[78] = 3.2	[128] = 4.28	[178] = 6.08	[228] = 10.04
[29] = 1.64	[79] = 3.2	[129] = 4.28	[179] = 6.08	[229] = 10.16
[30] = 1.64	[80] = 3.2	[130] = 4.4	[180] = 6.08	[230] = 10.28
[31] = 1.64	[81] = 3.2	[131] = 4.4	[181] = 6.2	[231] = 10.4
[32] = 1.76	[82] = 3.2	[132] = 4.4	[182] = 6.32	[232] = 10.4
[33] = 1.76	[83] = 3.2	[133] = 4.4	[183] = 6.32	[233] = 10.4
[34] = 1.76	[84] = 3.2	[134] = 4.52	[184] = 6.32	[234] = 10.4
[35] = 1.76	[85] = 3.32	[135] = 4.52	[185] = 6.32	[235] = 10.4
[36] = 1.76	[86] = 3.32	[136] = 4.52	[186] = 6.32	[236] = 10.52
[37] = 1.76	[87] = 3.32	[137] = 4.52	[187] = 6.44	[237] = 10.76
[38] = 1.76	[88] = 3.32	[138] = 4.52	[188] = 6.44	[238] = 10.88
[39] = 1.88	[89] = 3.32	[139] = 4.64	[189] = 6.44	[239] = 10.88
[40] = 1.88	[90] = 3.32	[140] = 4.64	[190] = 6.44	[240] = 11
[41] = 2	[91] = 3.44	[141] = 4.64	[191] = 6.56	[241] = 12.32
[42] = 2	[92] = 3.44	[142] = 4.76	[192] = 6.56	[242] = 12.32
[43] = 2	[93] = 3.44	[143] = 4.76	[193] = 6.8	[243] = 13.52
[44] = 2	[94] = 3.44	[144] = 4.76	[194] = 6.8	[244] = 14.36
[45] = 2	[95] = 3.44	[145] = 4.76	[195] = 6.8	[245] = 15.2
[46] = 2.12	[96] = 3.44	[146] = 4.88	[196] = 6.8	[246] = 15.44
[47] = 2.12	[97] = 3.44	[147] = 4.88	[197] = 6.92	[247] = 17.12
[48] = 2.12	[98] = 3.56	[148] = 5	[198] = 7.16	[248] = 18.08
[49] = 2.12	[99] = 3.56	[149] = 5	[199] = 7.16	[249] = 23.84
[50] = 2.12	[100] = 3.56	[150] = 5	[200] = 7.16	[250] = 24.8

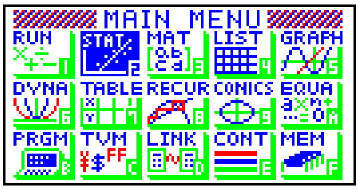
Start des zweiten Teilprogramms im **PRGM**-Menü:

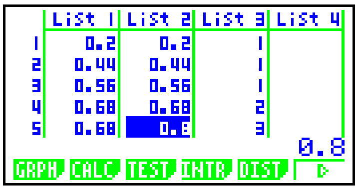


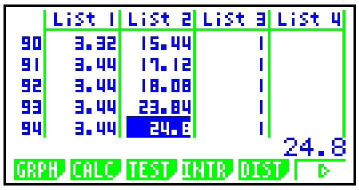




Einblick in die Listen der primäre Häufigkeitsverteilung im **STAT**-Menü:

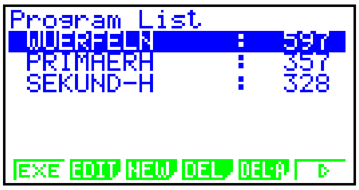


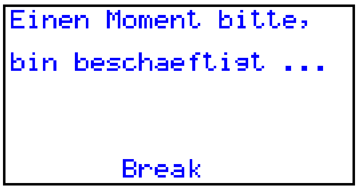


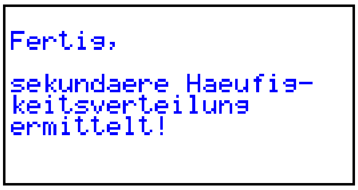


Index	List 2 : 94 data	List 3 : 94 data
[1]	0.2	1
[2]	0.44	1
[3]	0.56	1
[4]	0.68	2
[5]	0.8	3
[6]	0.92	3
[7]	1.04	1
[8]	1.16	3
[9]	1.28	2
[10]	1.4	3
[11]	1.52	2
[12]	1.64	9
[13]	1.76	7
[14]	1.88	2
[15]	2	5
[16]	2.12	7
[17]	2.24	2
[18]	2.36	2
[19]	2.48	2
[20]	2.6	7
[21]	2.72	4
[22]	2.84	2
[23]	2.96	4
[24]	3.08	2
[25]	3.2	7
[26]	3.32	6
[27]	3.44	7
[28]	3.56	5
[29]	3.68	6
[30]	3.8	6
[31]	3.92	2
[32]	4.04	6
[33]	4.16	1
[34]	4.16	4
[35]	4.28	2
[36]	4.4	4
[37]	4.52	1
[38]	4.52	4
[39]	4.64	3
[40]	4.76	4
[41]	4.88	2
[42]	5	1
[43]	5	4
[44]	5.12	1
[45]	5.12	1
[46]	5.24	1
[47]	5.36	2
[48]	5.48	5
[49]	5.6	1
[50]	5.72	3
[51]	5.84	4
[52]	5.96	4
[53]	6.08	6
[54]	6.2	1
[55]	6.32	5
[56]	6.44	4
[57]	6.56	2
[58]	6.8	4
[59]	6.92	1
[60]	7.16	4
[61]	7.4	2
[62]	7.52	1
[63]	7.64	2
[64]	7.88	1
[65]	8	2
[66]	8.12	3
[67]	8.48	2
[68]	8.6	2
[69]	8.72	1
[70]	8.84	1
[71]	8.96	1
[72]	9.08	1
[73]	9.2	1
[74]	9.56	1
[75]	9.68	2
[76]	9.8	1
[77]	9.92	1
[78]	10.04	2
[79]	10.16	1
[80]	10.28	1
[81]	10.4	5
[82]	10.52	1
[83]	10.76	1
[84]	10.88	2
[85]	11	1
[86]	12.32	2
[87]	13.52	1
[88]	14.36	1
[89]	15.2	1
[90]	15.44	1
[91]	17.12	1
[92]	18.08	1
[93]	23.84	1
[94]	24.8	1

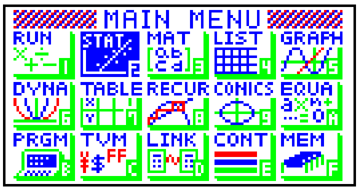
Start des dritten Teilprogramms im **PRGM**-Menü:

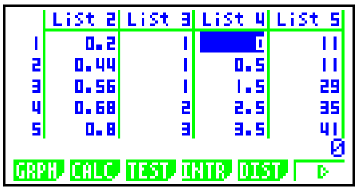


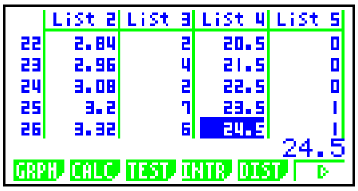




Einblick in die Listen der sekundären Häufigkeitsverteilung (Häufigkeitspolygon) im **STAT**-Menü:





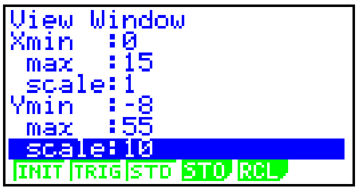


	List 4 : 26 data	List 5 : 26 data
[1]	0	11
[2]	0.5	11
[3]	1.5	29
[4]	2.5	35
[5]	3.5	41
[6]	4.5	32
[7]	5.5	26
[8]	6.5	23
[9]	7.5	11
[10]	8.5	12
[11]	9.5	7
[12]	10.5	13
[13]	11.5	1
[14]	12.5	2
[15]	13.5	1
[16]	14.5	1
[17]	15.5	2
[18]	16.5	0
[19]	17.5	1
[20]	18.5	1
[21]	19.5	0
[22]	20.5	0
[23]	21.5	0
[24]	22.5	0
[25]	23.5	1
[26]	24.5	1

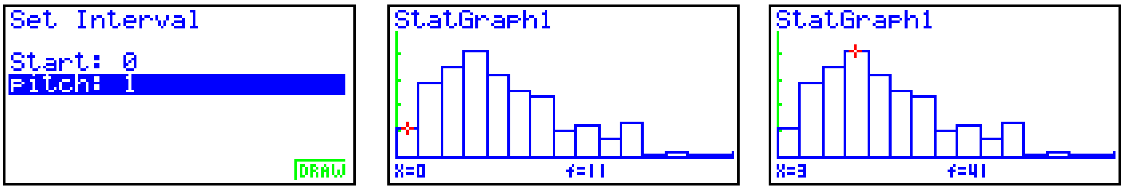
Es ist erstaunlich, dass damit die ursprünglichen **25000** Würfeldaten auf **25** Klassen (Klassenmitten in Liste **List4** sind **0.5**, **1.5**, **2.5**, **...**, **24.5**) verdichtet wurden. Erkennbar ist die starke Besetzung der Anfangsklassen und die schwache Besetzung der letzten Klassen, d.h. kleine **C**-Werte sind sehr oft und große **C**-Werte recht selten aufgetreten (Klassenhäufigkeiten in **List5[2]** bis **List5[26]**).

In den folgenden Screenshots werden das zugehörige **Histogramm**, das **Häufigkeitspolygon** und die **theoretische Wahrscheinlichkeits-Dichte** (mit dem Faktor **M** gestreckt), die auf der Chi-Quadrat-Verteilung beruht, dargestellt und zum Vergleich überlagert. Da unterschiedliche Graphik-Typen (z.B. Funktionsgraphik im **GRAPH**-Menü oder statistische Graphik im **STAT**-Menü) nicht gleichzeitig aktiviert werden können, werden Hintergrundbilder abgespeichert und dann einer anderen aktiven Graphik hinterlegt. Eine entsprechende Einstellung ist dazu im **SET UP** vorzunehmen.

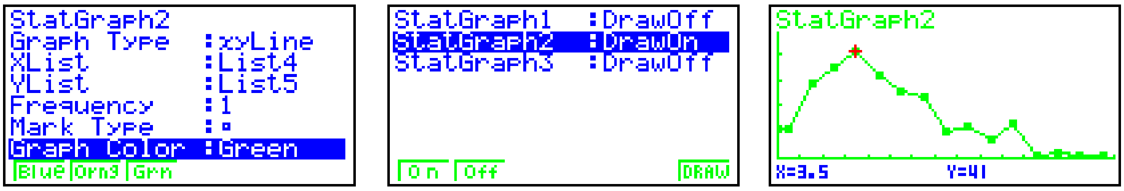
Für alle Graphiken ist ein einheitliches Betrachtungsfenster einzurichten, so dass neben der eigentlichen Graphik auch eine Kopf- und eine Fußzeile Platz finden ohne die Graphik zu überdecken.
Wir wählen mit Blick auf die Listen **List4** und **List5** die folgende Fenstereinstellung:



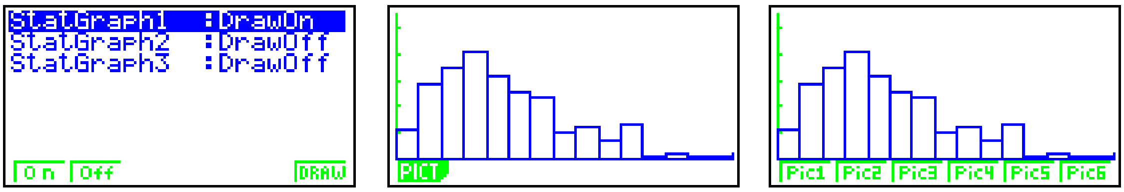
Die Trace-Funktion im Histogramm stellt den Cursor auf Klassenmitte und zeigt unten links jedoch die jeweils linke Klassengranze an, z.B. besitzt die 4. Klasse mit **3 ≤ C < 4** die Häufigkeit **41**:

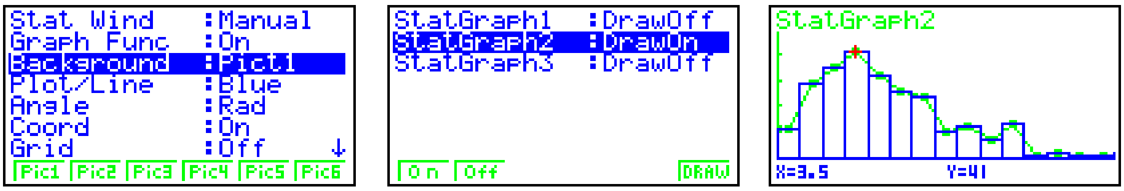


Jetzt betrachten wir das zugehörige Häufigkeitspolygon mit korrekten Cursorkoordinaten:

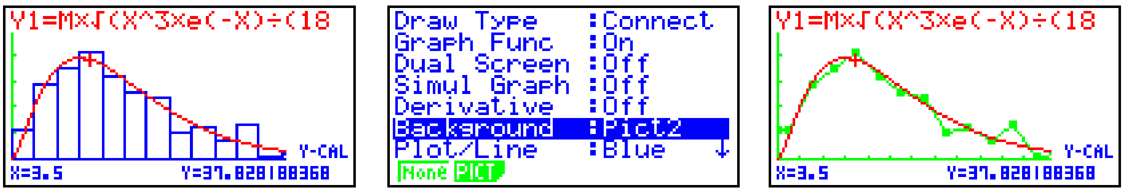


Nun wird das Histogramm als Hintergrundbild abgespeichert, indem über OPTN das **PICT**-Untermenü aufgerufen und eine Abspeicherung in **Pic1** erfolgt:



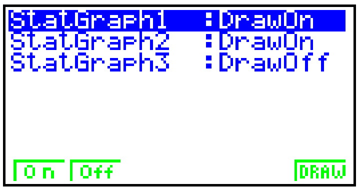


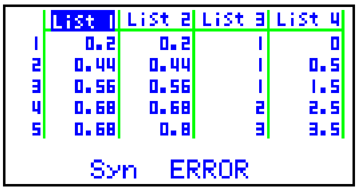
Die folgenden Bilder zeigen die Überlagerung mit der theoretischen Wahrscheinlichkeitsdichte:



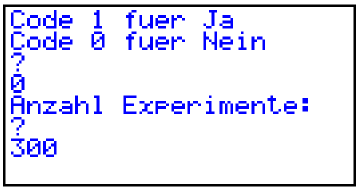
Es ist beeindruckend, dass in der Tat eine recht gute Übereinstimmung von Histogramm bzw. Häufigkeitspolygon und theoretischer Dichtefunktion $y = \mathrm{M} \times \sqrt{x^3 \times e^{-x} / 18\pi}$ besteht.

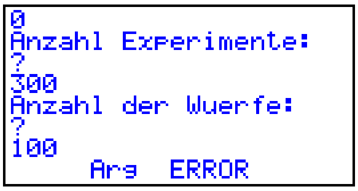
Hinweise zu Fehlermeldungen:





Ursache:
Die statistischen Graphiken **StatGraph1** (Histogramm) und **Statgraph2** (Häufigkeitspolygon) können nicht gleichzeitig aktiv sein.





Ursache:
Die Eingabeparameter sind ungeeignet, d.h. **M** sollte verkleinert werden.

Bilder und Tabellen zum Würfelexperiment mit einem simulierten „gezinkten“ Würfel:

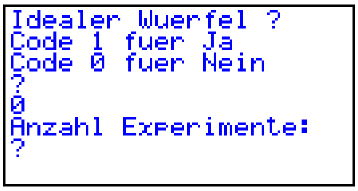
Um einen „gezinkten“ Würfel simulieren zu können, muß die Gleichverteilung des Eintretens einer jeden Augenzahl gestört werden. Das soll hier in der Weise simuliert werden, dass die Augenzahl **6** benachteiligt wird und zwar in folgender Weise:

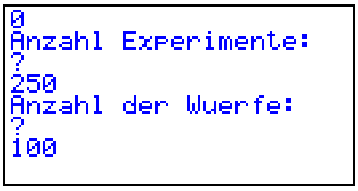
$$\boxed{P(X=i)=2/11 \quad \text{für} \quad i=1,2,3,4,5, \quad \text{und} \quad P(X=6)=1/11}$$

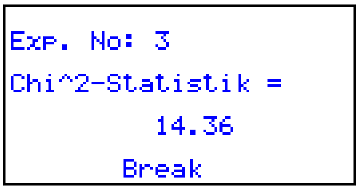
Die Simulation eines derartigen Würfels erfolgt wieder über im Intervall **(0, 1)** stetig gleichverteilte Zufallszahlen **Ran#** und eine entsprechende Transformation, vgl. Programm „WUERFELN“:

```
Int (11×Ran#)→R↲
Int (R÷2)+1→D↲
```

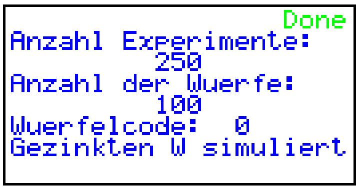
R hat ganzzalige gleichverteilte Werte von **0** bis **10**
D hat ganzzahlige Werte von **1** bis **6** (ungleich verteilt)

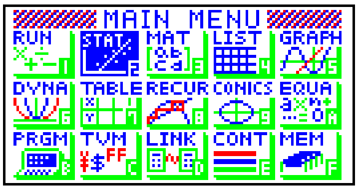




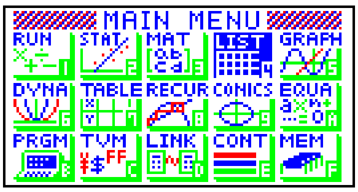


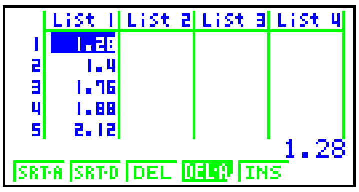
Damit die bisher erzeugten Listen nicht durch die neue Simulation überschrieben werden, wurde vor dem Start vom Listendateiverzeichnis **ListFile1** in das Listendateiverzeichnis **ListFile 2** gewechselt. Die Einstellung hierzu erfolgt im **SET UP** des **LIST**-Menüs.

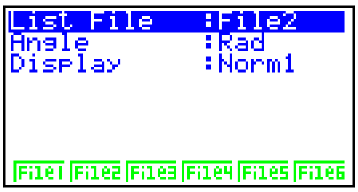




Das **LIST**-Menü mit dem dort verfügbaren **SET UP** und der **List-File**-Einstellung:







Der Taschenrechner hat erneut **25000**mal gewürfelt und dabei **250** Experimente durchgeführt und entsprechend viele Prüfgrößen **C** erzeugt, die bereits in sortierter Reihenfolge in Liste **List1** vorliegen:

List 1 : 250 data (Blau: Grenzbereich, Rot: kritische Werte, vgl. S.81)

[1] = 1.28	[51] = 5.48	[101] = 7.52	[151] = 9.68	[201] = 13.04
[2] = 1.4	[52] = 5.72	[102] = 7.52	[152] = 9.68	[202] = 13.04
[3] = 1.76	[53] = 5.72	[103] = 7.64	[153] = 9.8	[203] = 13.04
[4] = 1.88	[54] = 5.84	[104] = 7.64	[154] = 9.92	[204] = 13.04
[5] = 2.12	[55] = 5.84	[105] = 7.64	[155] = 9.92	[205] = 13.16
[6] = 2.24	[56] = 5.96	[106] = 7.64	[156] = 10.04	[206] = 13.16
[7] = 2.24	[57] = 5.96	[107] = 7.64	[157] = 10.04	[207] = 13.16
[8] = 2.6	[58] = 5.96	[108] = 7.76	[158] = 10.16	[208] = 13.16
[9] = 2.6	[59] = 6.08	[109] = 7.88	[159] = 10.28	[209] = 13.28
[10] = 2.6	[60] = 6.32	[110] = 7.88	[160] = 10.4	[210] = 13.28
[11] = 2.72	[61] = 6.32	[111] = 8	[161] = 10.52	[211] = 13.28
[12] = 2.72	[62] = 6.32	[112] = 8	[162] = 10.52	[212] = 13.4
[13] = 2.84	[63] = 6.44	[113] = 8	[163] = 10.76	[213] = 13.52
[14] = 2.84	[64] = 6.44	[114] = 8	[164] = 10.76	[214] = 13.64
[15] = 2.84	[65] = 6.44	[115] = 8.12	[165] = 10.88	[215] = 14
[16] = 3.08	[66] = 6.56	[116] = 8.12	[166] = 10.88	[216] = 14.24
[17] = 3.44	[67] = 6.56	[117] = 8.12	[167] = 11	[217] = 14.36
[18] = 3.44	[68] = 6.56	[118] = 8.12	[168] = 11	[218] = 14.36
[19] = 3.44	[69] = 6.56	[119] = 8.24	[169] = 11	[219] = 14.48
[20] = 3.56	[70] = 6.56	[120] = 8.24	[170] = 11.12	[220] = 14.48
[21] = 3.56	[71] = 6.68	[121] = 8.24	[171] = 11.12	[221] = 14.48
[22] = 3.68	[72] = 6.68	[122] = 8.36	[172] = 11.24	[222] = 14.72
[23] = 3.68	[73] = 6.68	[123] = 8.36	[173] = 11.36	[223] = 15.08
[24] = 3.68	[74] = 6.68	[124] = 8.36	[174] = 11.36	[224] = 15.32
[25] = 3.68	[75] = 6.8	[125] = 8.36	[175] = 11.6	[225] = 15.8
[26] = 3.8	[76] = 6.8	[126] = 8.48	[176] = 11.6	[226] = 15.92
[27] = 3.92	[77] = 6.8	[127] = 8.48	[177] = 11.6	[227] = 16.16
[28] = 3.92	[78] = 6.8	[128] = 8.6	[178] = 11.72	[228] = 16.4
[29] = 4.16	[79] = 6.92	[129] = 8.6	[179] = 11.72	[229] = 16.4
[30] = 4.16	[80] = 6.92	[130] = 8.6	[180] = 11.72	[230] = 16.4
[31] = 4.16	[81] = 7.04	[131] = 8.72	[181] = 11.84	[231] = 16.52
[32] = 4.16	[82] = 7.04	[132] = 8.72	[182] = 11.84	[232] = 16.64
[33] = 4.4	[83] = 7.04	[133] = 8.72	[183] = 11.84	[233] = 16.64
[34] = 4.4	[84] = 7.04	[134] = 8.72	[184] = 11.96	[234] = 16.88
[35] = 4.52	[85] = 7.04	[135] = 8.72	[185] = 11.96	[235] = 17
[36] = 4.52	[86] = 7.04	[136] = 8.84	[186] = 12.08	[236] = 17.36
[37] = 4.64	[87] = 7.04	[137] = 8.84	[187] = 12.08	[237] = 17.6
[38] = 4.64	[88] = 7.16	[138] = 8.84	[188] = 12.2	[238] = 17.96
[39] = 4.76	[89] = 7.16	[139] = 8.96	[189] = 12.2	[239] = 18.56
[40] = 4.76	[90] = 7.16	[140] = 9.2	[190] = 12.2	[240] = 19.28
[41] = 4.76	[91] = 7.16	[141] = 9.2	[191] = 12.2	[241] = 19.64
[42] = 4.88	[92] = 7.16	[142] = 9.2	[192] = 12.32	[242] = 20.36
[43] = 5	[93] = 7.28	[143] = 9.32	[193] = 12.32	[243] = 20.48
[44] = 5.12	[94] = 7.28	[144] = 9.32	[194] = 12.32	[244] = 20.84
[45] = 5.12	[95] = 7.28	[145] = 9.44	[195] = 12.56	[245] = 21.08
[46] = 5.12	[96] = 7.28	[146] = 9.56	[196] = 12.8	[246] = 21.08
[47] = 5.36	[97] = 7.4	[147] = 9.56	[197] = 12.8	[247] = 21.92
[48] = 5.36	[98] = 7.52	[148] = 9.56	[198] = 12.8	[248] = 27.08
[49] = 5.48	[99] = 7.52	[149] = 9.68	[199] = 12.92	[249] = 27.2
[50] = 5.48	[100] = 7.52	[150] = 9.68	[200] = 12.92	[250] = 36.68

Im Vergleich mit der Liste **List1** auf S.71 erkennt man deutlich eine Rechtsverschiebung der **C**-Werte. Auf den folgenden Seiten werden nun wieder die zugehörigen primären und sekundären Häufigkeitsverteilungen dargestellt, die vom Taschenrechner erzeugt werden:

List 2 : 119 data   List 3 : 119 data

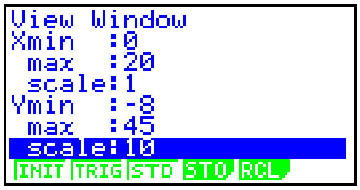
[1] = 1.28	[1] = 1	[61] = 9.68	[61] = 4
[2] = 1.4	[2] = 1	[62] = 9.8	[62] = 1
[3] = 1.76	[3] = 1	[63] = 9.92	[63] = 2
[4] = 1.88	[4] = 1	[64] = 10.04	[64] = 2
[5] = 2.12	[5] = 1	[65] = 10.16	[65] = 1
[6] = 2.24	[6] = 2	[66] = 10.28	[66] = 1
[7] = 2.6	[7] = 3	[67] = 10.4	[67] = 1
[8] = 2.72	[8] = 2	[68] = 10.52	[68] = 2
[9] = 2.84	[9] = 3	[69] = 10.76	[69] = 2
[10] = 3.08	[10] = 1	[70] = 10.88	[70] = 2
[11] = 3.44	[11] = 3	[71] = 11	[71] = 3
[12] = 3.56	[12] = 2	[72] = 11.12	[72] = 2
[13] = 3.68	[13] = 4	[73] = 11.24	[73] = 1
[14] = 3.8	[14] = 1	[74] = 11.36	[74] = 2
[15] = 3.92	[15] = 2	[75] = 11.6	[75] = 3
[16] = 4.16	[16] = 4	[76] = 11.72	[76] = 3
[17] = 4.4	[17] = 2	[77] = 11.84	[77] = 3
[18] = 4.52	[18] = 2	[78] = 11.96	[78] = 2
[19] = 4.64	[19] = 2	[79] = 12.08	[79] = 2
[20] = 4.76	[20] = 1	[80] = 12.2	[80] = 4
[21] = 4.76	[21] = 2	[81] = 12.32	[81] = 3
[22] = 4.88	[22] = 1	[82] = 12.56	[82] = 1
[23] = 5	[23] = 1	[83] = 12.8	[83] = 3
[24] = 5.12	[24] = 3	[84] = 12.92	[84] = 2
[25] = 5.36	[25] = 2	[85] = 13.04	[85] = 4
[26] = 5.48	[26] = 1	[86] = 13.16	[86] = 4
[27] = 5.48	[27] = 2	[87] = 13.28	[87] = 3
[28] = 5.72	[28] = 2	[88] = 13.4	[88] = 1
[29] = 5.84	[29] = 2	[89] = 13.52	[89] = 1
[30] = 5.96	[30] = 3	[90] = 13.64	[90] = 1
[31] = 6.08	[31] = 1	[91] = 14	[91] = 1
[32] = 6.32	[32] = 3	[92] = 14.24	[92] = 1
[33] = 6.44	[33] = 1	[93] = 14.36	[93] = 2
[34] = 6.44	[34] = 2	[94] = 14.48	[94] = 3
[35] = 6.56	[35] = 5	[95] = 14.72	[95] = 1
[36] = 6.68	[36] = 4	[96] = 15.08	[96] = 1
[37] = 6.8	[37] = 1	[97] = 15.32	[97] = 1
[38] = 6.8	[38] = 3	[98] = 15.8	[98] = 1
[39] = 6.92	[39] = 2	[99] = 15.92	[99] = 1
[40] = 7.04	[40] = 7	[100] = 16.16	[100] = 1
[41] = 7.16	[41] = 5	[101] = 16.4	[101] = 3
[42] = 7.28	[42] = 4	[102] = 16.52	[102] = 1
[43] = 7.4	[43] = 1	[103] = 16.64	[103] = 2
[44] = 7.52	[44] = 5	[104] = 16.88	[104] = 1
[45] = 7.64	[45] = 5	[105] = 17	[105] = 1
[46] = 7.76	[46] = 1	[106] = 17.36	[106] = 1
[47] = 7.88	[47] = 2	[107] = 17.6	[107] = 1
[48] = 8	[48] = 4	[108] = 17.96	[108] = 1
[49] = 8.12	[49] = 4	[109] = 18.56	[109] = 1
[50] = 8.24	[50] = 3	[110] = 19.28	[110] = 1
[51] = 8.36	[51] = 4	[111] = 19.64	[111] = 1
[52] = 8.48	[52] = 2	[112] = 20.36	[112] = 1
[53] = 8.6	[53] = 3	[113] = 20.48	[113] = 1
[54] = 8.72	[54] = 5	[114] = 20.84	[114] = 1
[55] = 8.84	[55] = 3	[115] = 21.08	[115] = 2
[56] = 8.96	[56] = 1	[116] = 21.92	[116] = 1
[57] = 9.2	[57] = 3	[117] = 27.08	[117] = 1
[58] = 9.32	[58] = 2	[118] = 27.2	[118] = 1
[59] = 9.44	[59] = 1	[119] = 36.68	[119] = 1
[60] = 9.56	[60] = 3		

Es ist auch hier erstaunlich, dass damit die ursprünglichen **25000** Würfeldaten auf **37** Klassen (Klassenmitten in Liste **List4** sind **0.5**, **1.5**, **2.5**, **...**, **36.5**) verdichtet wurden. Erkennbar ist die stärkere Besetzung der Klassen im ersten Drittel und die schwache Besetzung der Anfangsklassen sowie der letzten Klassen, d.h. sehr kleine **C**-Werte und auch die großen **C**-Werte sind recht selten aufgetreten (Klassenhäufigkeiten in **List5[2]** bis **List5[38]**).

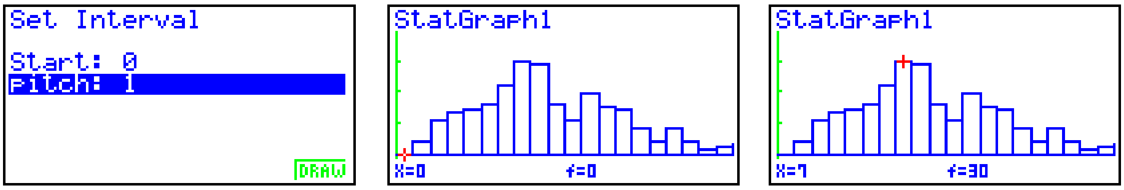
List 4 : 38 data		List 5 : 38 data	
[1]	0	[1]	0
[2]	0.5	[2]	0
[3]	1.5	[3]	4
[4]	2.5	[4]	11
[5]	3.5	[5]	13
[6]	4.5	[6]	14
[7]	5.5	[7]	16
[8]	6.5	[8]	22
[9]	7.5	[9]	30
[10]	8.5	[10]	29
[11]	9.5	[11]	16
[12]	10.5	[12]	11
[13]	11.5	[13]	19
[14]	12.5	[14]	15
[15]	13.5	[15]	14
[16]	14.5	[16]	8
[17]	15.5	[17]	4
[18]	16.5	[18]	8
[19]	17.5	[19]	4
[20]	18.5	[20]	1
[21]	19.5	[21]	2
[22]	20.5	[22]	3
[23]	21.5	[23]	3
[24]	22.5	[24]	0
[25]	23.5	[25]	0
[26]	24.5	[26]	0
[27]	25.5	[27]	0
[28]	26.5	[28]	0
[29]	27.5	[29]	2
[30]	28.5	[30]	0
[31]	29.5	[31]	0
[32]	30.5	[32]	0
[33]	31.5	[33]	0
[34]	32.5	[34]	0
[35]	33.5	[35]	0
[36]	34.5	[36]	0
[37]	35.5	[37]	0
[38]	36.5	[38]	1

In den folgenden Screenshots werden das zugehörige **Histogramm**, das **Häufigkeitspolygon** und die **theoretische Wahrscheinlichkeits-Dichte** (mit dem Faktor **M** gestreckt), die auf der Chi-Quadrat-Verteilung beruht, dargestellt und zum Vergleich überlagert. Man erkennt jetzt deutlich, dass die Theoretische Prüfverteilung nicht mehr eingetreten ist, d.h. die simulierten **C**-Werte sind offenbar wegen der gestörten Nullhypothese zum idealen Würfel auch nicht mehr Chi-Quadrat-verteilt.
Da unterschiedliche Graphik-Typen (z.B. Funktionsgraphik im **GRAPH**-Menü oder statistische Graphik im **STAT**-Menü) nicht gleichzeitig aktiviert werden können, werden Hintergrundbilder abgespeichert und dann einer anderen aktiven Graphik hinterlegt. Eine entsprechende Einstellung ist dazu im **SET UP** vorzunehmen.

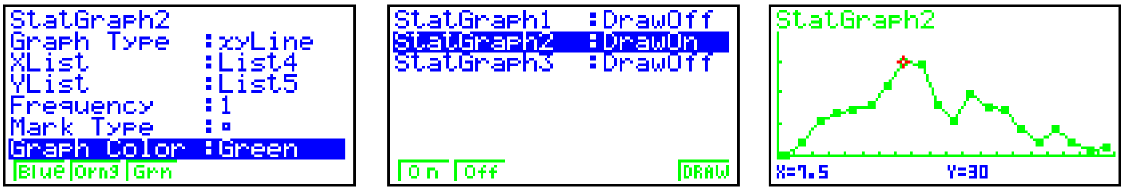
Für alle Graphiken ist ein einheitliches Betrachtungsfenster einzurichten, so dass neben der eigentlichen Graphik auch eine Kopf- und eine Fußzeile Platz finden ohne die Graphik zu überdecken.
Wir wählen mit Blick auf die Listen **List4** und **List5** die folgende Fenstereinstellung:



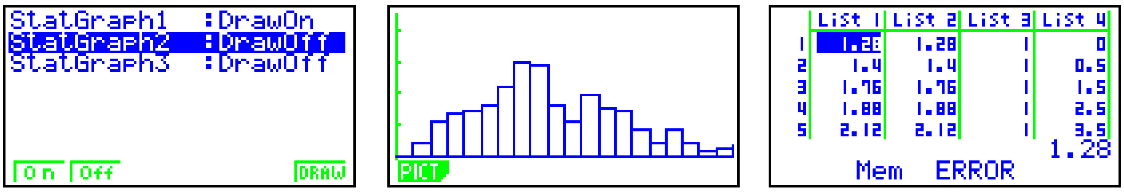
Die Trace-Funktion im Histogramm stellt den Cursor auf Klassenmitte und zeigt unten links jedoch die jeweils linke Klassengranze an, z.B. besitzt die 8. Klasse mit **7 ≤ C < 8** die Häufigkeit **30**:

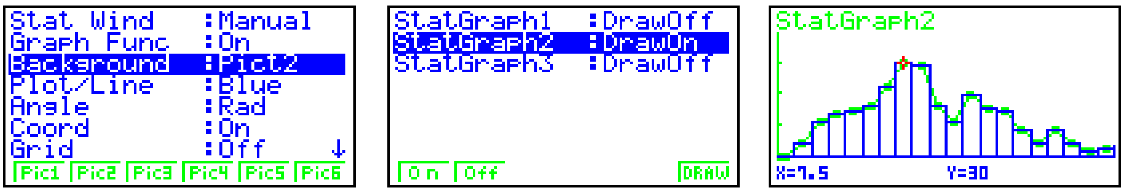


Jetzt betrachten wir das zugehörige Häufigkeitspolygon mit korrekten Cursorkoordinaten:

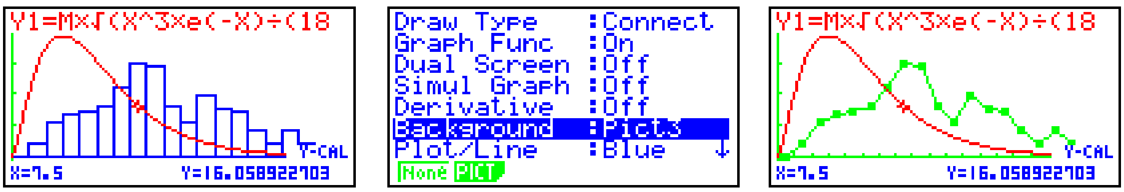


Nun wird das Histogramm als Hintergrundbild abgespeichert, indem über OPTN das **PICT**-Untermenü aufgerufen und eine Abspeicherung in **Pic2** erfolgt (**Mem ERROR** bei Speicherüberlauf):





Die folgenden Bilder zeigen die Überlagerung mit der theoretischen Wahrscheinlichkeitsdichte:



Es ist deutlich erkennbar, dass in der Tat eine Übereinstimmung von Histogramm bzw. Häufigkeitspolygon und theoretischer Dichtefunktion nicht mehr $y = \mathrm{M} \times \sqrt{x^3 \times e^{-x} / 18\pi}$ besteht.

Interpretation:
Entspricht der simulierte Würfel nicht einem idealen Würfel, so ist dies in mehreren Experimenten leicht feststellbar: Das Häufigkeitspolygon der **C**-Werte verschiebt sich nach rechts im Vergleich mit der theoretischen Prüfverteilung (Chi-Quadrat-Verteilung), die sich nur unter der richtigen Null-hypothese einstellt!

Abschließende Diskussion zu den Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 1. und 2.Art:

Die Ablehnung der Nullhypothese (bei ungünstiger Simulation) für einen eigentlich idealen Würfel bezeichnet man als Fehler 1.Art. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist die sogenannte Irrtumswahrscheinlichkeit.

Die Nichtablehnung einer nicht zutreffenden Nullhypothese $\mathbf{H_0}$ (Simulation eines „gezinkten" Würfels) für einen eigentlich „gezinkten" Würfel bezeichnet man als Fehler 2. Art. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art kann man nur bestimmen, wenn die (simulierte) Testverteilung der **C**-Werte unter der Alternativhypothese $\mathbf{H_A}$ bekannt ist.

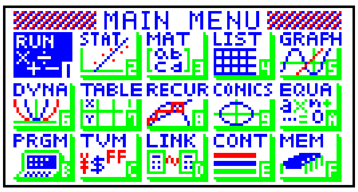
Ein Entscheidungskriterium könnte man über denjenigen **C**-Wert formulieren, für den die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art nicht anders ausfällt als die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.
Dazu muß man die zu den jeweiligen Prüfverteilungen der **C**-Werte gehörenden Verteilungsfunktionen $\mathbf{F_0}$ bzw. $\mathbf{F_A}$ betrachten und folgende Gleichung lösen:

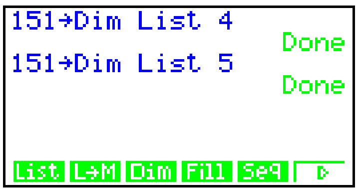
$$\mathbf{P(C > c \mid H_0) = P(C \leq c \mid H_A)}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{1 - F_0(c) = F_A(c)}.$$

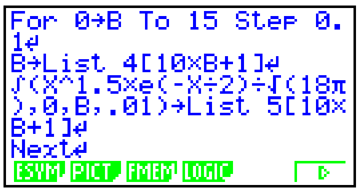
Die Verteilungsfunktion $\mathbf{F_0}$ ist die theoretische Chi-Quadrat-Verteilungsfunktion (mit 5 Freiheitsgraden), für die (unbekannte) Verteilungsfunktion $\mathbf{F_A}$ kann nur die simulierte empirische Verteilungsfunktion zur Anwendung kommen. In den folgenden Bildern werden die Funktionen $y = \mathbf{1 - F_0}(c)$ und $y = \mathbf{F_{M,A}}(c)$ graphisch dargestellt und zum Schnitt gebracht. Die Abszisse des Schnittpunktes ist der gesuchte c-Wert für das Entscheidungskriterium.
Zuerst wird die Verteilungsfunktion der theoretische Prüfverteilung unter $\mathbf{H_0}$ bereitgestellt,

$$y = \mathbf{F_0}(c) = \int_{x=0}^{c} x^{3/2}\ \mathrm{e}^{-x/2} \,/\, (18\pi)^{1/2}\, \mathrm{d}x\ ,\ c > 0\ ,$$

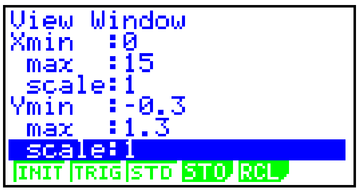
indem im **RUN**-Menü mittels numerischer Integration eine Wertetabelle erzeugt wird. Dabei werden die c-Werte (**0** bis **15** mit Schrittweite **0,1**) in Liste **List4** und die y-Werte in Liste **List5** abgespeichert.

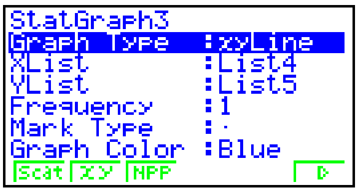


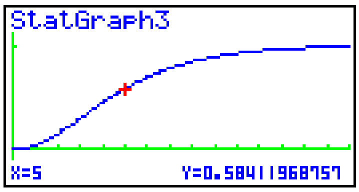




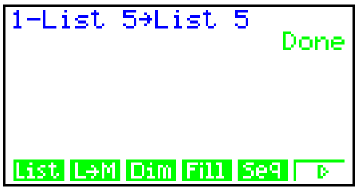
Im **STAT**-Menü wird die Verteilungsfunktion als x-y-Polygonzug graphisch dargestellt:

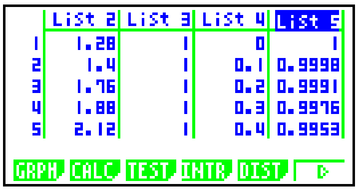


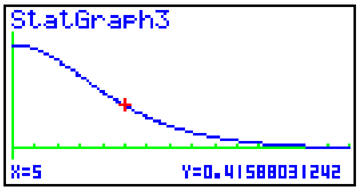




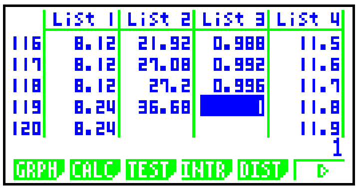
Jetzt wird im **RUN**-Menü **List5** durch **1-List5** ersetzt, um die Wertetabelle für y = **1 -** $F_0(c)$ bereitzustellen und um den zugehörigen x-y-Polygonzug graphisch abzubilden (im **STAT**-Menü):

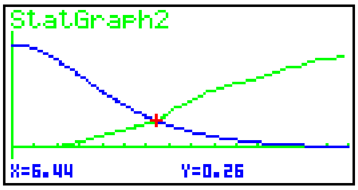


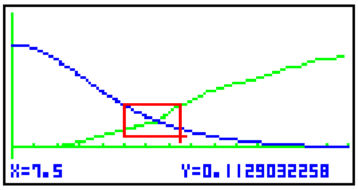


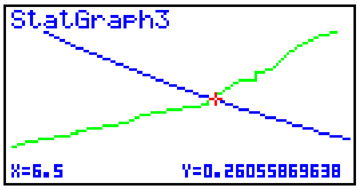


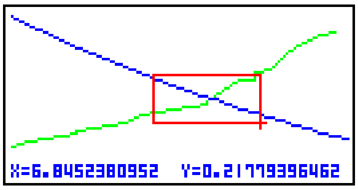
Nun wird endlich die Gleichung **1 -** $F_0(c) = F_{M,A}(c)$ ausgewertet, wobei $y = F_{M,A}(c)$ die emprische Verteilungsfunktion (für **M** simulierte **C**-Werte) ist. Diese wird ebenfalls als x-y-Polygonzug graphisch abgebildet, indem die Listen **List2** und **Cuml List3/M** (kumulierte relative Häufigkeiten) benutzt werden:

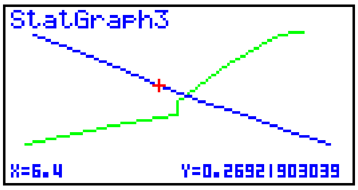


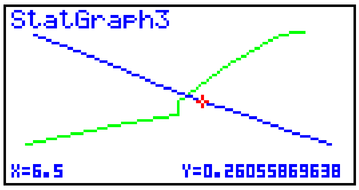








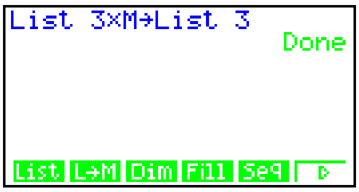


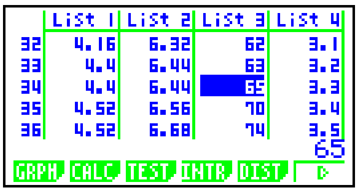


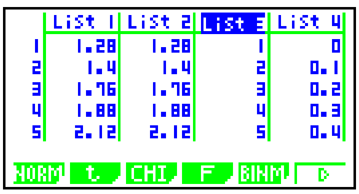
Damit findet man durch Einzoomen etwa die graphische Lösung c **= 6,47**.

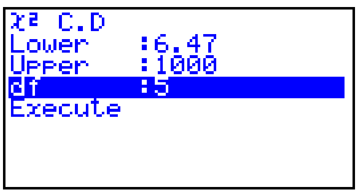
Das läßt folgende Interpretation zu:

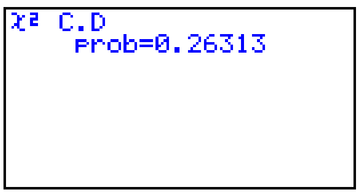
Falls die Alternativhypothese zutrifft, liegen genau **65** von **250** simulierten **C**-Werten unterhalb des graphisch ermittelten Entscheidungswertes c **= 6,47**, das sind **26%**. Oder anders gesprochen:
Mit einer Wahrscheinlichkeit von **0,26** liegt der zufällige **C**-Wert des „gezinkten" Würfels unterhalb des kritischen Wertes c **= 6,47** (vgl. auch Tabelle S. 77).
Andererseits liegen auch genau **26%** der **C**-Werte des idealen Würfels oberhalb des kritischen Wertes c **= 6,47**, d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von **0,26** erzeugt der ideale Würfel Werte oberhalb von c **= 6,47**.











Die theoretische Wahrscheinlichkeit **0,26** wurde im Untermenü **DIST** (Distribution - Wahrscheinlichkeits-verteilungen) des **STAT**-Menüs berechnet, indem dort **CHI** (Chi-Quadrat-Verteilung) aufgerufen und **Ccd** (Chi cumulative distribution) und nicht **Cpd** (Chi probability density) ausgewählt wird.

Damit gilt für die simulierten Würfel folgende Aussage:
Wählt man als Entscheidungskriterium $\min\{\alpha(c), \beta(c)\} \rightarrow \min!$, d.h. c **= 6,47**, dann ist die Wahrscheinlichkeit α für den Fehler 1. Art nicht größer als **0,26** und ebenso auch die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art nicht größer als **0,26**. D.h., egal wie der Würfel beschaffen ist, man sollte bei $C < 6{,}47$ keinen Einwand gegen die Nullhypothese erheben, jedoch bei die $C \geq 6{,}47$ Nullhypothese ablehnen.

Statistische Testaufgabe:
Mit einem Würfel, der entweder ideal oder „gezinkt“ sein kann, wurde **N = 100** mal gewürfelt. Über die Alternativhypothese liegen jedoch keine Erkenntnisse vor. Es ergab sich folgende Häufigkeits-verteilung:

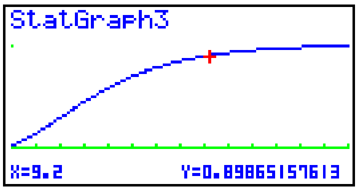
X = i	1	2	3	4	5	6
h_i	15	16	18	17	16	18

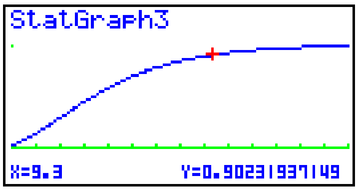
Man teste mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von **10%** (Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$) die Null-hypothese, dass der Würfel ideal gewesen ist.

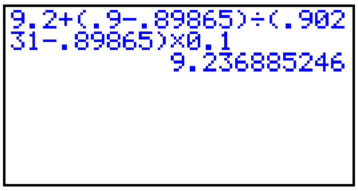
Lösungsweg:
Es ist derjenige c-Wert $c = c_{0,9}$ zu finden, für den $P(C < c_{0,9}) \leq 0{,}9 \leq P(C \leq c_{0,9})$ bzw. $P(C \geq c_{0,9}) \geq 0{,}1 \geq P(C > c_{0,9})$ gilt. Allgemein $P(C < c_{1-\alpha}) \leq 1-\alpha \leq P(C \leq c_{1-\alpha})$.

$c_{1-\alpha}$ heißt Quantil der Ordnung $1-\alpha$ der Prüfverteilung der Zufallsgröße **C**. Es gilt:

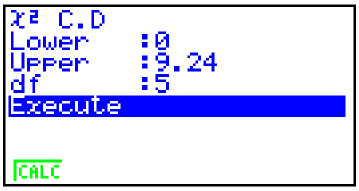
$F_0(c_{1-\alpha}) = 1-\alpha$ bzw. $c_{1-\alpha} = F_0^{-1}(1-\alpha)$, wobei F_0^{-1} die Umkehrfunktion von F_0 bedeutet.

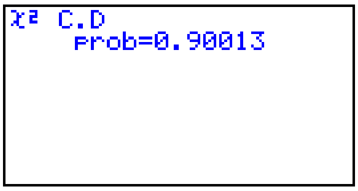






Damit ist $c_{1-\alpha} = c_{0,9} = 9{,}24$ das gesuchte Quantil (Die Bilder zeigen die Trace-Funktion im **STAT**-Menü und anschließend eine lineare Interpolation im **RUN**-Menü). Probe im **CHI**-Untermenü:





Das oben gegebene Datenmaterial führt auf den **C**-Wert **0,44 < 9,24**. Damit liegt der **C**-Wert nicht im sogenannten kritischen Bereich und es besteht kein Anlaß zur Ablehnung der Nullhypothese.

Literaturhinweis zu dieser Testaufgabe:
[1] Aulenbacher, G., Paditz, L., Wabel-Frenk, U.: **Lehr- und Übungsbuch Mathematik Band 3 (Lineare Algebra und Stochastik)**, Hrsg. von Preuß, W., Wenisch, G., Fachbuchverlag Leipzig, 2. durchgesehene Auflage 2001 (ISBN 3-446-21682-0), S. 122 (Beispiel 6.1), S. 268 (Aufgabe 19.10) und S. 343 (Lösungshinweis zur Aufgabe 19.10)

