7. Effektiver Einsatz des Graphiktaschenrechners in der Oberstufe - Ungleichungsgraphik und lineare Optimierung (CASIO)

Die Aufgabenstellung:

Lösen Sie die folgenden zwei Probleme!

Aufgabe 1:

Skizzieren Sie den Bereich **S** (und markieren Sie die Eckpunkte) als Lösungsmenge des folgenden Systems linearer Ungleichungen:

$x - 3y \leq -1$, $2x + y \leq 5$ und $3x - 2y \geq -3$.

Aufgabe 2:

Ein Punkt $P(x, y)$ gehöre zum Bereich **S**. Optimieren Sie die Zielfunktion $z = f(x, y) = x + y$, d. h. finden Sie die maximalen und minimalen Summen von $f(x, y) = x + y$ und die zugehörigen Argumente x und y .

Die Lösungsstrategie:

Zur Lösung von Aufgabe 1 ersetzen Sie zunächst die einzelnen Ungleichungen durch die entsprechenden Gleichungen. Es ergibt sich ein System linearer Gleichungen:

$x - 3y = -1$ **(1)** , $2x + y = 5$ **(2)** und $3x - 2y = -3$ **(3)** .

a) Stellen Sie jede einzelne Gleichung **(1)**, **(2)** und **(3)** im selben Koordinatensystem dar und suchen Sie die Schnittpunkte der Geraden **(1)** und **(2)**, **(2)** und **(3)** sowie **(3)** und **(1)**.

b) Finden Sie den zulässigen Bereich **S** als Durchschnittsmenge von Punkten, die zu jedem der Graphen des Systems linearer Ungleichungen gehört, indem Sie zeigen, welche Halbebene jeweils die betreffende Ungleichung erfüllt.

Zur Lösung von Aufgabe 2 gehen Sie wie folgt vor:

c) k sei ein Wert, den die Summe $f(x, y) = x + y$ annehmen kann, also $k = x + y$. Untersuchen Sie den Graphen einer Geraden mit dem Anstieg **- 1** und dem Schnittpunkt mit der y-Achse an der Stelle $y = k$, d. h. $y = -x + k$.

d) Verschieben Sie die Gerade $y = -x + k$ parallel im zulässigen Bereich **S** und finden Sie heraus, wo k ein Maximum oder Minimum erreicht.

Zur Lösung der Aufgabe 1:

Stellen Sie jede Ungleichung nach y um. Beachten Sie dabei das Vorzeichen von y.

$y \geq x/3 + 1/3$, $y \leq -2x + 5$ und $y \leq 3x/2 + 3/2$.

Anmerkung:

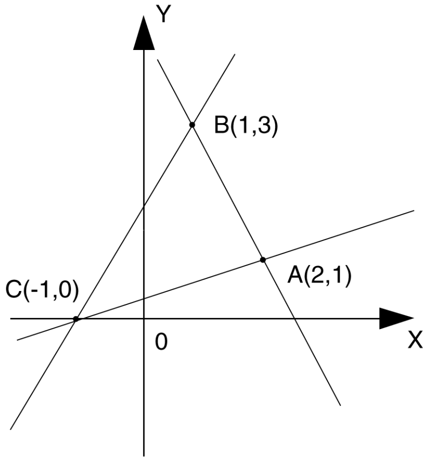
Bestimmte Ungleichungen können nicht nach y aufgelöst werden. Bei negativem Vorzeichen von y müssen wir auf diejenigen Schüler achten, die nicht daran denken, dass die Division beider Seiten einer Ungleichung durch dieselbe negative Zahl das Relationszeichen der sich ergebenden Ungleichung umkehrt. Wir sollten den Schülern zunächst Ungleichungen geben, die nach y aufgelöst werden können, indem lediglich einige Terme von der einen auf die andere Seite verschoben werden müssen.

Gehen Sie nun in den einzelnen Ungleichungen zu den entsprechenden Gleichungen über und stellen Sie die Gleichungen graphisch dar:

$y = x / 3 + 1/3$,

$y = -2x + 5$ und

$y = 3x/2 + 3/2$.



Die Schnittpunkte **A**, **B** und **C** finden wir durch Lösen der linearen Gleichungssysteme **(1)** und **(2)**, **(2)** und **(3)** sowie **(3)** und **(1)**.

Anwendung des Graphiktaschenrechners, 1.Schritt: die Geraden

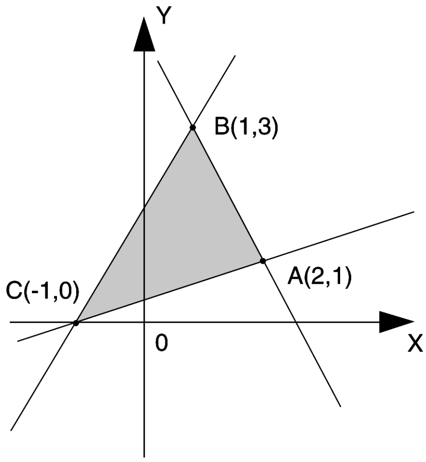
Anmerkung:

Achten Sie auf diejenigen SchülerInnen (es gibt stets einige), die die Gleichungen (1), (2) und (3) nicht graphisch darzustellen vermögen. Obwohl die Tatsache, dass die Schnittpunkte der Geraden (1) und (2), (2) und (3) sowie (3) und (1) die Lösungen der entsprechenden linearen Gleichungssysteme sind, in dieser Klassenstufe bekannt sein müsste, gibt es stets SchülerInnen, die derartige einfache Gleichungssysteme nicht lösen können.

Die Gerade $y = \mathbf{m}\,x + \mathbf{n}$ teilt die Ebene in zwei Halbebenen.

Das Gebiet von $y > \mathbf{m}\,x + \mathbf{n}$ ist die obere Halbebene (ohne Rand) oberhalb der Geraden.

Das Gebiet von $y < \mathbf{m}\,x + \mathbf{n}$ ist die untere Halbebene (ohne Rand) unterhalb der Geraden.



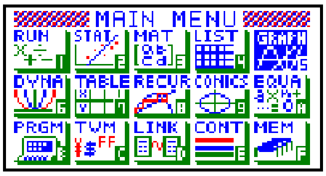
Anwendung des Graphiktaschenrechners, 2.Schritt: das konvexe Vieleck S (Dreieck)

Anmerkung:

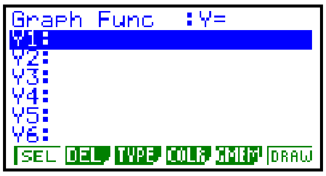
*Dass der zulässige Bereich **S** ein gemeinsame Punktmenge ist, erfassen die Schüler offensichtlich intuitiv und visuell. Einige SchülerInnen allerdings geben auf, bevor sie die Aufgabe fertig gelöst haben, weil sie den Mengendurchschnitt dreier Halbebenen nicht erkennen.*

Wir bearbeiten nun die Aufgabenstellung unter Nutzung des GRAPH-Menüs des Taschenrechners:

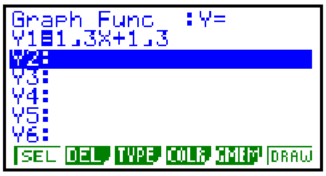
1. Schritt: Wir zeichnen die Geraden (1), (2) und (3) mit dem Graphiktaschenrechner.



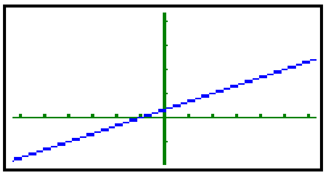
Wählen Sie das **GRAPH**-Menü im Hauptmenü (**MAIN MENU**) des Graphiktaschenrechners aus, geben Sie die drei Gleichungsterme ein und drücken Sie [EXE], um die drei Gleichungen in **Y1**, **Y2** bzw. **Y3** zu speichern.



Zuerst speichern wir Gleichung (1) in **Y1**.
SET UP - Einstellungen: Coord: On, Axes: On, Graph Func: On
Betrachtungsfenstereinstellungen (**V-Window**):
Xmin : -6.3, Xmax : 6.3, Xscale : 1,
Ymin : -2, Ymax : 4, Yscale : 1,



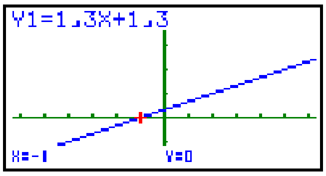
Zur Voreinstellung des Funktionstyps (kartesische Koordinaten Y=) drücken Sie [F3] und [F1]. Den Funktionsterm geben Sie wie folgt ein: **Y1 =** [1] [a b/c] [3] [X,θ,T] [+] [1] [a b/c] [3] [EXE]



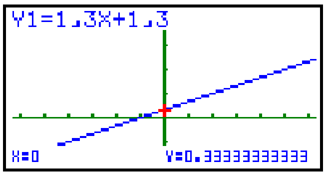
Nach der Eingabe drücken Sie [F6] **[DRAW]** zum Zeichnen der Geraden (1): $y = x / 3 + 1 / 3$. Mit **[Trace]** können Sie den Graphen abtasten.

Anmerkung:
Lassen Sie diejenigen SchülerInnen, die den Graphen der Geraden (1) zu zeichnen vermochten, den Graphen in ihre Niederschriften übernehmen. Wenn Sie sie die Schnittpunkte der x- und y-Achse mithilfe der Trace-Funktion zuvor schon haben untersuchen lassen, sind die Schüler in der Lage zu erkennen, dass der Schnittpunkt mit der y-Achse mit dem Absolutglied von Gleichung (1) zusammenfällt.

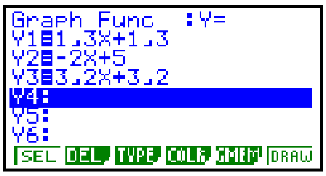
[F1]



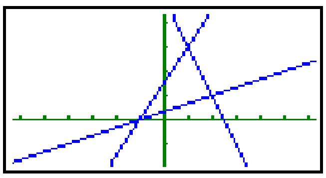
▶▶▶
wiederholtes Drücken der Pfeiltaste (rechts)



Um zum **GRAPH**-Menü (Graph Func Display) zurückzukehren, drücken Sie [EXIT].



Speichern Sie nun die Geradengleichungen (2) und (3) in derselben Weise wie **Y1** und drücken Sie [F6], um sie graphisch darzustellen.

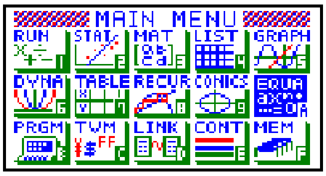


Gerade (2): $y = -2x + 5$,

Gerade (3): $y = 3x / 2 + 3 / 2$.

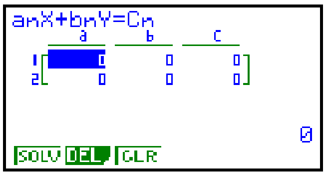
Lassen Sie die Schüler, die auch die beiden Graphen (2) und (3) darstellen konnten, diese in ihre Niederschriften übernehmen und wiederum die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse mithilfe der Trace-Funktion untersuchen.

Wir bearbeiten nun die Aufgabenstellung unter Nutzung des EQUA-Menüs des Taschenrechners:

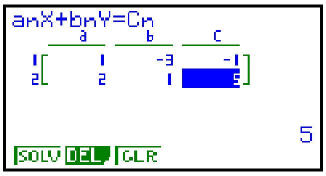


Um das lineare Gleichungssystem $x - 3y = -1$ **(1)**, $2x + y = 5$ **(2)** mit dem Graphiktaschenrechner zu lösen, gehen Sie wie folgt vor:

Wählen Sie das **EQUA**-Menü im Hauptmenü (**MAIN MENU**) aus und drücken Sie [F1] [**SIML**], um die Anzahl der Unbekannten vorzugeben. Wir drücken [F1] und geben damit 2 Unbekannte vor.

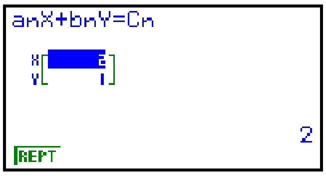


Geben Sie nacheinander die einzelnen Koeffizienten entsprechend der Cursor-Position ein.

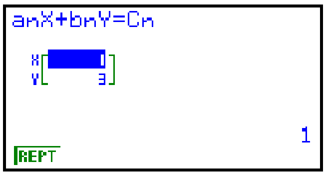


Nach der Eingabe eines Koeffizienten drücken Sie [EXE], damit sich der Cursor selbsttätig zum nächsten Eingabefeld bewegt.

Nach der Eingabe aller Koeffizienten drücken Sie zur Lösung des Gleichungssystems [F1] [**SOLV**].

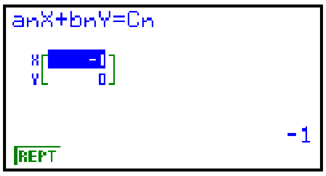


Der Rechner gibt aus: $x = 2$, $y = 1$, d. h. **A(2, 1)**.



Auf analoge Weise erhalten wir **B(1, 3)** für

$2x + y = 5$ **(2)** und $3x - 2y = -3$ **(3)**



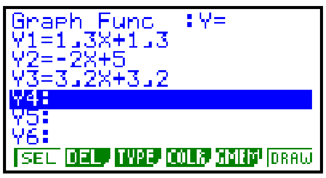
und **C(-1, 0)** für

$3x - 2y = -3$ **(3)** und $x - 3y = -1$ **(1)** .

Zurück zur Nutzung des GRAPH-Menüs des Taschenrechners:

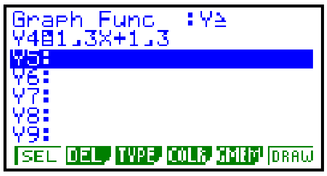
2. Schritt: Wir zeichnen den zulässigen Bereich **S** mit dem Graphiktaschenrechner.

Geben Sie $y \geq x/3 + 1/3$ in **Y4** ein.

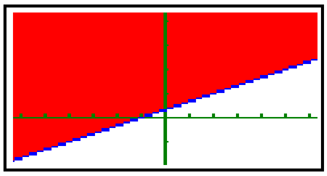


Damit die bereits in **Y1**, **Y2** und **Y3** eingegebenen Graphen nicht gezeichnet werden, heben Sie die Auswahl wie folgt auf:

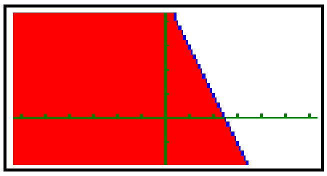
[F1] [**SEL**] ▼ [F1] [**SEL**] ▼ [F1] [**SEL**] ▼



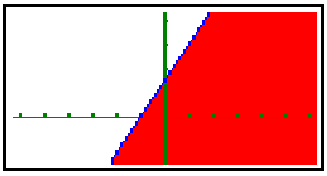
Um den Graphik-Typ für **Y4** von **Y=** in eine Ungleichung **Y≥** (unter Beibehaltung der kartesischen Koordinaten) zu verwandeln, drücken Sie **F3** **[TYPE]**, **F6** und **F3** **[Y≥]**, um die Ungleichungsform einzustellen.



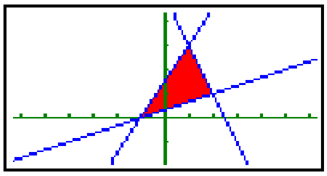
Geben Sie die Ungleichung ein und drücken Sie **F6** **[DRAW]**. Der Graph sollte zweckmäßigerweise wieder in die Niederschrift übernommen werden.



Geben Sie in derselben Weise $y \leq -2x + 5$ in **Y5** ein und stellen Sie den Graphen (nur der Graph) wie rechts gezeigt dar.



Geben Sie in derselben Weise $y \leq 3x/2 + 3/2$ in **Y6** ein und stellen Sie den Graphen (nur der Graph) wie rechts gezeigt dar.

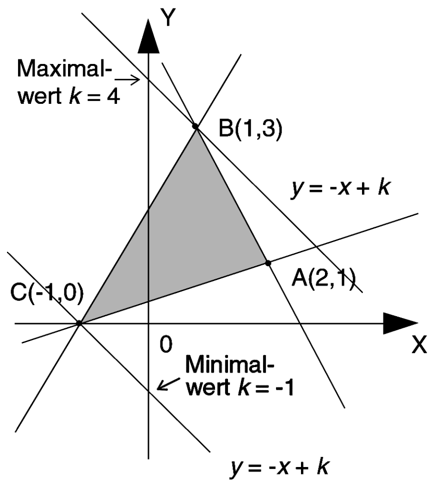


Wir stellen jetzt **Y4**, **Y5** und **Y6** gleichzeitig dar, um die Schüler visuell anzusprechen.
Wir haben damit den zulässigen Bereich **S** erhalten.

Zur Lösung der Aufgabe 2:

k sei eine Konstante und gleich der Summe $x + y$.
Wir bezeichnen die Gleichung $k = x + y$ als Kurvenschar paralleler Geraden (4).

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Punkte **P**(x, y) in **S** zu finden, in denen k ein Maximum oder ein Minimum erreicht, indem die Gerade $y = -x + k$ **(4)** im Gebiet **S** parallel verschoben wird.



Aus der rechts abgebildeten Graphik entnehmen wir:

Der Maximalwert ist **k = 4**, wenn **x = 1** und **y = 3**.

Der Minimalwert ist **k = -1**, wenn **x = -1** und **y = 0**.

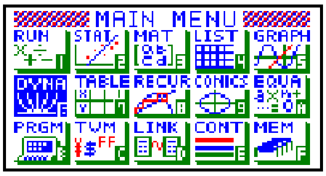
Anwendung des Graphiktaschenrechners,
3.Schritt: die Kurvenschar $y = -x + k$ über dem zulässigen Bereich S

Anmerkung:
Einige SchülerInnen erkennen nicht, dass $x + y = k$ eine Gerade ist. Lösen Sie für diese SchülerInnen die Gleichung nach y auf und zeigen Sie, dass die Gerade (4) den Anstieg ***-1*** *und den Schnittpunkt mit der y-Achse bei $y = k$ hat. Betonen Sie dabei, dass die Werte von x und y, die das Maximum bzw. Minimum ergeben, zum zulässigen Bereich* ***S*** *gehören müssen.*

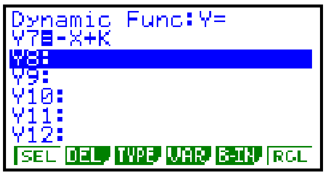
<u>Wir bearbeiten nun die Aufgabenstellung unter Nutzung des DYNA-Menüs des Taschenrechners:</u>

3. Schritt: Wir zeichnen die Kurvenschar $y = -x + k$ mit dem Graphiktaschenrechner.

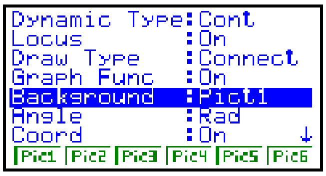
Wir nutzen dazu das **DYNA**-Menü (dynamischen Graphik), in dem der Wert von k (Schnittpunkt der Geraden $y = -x + k$ mit der y-Achse) auf dem Bildschirm vor dem Hintergrund des zulässigen Bereiches **S,** vgl. Aufgabe 1, schrittweise geändert werden kann.



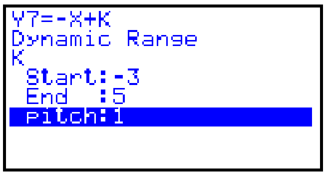
Speichern Sie dazu die Gerade $y = -x + k$ in **Y7**.



Wir gehen jetzt zurück in das **GRAPH**-Menü, wo das gewünschte Hintergrundbild erzeugt wird. Zur Abspeicherung des Hintergrundbildes als **Pic1** drücken Sie [OPTN] [F1][PICT] [F1][STO] [F1][Pic1] auf dem Graphik-Bildschirm, auf dem der zulässige Bereich **S** dargestellt wird. Damit ist das Hintergrundbild **Pic1** abgespeichert.

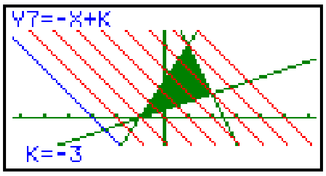


Um diesen Bildschirm als Hintergrundbild im **SET UP**-Menü einzustellen, drücken Sie
[SHIFT][SET UP] ▽ ▽ ▽ ▽ [F2][PICT] [F1][Pic1].



Jetzt können Sie im **DYNA**-Menü Kurven auf dem abgespeicherten Hintergrundbild **Pic1** darstellen.

Legen Sie den Parameterbereich und die Schrittweite (**pitch**) für k (**Dynamic Range**) fest, so wie Sie den Wert von k in der Gleichung $y = -x + k$ variieren wollen und stellen Sie die Kurvenschar als dynamische Graphik dar.



Hinweis:
Um die Ortseinstellung (**Locus**) der Kurvenschar zu verändern, stellen Sie im **SET UP**-Menü **Locus** auf **Off**. Sie können jetzt die dynamische Graphik realisieren, ohne dass die einzelnen Geraden im Bildschrim verbleiben.