# 6. Aufgabenstellungen zur Aufnahmeprüfung an einer Hochschule und Lösungsvorschläge mithilfe eines Graphiktaschenrechners

## 6.1 Parameterbereiche und quadratische Ungleichungen (Nagatsuka)

**Zielstellung:**
Bei Aufnahmeprüfungen tauchen oft Aufgaben auf, in denen für Funktionen und Gleichungen zwei oder mehr symbolische Größen verwendet werden. Die Unterscheidung zwischen Variablen, Parametern und Konstanten bereitet den teilnehmenden Schülern häufig Schwierigkeiten. Der Graphiktaschenrechner erlaubt es, symbolische Größen freizügig zu ändern und das Resultat zu betrachten.
**Mathematischer Hintergrund:** Quadratische Funktionen und Ungleichungen

### Aufgabenstellung:

Für welche Zahlenwerte von $a$ gilt die Ungleichung $x < 3 + ax - x^2$ für alle $x$ ($1 \leq x \leq 3$)?

### Die theoretische Lösung:

Wir betrachten die Funktion $y = f(x) = x^2 + x - ax - 3$ im Intervall $1 \leq x \leq 3$. Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel. Die Bestimmung eines Intervalles für $a$, in dem $f(x) < 0$ gilt, ist der Kernpunkt der Aufgabenstellung. Es gilt nun folgende Umformung (quadratische Ergänzung):

$$f(x) = x^2 + (1-a)\,x - 3 = \left(x + (1-a)/2\right)^2 - (1-a)^2/4 - 3$$

$$\text{Scheitelpunkt} \quad S\left((1-a)/2\,,\ -(1-a)^2/4 - 3\right)$$

Wegen $-(1-a)^2/4 - 3 < 0$ für alle reellen $a$ gilt für die $y$-Koordinate des Scheitelpunkts stets $y < 0$.
Weiterhin folgt aus $f(1) < 0$ die Bedingung $f(1) = 1 + (1-a) - 3 < 0$, d.h. $a > -1$, sowie aus $f(3) < 0$ die Bedingung $f(1) = 9 + 3(1-a) - 3 < 0$, d.h. $a > 3$. Somit lautet die Antwort: $a > 3$.

### Der praktische Lösungsweg 1 (mit dem Graphiktaschenrechner)

**1.1 Anwendung der dynamischen Graphik** im **DYNA**-Menü, um zu beobachten, wie sich Änderungen des Parameters $a$ von $f(x)$ in der Graphik auswirken!

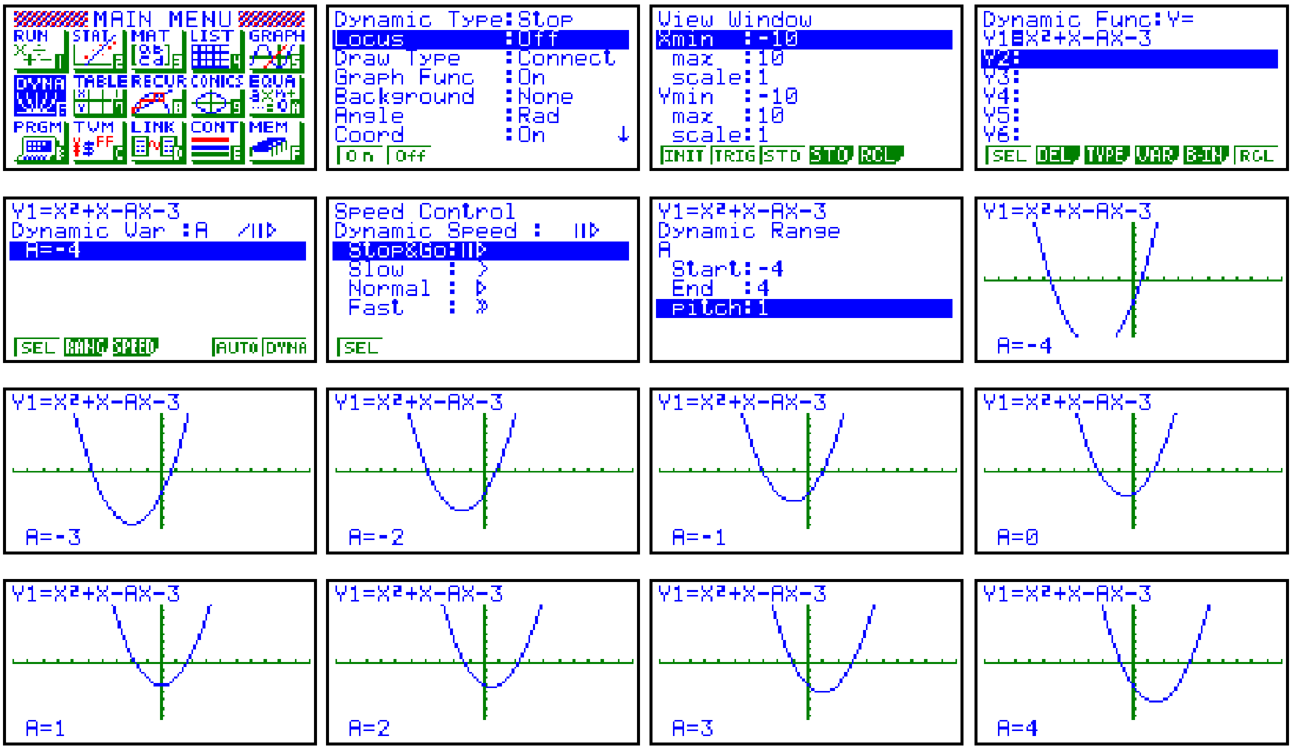
a) Aus dem Hauptmenü das **DYNA**-Menü auswählen (**SET UP** Locus: Off (keine Kurvenschar)).

b) Den Term $x^2 + x - ax - 3$ für $f(x)$ eingeben (View Window [F3] [**STD**]):

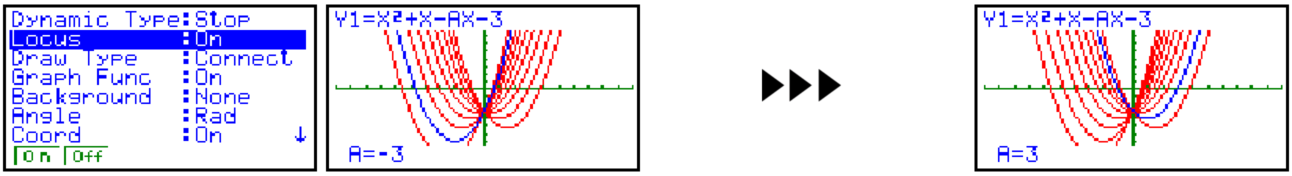
$X^2 + X - AX - 3$ in **Y1** eingeben und abschließend [EXE] drücken.

c) Zum Übergang in die nächsten Displays [F4] [**VAR**] --> [F3] [**SPEED**] bzw. [F2] [**RANG**]drücken.

d) Nun den Wertebereich (RANGE) für $A$ von **-4** (Start, Anfangswert) bis **4** (End, Endwert) und die Schittweite (pitch) mit **1** eingeben: [(−)] [4] [EXE] [4] [EXE] [1] [EXE] und [F6] [**DYNA**] drücken und die jeweilige Veränderung des Graphen beobachten.




e) Aus dem Hauptmenü das **DYNA**-Menü auswählen (SET UP Locus: On (Kurvenschar)):



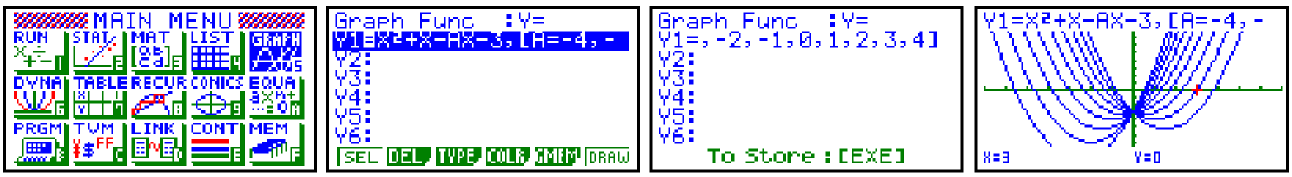

**1.2 Anwendung der Überlagerungs-Graphik** im **GRAPH**-Menü, um zu beobachten, wie sich Änderungen des Parameters $a$ von $\mathbf{f}(x)$ in der Kurvenschar auswirken!

a) Aus dem Hauptmenü das **GRAPH** -Menü auswählen.

b) Den Term $x^2 + x - ax - 3$ für $\mathbf{f}(x)$ eingeben (View Window [F3] [**STD**]):

$X^2 + X - AX - 3, [A= -4,-3,-2,-1, 0,1, 2, 3, 4]$ in **Y1** eingeben und abschließend [EXE] drücken.

c) [F6] [**DRAW**] drücken.




Um die theoretische Lösung dieser Aufgabenstellung zu "bestätigen", kann entweder die dynamische Graphik (**DYNA**-Menü) oder die Überlagerungs-Graphik (**GRAPH**-Menü) des Graphiktaschenrechners benutzt werden. Die Lösung kann jedoch durch bloße Benutzung des Rechners nicht gefunden werden.

## Der praktische Lösungsweg 2 (mit dem Graphiktaschenrechner)

Zur Untersuchung der Problem-Ungleichung $x < 3 + ax - x^2$ den Parameter $a$ einfacherweise als Funktionswert einer Funktion von $x$ auffassen: $y = \mathbf{f}(x) = (x^2 + x - 3)/x$. Dann zum Finden der Lösung $\mathbf{f}(x) = a$ den Graphen $y = \mathbf{f}(x), x \neq 0,$ zeichnen.

Bestimme nun den Parameterbereich von $a$, der zu $f(x) < a$ führt, mithilfe eines beliebigen $x$ mit $1 \leq x \leq 3$.

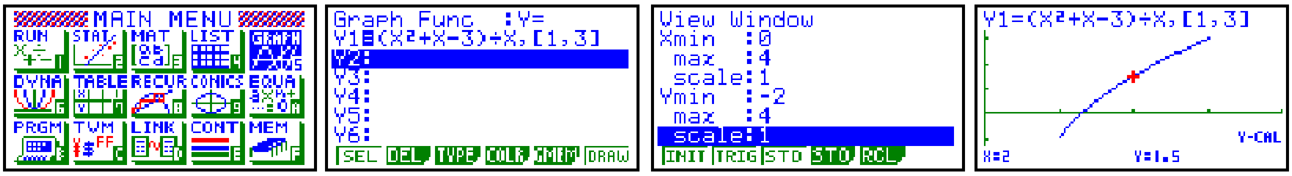
a) Aus dem Hauptmenü das **GRAPH**-Menü auswählen.

b) Festlegen, dass $y = (x^2 + x - 3)/x$ nur in einem Intervall ( $1 \leq x \leq 3$ ) zu zeichnen ist, durch Eingabe von $(x^2 + x - 3)/x$ , [1, 3] für **Y1**.

c) Zum Speichern des Terms EXE drücken.

d) F6 [**DRAW**] drücken.

e) SHIFT F1 [Trace] drücken und mit der Cursor-nach-rechts-Taste ( ▶ ) den Zeiger (+) zum Maximalwert bewegen. Der Maximalwert liegt bei $a = 3$ für $x = 3$. Die Lösung lautet somit $a > 3$.




Das gestellte Problem konnte durch die ausgiebige Nutzung des Graphiktaschenrechners endgültig gelöst werden. Es muss jedoch zuvor geklärt sein, dass der Graph eine monoton ansteigende Funktion darstellt, wenn im Schritt e) die Trace-Funktion benutzt wird.

## Feststellung:

Der Graphiktaschenrechner wurde bei dieser Aufgabenstellung in folgender Weise eingesetzt:

im Lösungsweg 1: als "**Werkzeug zur Bestätigung der Lösung**" (mit dem Graphiktaschenrechner),

im Lösungsweg 2: als "**Werkzeug zur unmittelbaren Lösung**" der Aufgabenstellung (mit dem Graphiktaschenrechner).

## Problem- und Kurvendiskussion: Verhalten von $f(x)$ ( im Intervall $1 \leq x \leq 3$ )

Der Graph im Lösungsweg 2 (mit dem Graphiktaschenrechner) gehört zur Funktion

$$y = f(x) = (x^2 + x - 3)/x \ .$$

Durch entsprechende Einstellung des Betrachtungsfensters (View Window) des Graphiktaschenrechners können Sie folgern, dass $y = f(x)$ eine streng monoton wachsende Funktion ist (Das kann auch durch Differenzieren der der Funktionsgleichung bestätigt werden):

$$dy/dx = f'(x) = (x^2 + 3)/x^2 > 0 \ , \ x \neq 0.$$

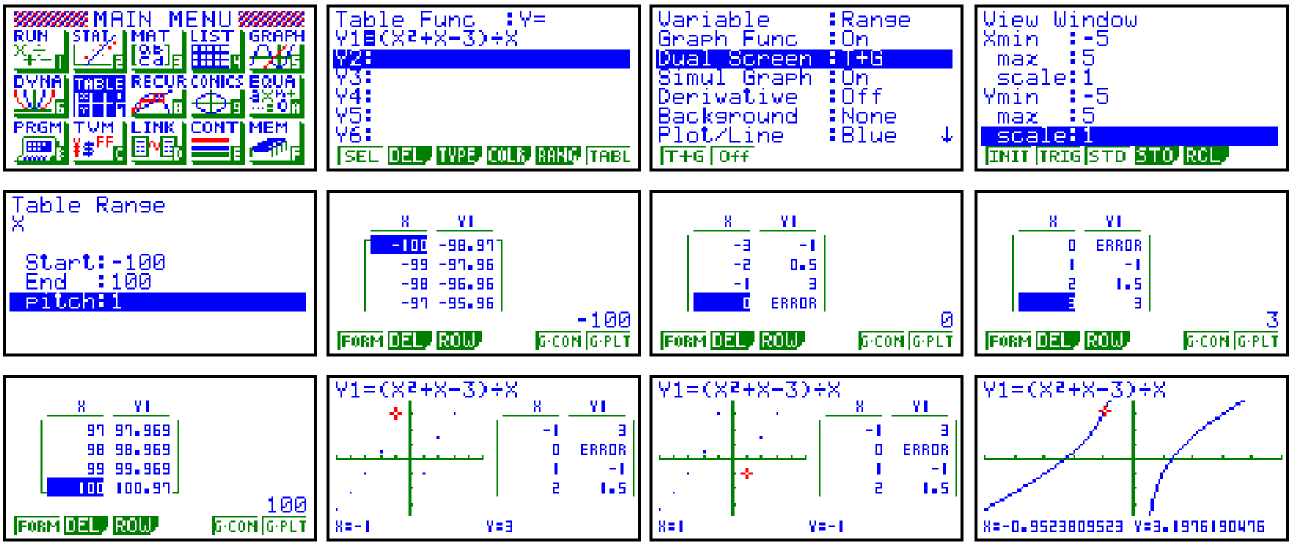
Der Anstieg ist stets positiv und es ist eigentlich nicht notwendig, den $x$-Bereich auf $1 \leq x \leq 3$ zu begrenzen.

### An dieser Stelle ergibt sich eine andere interessante Frage:

Für welche ganzzahligen $x$ ergibt sich ein ganzzaliger Funktionswert $f(x)$ ?

Zum Beispiel gilt ja $f(1) = -1$ oder $f(3) = 3$ !

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zuerst die schrittweise Änderung von $f(x)$ für ganzzahlige $x$-Werte zwischen **-100** und **100**. Wir nutzen dazu das **TABLE**-Menü des CFX-9850GB Plus. Als **Table Func** wird der Term $(x^2 + x - 3)/x$ eingegeben. **Table Range** (Tabellierungseinstellung) wird mit dem Startwert **-100**, dem Endwert **100** und der Schrittweite **1** festgelegt.



Taschenrechnerbilder aus dem **TABLE**-Menü mit anschließender Tabellenwiedergabe:

| X | Y | X | Y | X | Y | X | Y | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -100 | -98,97 | -60 | -58,95 | -20 | -18,85 | 21 | 21,857 | 61 | 61,95 |
| -99 | -97,96 | -59 | -57,94 | -19 | -17,84 | 22 | 22,863 | 62 | 62,951 |
| -98 | -96,96 | -58 | -56,94 | -18 | -16,83 | 23 | 23,869 | 63 | 63,952 |
| -97 | -95,96 | -57 | -55,94 | -17 | -15,82 | 24 | 24,875 | 64 | 64,953 |
| -96 | -94,96 | -56 | -54,94 | -16 | -14,81 | 25 | 25,88 | 65 | 65,953 |
| -95 | -93,96 | -55 | -53,94 | -15 | -13,8 | 26 | 26,884 | 66 | 66,944 |
| -94 | -92,96 | -54 | -52,94 | -14 | -12,78 | 27 | 27,888 | 67 | 67,955 |
| -93 | -91,96 | -53 | -51,94 | -13 | -11,76 | 28 | 28,892 | 68 | 68,955 |
| -92 | -90,96 | -52 | -50,94 | -12 | -10,75 | 29 | 29,896 | 69 | 69,956 |
| -91 | -89,96 | -51 | -49,94 | -11 | -9,727 | 30 | 30,9 | 70 | 70,957 |
| -90 | -88,96 | -50 | -48,94 | -10 | -8,7 | 31 | 31,903 | 71 | 71,957 |
| -89 | -87,96 | -49 | -47,93 | -9 | -7,666 | 32 | 32,906 | 72 | 72,958 |
| -88 | -86,96 | -48 | -46,93 | -8 | -6,625 | 33 | 33,909 | 73 | 73,958 |
| -87 | -85,96 | -47 | -45,93 | -7 | -5,571 | 34 | 34,911 | 74 | 74,959 |
| -86 | -84,96 | -46 | -44,93 | -6 | -4,5 | 35 | 35,914 | 75 | 75,96 |
| -85 | -83,96 | -45 | -43,93 | -5 | -3,4 | 36 | 36,916 | 76 | 76,96 |
| -84 | -82,96 | -44 | -42,93 | -4 | -2,25 | 37 | 37,918 | 77 | 77,961 |
| -83 | -81,96 | -43 | -41,93 | -3 | -1 | 38 | 38,921 | 78 | 78,961 |
| -82 | -80,96 | -42 | -40,92 | -2 | 0,5 | 39 | 39,923 | 79 | 79,962 |
| -81 | -79,96 | -41 | -39,92 | -1 | 3 | 40 | 40,925 | 80 | 80,962 |
| -80 | -78,96 | -40 | -38,92 | 1 | -1 | 41 | 41,926 | 81 | 81,962 |
| -79 | -77,96 | -39 | -37,92 | 2 | 1,5 | 42 | 42,928 | 82 | 82,963 |
| -78 | -76,96 | -38 | -36,92 | 3 | 3 | 43 | 43,93 | 83 | 83,963 |
| -77 | -75,96 | -37 | -35,91 | 4 | 4,25 | 44 | 44,931 | 84 | 84,964 |
| -76 | -74,96 | -36 | -34,91 | 5 | 5,4 | 45 | 45,933 | 85 | 85,964 |
| -75 | -73,96 | -35 | -33,91 | 6 | 6,5 | 46 | 46,934 | 86 | 86,965 |
| -74 | -72,95 | -34 | -32,91 | 7 | 7,5714 | 47 | 47,936 | 87 | 87,965 |
| -73 | -71,95 | -33 | -31,9 | 8 | 8,625 | 48 | 48,937 | 88 | 88,965 |
| -72 | -70,95 | -32 | -30,9 | 9 | 9,6666 | 49 | 49,938 | 89 | 89,966 |
| -71 | -69,95 | -31 | -29,9 | 10 | 10,7 | 50 | 50,94 | 90 | 90,966 |
| -70 | -68,95 | -30 | -28,9 | 11 | 11,727 | 51 | 51,941 | 91 | 91,967 |
| -69 | -67,95 | -29 | -27,89 | 12 | 12,75 | 52 | 52,942 | 92 | 92,967 |
| -68 | -66,95 | -28 | -26,89 | 13 | 13,769 | 53 | 53,943 | 93 | 93,967 |
| -67 | -65,95 | -27 | -25,88 | 14 | 14,785 | 54 | 54,944 | 94 | 94,968 |
| -66 | -64,95 | -26 | -24,88 | 15 | 15,8 | 55 | 55,945 | 95 | 95,968 |
| -65 | -63,95 | -25 | -23,88 | 16 | 16,812 | 56 | 56,946 | 96 | 96,968 |
| -64 | -62,95 | -24 | -22,87 | 17 | 17,823 | 57 | 57,947 | 97 | 97,969 |
| -63 | -61,95 | -23 | -21,86 | 18 | 18,833 | 58 | 58,948 | 98 | 98,969 |
| -62 | -60,95 | -22 | -20,86 | 19 | 19,842 | 59 | 59,949 | 99 | 99,969 |
| -61 | -59,95 | -21 | -19,85 | 20 | 20,85 | 60 | 60,95 | 100 | 100,97 |

Aus der Tabelle geht hervor, dass sich ganzzahlige Werte für $y$ nur für $x$ = **-3, -1, 1** und **3** ergeben. Diesen Tatbestand erkennt man auch aus der unecht gebrochen rationalen Funktion

$y = (x^2 + x - 3)/x = x + 1 - 3/x$. *((Dieser Satz gehört sicher nicht an*

Es ist anzunehmen, dass der Schöpfer dieser Aufgabe bewusst ein Intervall für $x$ gewählt hat, das zu ganzzahligen Werten von $y$ führt. Sicher ist er aber davon ausgegangen, dass die Schüler zur Lösung der Aufgaben lediglich Bleistift und Radiergummi verwenden dürfen. Wenn der Graphiktaschenrechner erlaubt ist, brauchen solche zusätzlichen Betrachtungen nicht angestellt zu werden. Das $x$-Intervall kann beliebig gewählt werden ausschließlich $x = 0$.

## <u>Der praktische Lösungsweg 3</u> (mit dem Graphiktaschenrechner)

Soeben wurde klargestellt, dass das $x$-Intervall in dieser Aufgabenstellung nicht eingeschränkt zu werden braucht, wenn der Graphiktaschenrechner verwendet wird. Allerdings entsteht im Lösungsweg 2 (mit dem Graphiktaschenrechner) als neues Problem, wenn $f(x)$ berechnet wird, die *"Division durch* $x$*"*. In der obigen Aufgabenstellung war das $x$-Intervall speziell eingeschränkt worden, so dass dies nicht weiter problematisch war.

Wir wollen die Aufgabenstellung jetzt erweitern, indem wir die Beschränkung des $x$-Intervalls aufheben. Eine Lösung kann jetzt nicht mehr durch simple Anwendung des Graphiktaschenrechners erzielt werden. Selbstverständlich wechselt das Relationszeichen der Ungleichung, wenn $x < 0$ wird.

Wir betrachten nun zwecks Auswertung der Ungleichung $x < 3 + ax - x^2$ erneut die Funktion

$$y = f(x) = (x^2 + x - 3)/x\ ,\ \ x \neq 0.$$

Nunmehr ergeben sich für den $y$-Bereich die folgenden Bedingungen:

Wenn $x > 0$ ist, dann gilt wie bisher $f(x) < a$.
Wenn jedoch $x < 0$ ist, dann gilt nunmehr $f(x) > a$.

Hieraus ergibt sich die Lösung. Die Vorgehensweise beim Einsatz des Graphiktaschenrechners ist ähnlich wie beim Lösungsweg 2 (mit dem Graphiktaschenrechner), weshalb wir nicht weiter darauf eingehen.

Die dargestellte Aufgabenvariation und Lösungsdiskussion könnten eine Möglichkeit eröffnen, den Graphiktaschenrechner zur Problemlösung bei Aufnahmeprüfungen zuzulassen.

## 6.2 Quadratische Gleichungen, Funktionen und entsprechende Rückschlüsse (Hashimoto)

**Zielstellung:**
Bei Aufnahmeprüfungen tauchen oft Aufgaben auf, in denen für Funktionen und Gleichungen zwei oder mehr symbolische Größen verwendet werden. Bei der Lösung quadratischer Gleichungen, die Parameter enthalten, erlaubt die Betrachtung einer entsprechenden Kurvenschar eine breitere Sicht auf das Problem. Der Gleichungsterm wird zum Funktionsterm und umgekehrt führt ein spezieller Funktionswert wieder zurück zur Ausgangsgleichung. Der Graphiktaschenrechner erlaubt es, symbolische Größen freizügig zu ändern und das Resultat zu betrachten.
**Mathematischer Hintergrund:** Quadratische Gleichungen und Funktionen

## Aufgabenstellung:

a) Für welche reellen Parameter $a$ hat die quadratische Gleichung
$x^2 + x + a = 0$ Lösungen und wie lauten diese?

b) Für welche reellen Parameter $a$ sind beide quadratische Gleichungen
$x^2 + x + a = 0$, $x^2 + ax + 1 = 0$ gleichzeitig reell lösbar?

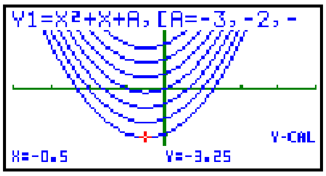
c) Für welche reellen Parameter $a$ haben beide quadratische Gleichungen
$x^2 + x + a = 0$, $x^2 + ax + 1 = 0$ gleichzeitig keine reelle Lösungen?

## Lösung zu a)

Wir betrachten die Funktion (Kurvenschar) $y = \mathrm{f}(x) = x^2 + x + a$ mit dem (Schar-)Parameter $a$.
Mithilfe des Graphiktaschenrechners untersuchen wir für $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ den Kurvenverlauf und das Erreichen des Funktionswertes $y = \mathrm{f}(x) = 0$ (Nullstellen). Eine Parabel kann zwei, eine oder gar keine reelle Nullstelle besitzen. Die Nullstellen sind die Lösungen der Ausgangsgleichung.

Im **GRAPH**-Menü des Graphiktaschenrechners wird folgender Term in **Y1** eingegeben:

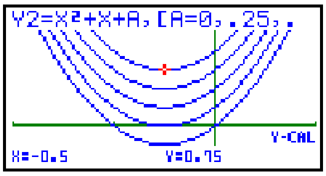
$$\mathbf{Y1} = X^2 + X + A, [A = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]$$




**Hinweis:**
Die Werte von $A$ (Scharparameter) können beliebig gewählt werden.

Jetzt kann die Veränderung der Anzahl der Nullstellen zwischen $A = 0$ und $A = 1$ beobachtet werden.
Jetzt werden die Vorgabewerte von $A$ wie folgt festgelegt:

$$\mathbf{Y2} = X^2 + X + A, [A = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$$




Somit können durch die graphische Untersuchung die folgenden Schlussfolgerungen gezogen werden:

Es gibt zwei Schnittpunkte, wenn $a = 0$ ist.
Es gibt einen einzigen Berührungspunkt, wenn $a = 0{,}25$ ist.
Es gibt keinen Schnittpunkt, wenn $a = 0{,}5; 0{,}75; 1$ ist.

Es sind also die folgenden Ergebnisse zu erwarten:

Zwei Schnittpunkte mit der $x$-Achse für $a < 0{,}25$ .
Berührung der $x$-Achse in einem einzigen Punkt für $a = 0{,}25$ .
Keine Schnittpunkte mit der $x$-Achse für $a > 0{,}25$ .

Bestätigen Sie nun selbst diese Vermutung für $y = f(x) = x^2 + x + a$ :
Über die quadratische Ergänzung findet man den Scheitelpunkt:

$y = f(x) = (x + 1/2)^2 + a - 1/4$ und somit Scheitelpunkt $S(-1/2,\ a-1/4)$

Die wesentliche Bedingung dafür, dass diese nach oben geöffnete Parabel die $x$-Achse schneidet, ist:

$y$-Koordinate des Scheitelpunkts $a-1/4 < 0$ , d. h. $a < 1/4 = 0{,}25$ .
Die Vermutung hat sich also bestätigt.
Es können jetzt folgende Rückschlüsse für die Aufgabenstellung gezogen werden:

> Die Gleichung $x^2 + x + a = 0$, d.h. $(x + 1/2)^2 = -a + 1/4$ hat
> zwei reelle Lösungen für $a < 0{,}25$: $x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - a}$ ,
> eine reelle Lösung (Doppellösung) für $a = 0{,}25$: $x_{1,2} = -0{,}5$ ,
> keine reelle ( jedoch komplexe ) Lösungen für $a > 0{,}25$: $x_{1,2} = -0{,}5 \pm i\sqrt{a - 0{,}25}$ .

Betrachten Sie nun $x^2 + ax + 1 = 0$ in derselben Weise, analysieren Sie die Ergebnisse, und geben Sie die Lösung der Aufgabenstellung an. In der Vergangenheit mußte die **Lösung per Hand** vorgenommen werden.

Nunmehr werden zuerst die Graphen (Kurvenschar) betrachtet, um dann auf den Parameterbereich zu schließen. **Dies ist eine Anwendung des Graphiktaschenrechners, um Rückschlüsse auf die Lösungen einer nichtlinearen Gleichung zu ziehen.** Früher war ein erheblicher Zeitaufwand erforderlich und die vermutete und die tatsächliche Lösung stimmten nicht immer überein. Der hier betrachtete Anwendungsfall kann als ein Weg zur Vertiefung des Interesses an der Mathematik angesehen werden.

## Lösung zu b)

Zu lösen sind die nichtlinearen (quadratischen) Gleichungen mit einem gemeinsamen Parameter $a$ :

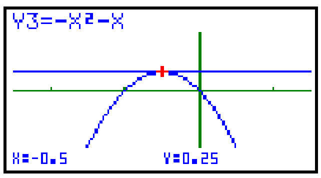
$$x^2 + x + a = 0, \quad x^2 + ax + 1 = 0 .$$

Durch den Parameter $a$ ergeben sich hinsichtlich der Lösungen bestimmte Fallunterscheidungen.

Für $x \neq 0$ erhält man $-x^2 - x = a$ , $-(x^2 + 1)/x = a$ .

Analysieren Sie nun die Graphen entsprechender Funktionen mit dem Graphiktaschenrechner:

$$y = -x^2 - x , \quad y = -(x^2 + 1)/x , \quad y = a .$$




Stellen Sie im **GRAPH**-Menü den Graphen von $y = -x^2 - x$ dar.

Untersuchen Sie die $y$-Koordinaten (Funktionswerte) mit der Trace-Funktion, um $y_{max} = 0{,}25$ zu erhalten.

Überlagern Sie die Parabel mit der Geraden $y = 0{,}25$.

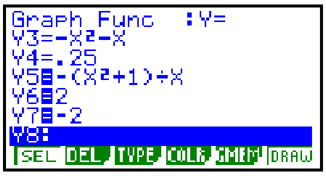
Somit ergeben sich folgende Aussagen:

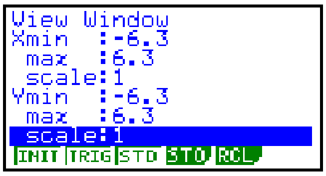
Für $a > 0{,}25$ schneidet die Gerade die Parabel nicht,
für $a = 0{,}25$ wird die Gerade zur Tangente an die Parabel,
für $a < 0{,}25$ schneidet die Gerade die Parabel in zwei verschiedenen Punkten.

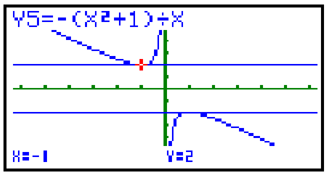
Deshalb ergeben sich wie oben, vgl. a), für die Lösung der Aufgabenstellung folgende Rückschlüsse:

Keine reelle ( jedoch komplexe ) Lösungen für $a > 0{,}25$ ,
eine reelle Lösung (Doppellösung) für $a = 0{,}25$ ,
zwei reelle Lösungen für $a < 0{,}25$ .

Stellen Sie nun im **GRAPH**-Menü den anderen Graphen von $y = -(x^2 + 1)/x$ dar.
Untersuchen Sie die $y$-Koordinaten (Funktionswerte) mit der Trace-Funktion, um $y_{min} = 2$ und $y_{max} = -2$ zu erhalten. Überlagern Sie den Graphen mit den Geraden $y_A = 2$ und $y_B = -2$ .




Somit kann man die folgenden Feststellungen treffen:

Für $-2 < a < 2$ schneidet die Gerade den Graphen nicht,
für $a = -2$ oder $a = 2$ wird die Gerade zur Tangente,
für $a < -2$ oder $a > 2$ schneidet die Gerde den Graphen in zwei verschiedenen Punkten.

Deshalb ergeben sich für die Lösung der Aufgabenstellung in diesem Fall folgende Rückschlüsse:

Keine reelle ( jedoch komplexe ) Lösungen für $-2 < a < 2$ ,
eine reelle Lösung (Doppellösung) für $a = -2$ oder $a = 2$ ,
zwei reelle Lösungen für $a < -2$ oder $a > 2$ .

Damit lautet die Antwort der Aufgabe b):

Für $a \leq -2$ sind beide Ausgangsgleichungen reell lösbar.
Die Lösungen lauten hierbei:
für die erste Gleichung $x^2 + x + a = 0$: $x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - a}$ ,
für die zweite Gleichung $x^2 + ax + 1 = 0$: $x_{1,2} = \left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4}\right)/2$ .

## Lösung zu c)

Aus den bisher angestellten Überlegungen erhält man unmittelbar die Antwort zur Aufgabe c):

Für $0{,}25 < a < 2$ sind beide Ausgangsgleichungen nicht reell lösbar.
Die komplexen Lösungen lauten hierbei:
für die erste Gleichung $x^2 + x + a = 0$: $x_{1,2} = -0{,}5 \pm i\sqrt{a - 0{,}25}$ ,
für die zweite Gleichung $x^2 + ax + 1 = 0$: $x_{1,2} = \left(-a \pm i\sqrt{4 - a^2}\right)/2$ .

## 6.3 Aufgaben mit zusammengesetzten trigonometrischen Funktionen (Taira)

**Zielstellung:**
Aufgabenstellungen, in denen zusammengesetzte Funktionen auftreten, erfahren im allgemeinen nur eine formale Behandlung und die Bedeutung dieser Aufgaben wird oft überhaupt nicht verstanden. Mit dem Graphiktaschenrechner gelingt es, den Prozess der Zusammensetzung mehrerer Funktionsterme verständlich zu machen.
**Mathematischer Hintergrund:** Trigonometrische und quadratische Funktionen

### Aufgabenstellung:

Gegeben sind die trigonometrischen Terme $\mathbf{A = 3\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta - \cos\vartheta}$ und $\mathbf{B = \sin\vartheta + \cos\vartheta}$.

a) Stelle den Term **A** mithilfe von **B** dar (Gleichung (1))!

b) Bestimme den Wertebereich der Werte von $\mathbf{B = B(\vartheta)}$ in der Form $\mathbf{a \le B \le b}$ (Ungleichung (2))!

c) Bestimme das Minimum (3) und das Maximum (4) von $\mathbf{A = A(\vartheta)}$!

**Lösungsweg 1 (allgemeine theoretische Lösung)**

a) Beide Seiten von $\mathbf{B = \sin\vartheta + \cos\vartheta}$ quadrieren und $\mathbf{B^2 = 1 + 2\sin\vartheta\cos\vartheta}$ nach $\mathbf{\sin\vartheta\cos\vartheta}$ auflösen: $\mathbf{\sin\vartheta\cos\vartheta = (B^2 - 1)/2}$ .

$\mathbf{-\sin\vartheta - \cos\vartheta = -B}$ und $\mathbf{\sin\vartheta\cos\vartheta = (B^2 - 1)/2}$ in $\mathbf{A = 3\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin\vartheta - \cos\vartheta}$ ersetzen. Damit ergibt sich

$$\mathbf{A = 3/2\, B^2 - B - 3/2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

b) Nun kommen wir zur Bestimmung des Wertebereichs für $\mathbf{B = B(\vartheta) = \sin\vartheta + \cos\vartheta}$.
Mit der bekannte Umformung $\mathbf{\sin\vartheta + \cos\vartheta = \sqrt{2}\sin(\vartheta + \pi/4)}$ ergibt sich

$$\mathbf{-\sqrt{2} \le B \le \sqrt{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

c) Zur Bestimmung der Extremwerte (Maximum und Minimum) von $\mathbf{A = A(\vartheta)}$:
Gleichung **(1)** umformen in (quadratische Ergänzung)

$$\mathbf{A = 3/2\,(B - 1/3)^2 - 5/3,\ -\sqrt{2} \le B \le \sqrt{2}}.$$

Wegen $\mathbf{3/2 > 0}$ ergibt sich
das Minimum zu $\mathbf{-5/3}$ , wenn $\mathbf{B = 1/3}$ gilt, d.h.

$$\mathbf{A_{min} = -5/3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

das Maximum zu $\mathbf{3/2 + \sqrt{2}}$ , wenn $\mathbf{B = -\sqrt{2}}$ gilt, d.h.

$$\mathbf{A_{max} = 3/2 + \sqrt{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

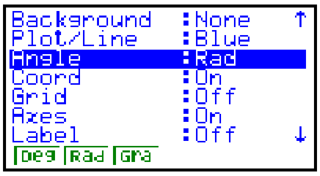
**Lösungsweg 2 (mit dem Graphiktaschenrechner)**

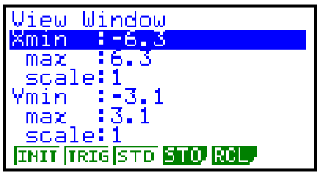
a) Wie im Lösungsweg 1 **A** mithilfe von **B** darstellen:

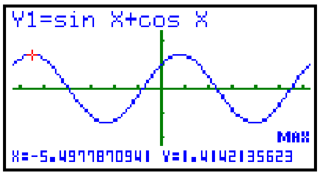
$$\mathbf{A = 3/2\, B^2 - B - 3/2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

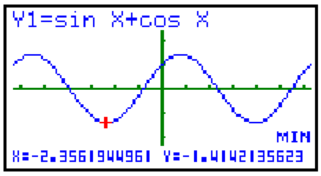
b) Danach mit dem Graphiktaschenrechner den Wertebereich von **B** bestimmen.
**Y = sinX +cosX** in das **GRAPH**-Menü des Graphiktaschenrechners eingeben.

In der Voreinstellung (**SET UP**) das Bogenmaß einstellen (Rad). Für die Betrachtungsfenstereinstellung **INIT** nutzen. Mit [F6] [**DRAW**] den Graphen zu **B = B(ϑ) = sinϑ + cosϑ** zeichnen. Jetzt mit [SHIFT] [F5] [**G-Solv**] [F2] [**MAX**] den Maximalwert und mit [SHIFT] [F5] [**G-Solv**] [F3] [**MIN**] den Minimalwert bestimmen.









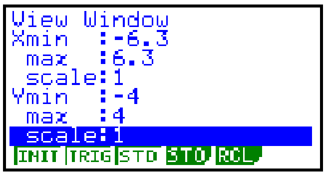

**Maximalwert:** 1,4142135623 **Minimalwert:** -1,4142135623

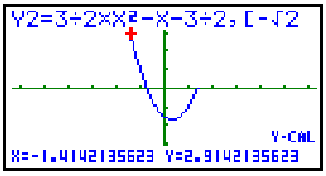
Der Wertebereich von **B** ist somit

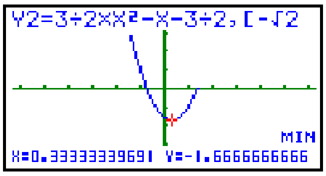
$$-1{,}4142135623 = -\sqrt{2} \leq B \leq \sqrt{2} = 1{,}4142135623 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

c) Nun mit dem Graphiktaschenrechner Maximal- und Minimalwert von $A = A(B) = 3/2\,B^2 - B - 3/2$ bestimmen.

$Y = 3/2\,X^2 - X - 3/2, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ in das **GRAPH**-Menü des Graphiktaschenrechners eingeben. Betrachtungsfenster anpassen. Zum Zeichnen des Graphen [F6] [**DRAW**] drücken.








Der Cursor zeigt den Maximalwert (Randmaximum), wenn $X = -\sqrt{2}$ gilt. Dazu benutzt man die Tastenfolge [SHIFT] [F5] [**G-Solv**] [F6] [▷] [F1] [**Y-CAL**]. Wenn **X =** unten links auf dem Display erscheint, $-\sqrt{2}$ [EXE] drücken, um den **Y**-Wert (**2,9142135623**) zu erhalten, d.h.

$$Y_{max} = 2{,}9142135623 = 3/2 + \sqrt{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Jetzt [SHIFT] [F5] [**G-Solv**] [F3] [**MIN**] drücken, worauf sich der Minimalwert ergibt (**-1,666...**), d.h.

$$Y_{min} = -1{,}666\ldots = -5/3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

## Lösungsweg 3 (mit dem Graphiktaschenrechner)

a) Zur Bestimmung von **(1)** wird analog zum Lösungsweg 1 und
b) zur Bestimmung von **(2)** analog zum Lösungsweg 2 vorgegangen.
c) Nun mit dem Graphiktaschenrechner Maximal- und Minimalwert von

**A = A(ϑ) = 3 sinϑ cosϑ - sinϑ - cosϑ** bestimmen. Dazu

**Y = 3sinX cosX - sinX - cosX** in das **GRAPH**-Menü des Graphiktaschenrechners eingeben. Betrachtungsfenster anpassen. Zum Zeichnen des Graphen [F6] [**DRAW**] drücken.

Dann [SHIFT] [F5] [**G-Solv**] [F3] [**MIN**] drücken, so dass sich der Minimalwert (**-1,666...**) ergibt, vgl. **(4)**. Schließlich [SHIFT] [F5] [**G-Solv**] [F2] [**MAX**] drücken, worauf sich der erste lokale Extremwert (0,08578643376) ergibt. Dann die Cursor-nach-rechts-Taste ( ▷ ) drücken, um den Maximalwert (**2,9142135623**) zu erhalten, vgl. **(3)**.