13. Von den Dezimalzahlen zur Zahlenfolge (CASIO)

13.0 Einleitung

Das Erkennen eines Zahlenmusters oder einer Formelstruktur spielt in der Mathematik eine wesentliche Rolle. Wenn die Schüler den Begriff der Zahlenfolge kennenlernen, zeigen sie rasch Interesse an den Ziffernfolgen, die in manchen Dezimalbrüchen auftreten, und sie sind bestrebt, die Beziehungen zwischen einem Dezimalbruch und dem zugehörigen gemeinen Bruch aufzudecken.

Die Beschäftigung mit der Frage, weshalb manche Dezimalbrüche Ziffernperioden enthalten, kann die Schüler zum Begriff des Bildungsgesetzes einer Zahlenfolge führen. Der Graphiktaschenrechner erweist sich als nützlich, wenn dieser Unterrichtsgegenstand weiter vertieft wird.

13.1 Einfache periodische Dezimalbrüche und geometrische Reihen

Ein Dezimalbruch mit einer solchen Periode, wie z.B. **1,11111...** kann als geometrische Reihe angesehen werden. Der Begriff der geometrischen Reihe wie auch Begriff der Folge sind in der Mathematik des Gymnasiums grundlegend.

Aufgabenstellung 1: **1,11111...** ist gleich **10/9**. Warum?

Lösung:

Der unendliche periodische Dezimabruch $z = 1{,}11111\ldots$ kann als geometrische Reihe geschrieben werden, d.h.: $z = 1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + \ldots + 0{,}1^n + \ldots$.

Aus $9z = 10z - z$ folgt $z = (10z - z)/9$, d.h. unsere geometrische Reihe erfüllt diese Gleichung:

$$z = \big(\, 10 + 1 + 0{,}1 + \ldots + 0{,}1^{n-1} + \ldots \;\; - (1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + \ldots + 0{,}1^n + \ldots\,)\,\big)/9 = 10/9 \,.$$

Wenn man den unendlichen periodischen Dezimalbruch auf **n** Kommastellen rundet, d.h.

$$z \approx z_n = 1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + \ldots + 0{,}1^n$$

ergibt die Gleichung $z = (10z - z)/9$ folgendes Resultat:

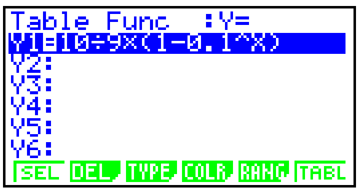
$$z \approx z_n = (10 - 0{,}1^n)/9 = (1 - 0{,}1^{n+1}) \times 10/9$$, d.h. für $n \to \infty$ geht z_n in $z = 10/9$ über.

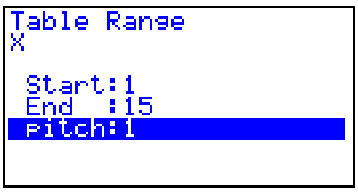
Geht man umgekehrt von folgender Gleichung aus:

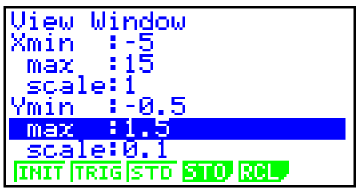
$$z_n = (1 - 0{,}1^{n+1}) \times 10/9 \,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \,, \qquad \ldots \qquad (1)$$

dann ist $0{,}1^{n+1}$ nahezu gleich **0** (für große **n**) und wir erhalten den Bruch **10/9** .

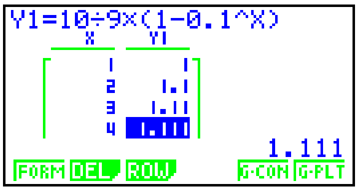
Die Partialsummenfolge in Formel **(1)** kann als Tabelle geschrieben und graphisch dargestellt werden, indem im **TABLE**-Menü **Y1 = 10/ 9 ×(1 - 0.1^ [X,θ,T])** eingegeben wird:

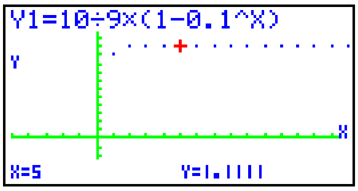






Tabellierung und graphische Darstellung der Zahlenfolge **(1, 1.1, 1.11, 1.111, 1.1111, 1.11111, ...)** im **TABLE**-Menü:





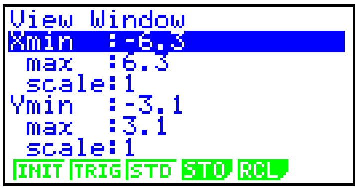
Anmerkung:

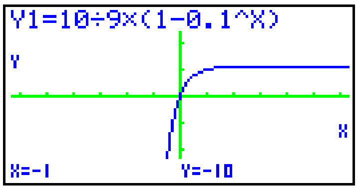
Wenn in Gleichung **(1)** **n+1** $= x \in$ **R** gesetzt wird, erscheint im **GRAPH**-Menü für

Y1 = 10/ 9 ×(1 - 0.1^ X,θ,T)

ebenfalls die oben angedeutete Exponentialfunktion, die für jede reelle Zahl definiert ist.
Man erkennt: Die oben betrachtete Zahlenfolge verläuft auf dem Graphen der Exponentialfunktion

$$y = 10/9 \times \left(1 - 0{,}1^{x}\right) \quad \text{mit der Asymptote} \quad y = 10/9\,.$$





13.2 Kompliziertere unendliche Dezimalbrüche und Potenzreihen

Wir betrachten jetzt kompliziertere Zahlenmuster in den Ziffernfolgen von Dezimalbrüchen.
Der folgende Dezimalbruch kann näherungsweise wieder als ein gemeiner Bruch geschrieben werden, wobei zunächst die Potenzreihe $s = s(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + \ldots + n\,t^{n-1}$ mit $t = 0{,}1$ betrachtet wird.

Aufgabenstellung 2: **1,23456789...** ist nahezu gleich **100/81**. Warum?

Lösung:

Es sei $s_n = s_n(0{,}1) = 1 + 2\times 0{,}1 + 3\times 0{,}1^2 + 4\times 0{,}1^3 + \ldots + n\times 0{,}1^{n-1} = (1{,}23456789\ldots)$

Durch Subtrahieren von $0{,}1 s_n$ auf beiden Seiten erhalten wir über die geometrische Reihe

$$0{,}9 s_n = 1 + 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + \ldots + 0{,}1^{n-1} - n\times 0{,}1^n = (1 - 0{,}1^n)/0{,}9 - n\times 0{,}1^n\,.$$

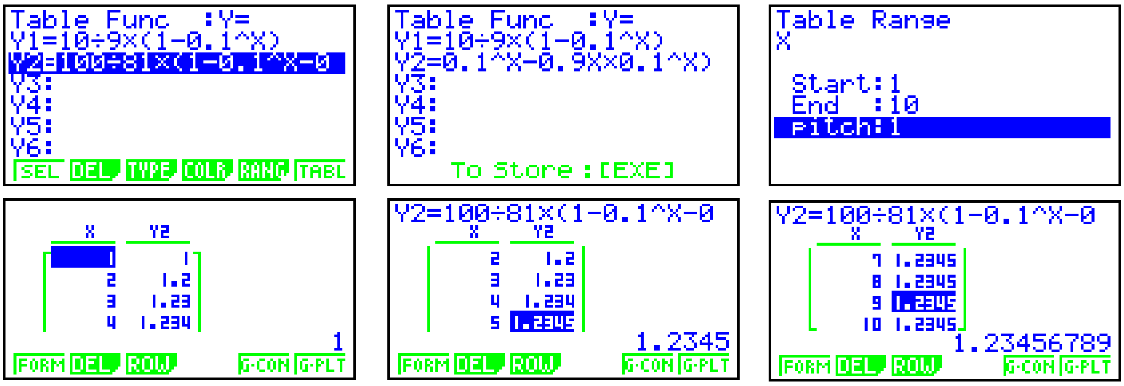
Somit gilt

$$s_n = 100/81 \times (1 - 0{,}1^n - 0{,}9n\times 0{,}1^n) \quad \ldots \quad (2)$$

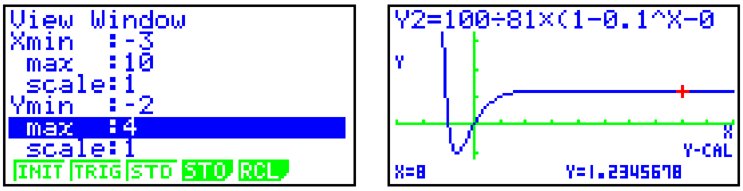
Für $n > 10$ sind $0{,}1^n \approx 0$ und $n\times 0{,}1^n \approx 0$, und wir erhalten den Bruch **100/81**.
Dieses Ergebnis wollen wir wieder mit der Tabelle und dem Graphen der Gleichung **(2)** illustrieren, indem im **TABLE**-Menü **Y2 = 100/81×(1 - 0,1^ X,θ,T - 0,9 X,θ,T ×0,1^ X,θ,T)** eingegeben wird.

Anschließend wird der Graph der Exponentialfunktion $y = 100/81 \times \left(1 - 0{,}1^{x} - 0{,}9x \times 0{,}1^{x}\right)$ mit der Asymptote $y = 100/81$ im **GRAPH**-Menü gezeichnet.

Tabellierung im **TABLE**-Menü:



Graphische Darstellung im **GRAPH**-Menü:



13.3 Die Zahlenfolge zu den Türmen von Hanoi

Die Zahlenfolge zu den Türmen von Hanoi, geschrieben als Formel in rekursiver Darstellung, kann auch als eine Formel entsprechend der Darstellungsweise wie in den Abschnitten 13.1 oder 13.2 geschrieben werden. Wenn **n** unbeschränkt größer wird, entsteht aus der Potenzreihe ihre erzeugende Funktion und umgekehrt gilt: die Potenzreihe ist die Taylorreihe der erzeugenden Funktion.

> **Aufgabenstellung 3:**
> Der Bruch **5000/4851** enthält **1, 3, 7, 15, 31, ...** , die Zahlenfolge zu den Türmen von Hanoi. Warum?

Lösung:

Die Zahlen der Zahlenfolge zu den Türmen von Hanoi **1, 3, 7, 15, 31, ...** genügen der folgenden Rekursionsformel:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1\,, \quad a_1 = 1\,.$$

In direkter Darstellung: $$a_n = 2^n - 1\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Mit s_n werde wieder die Partialsumme der Folge bezeichnet. Anschließend wird von beiden Seiten der Gleichung $2ts_n$ subtrahiert, dabei die Rekursionsformel ausgenutzt und nach s_n aufgelöst:

$$s_n = s_n(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + \ldots + a_n t^{n-1}$$

$$2ts_n = 2a_1 t + 2a_2 t^2 + 2a_3 t^3 + 2a_4 t^4 + \ldots + 2a_n t^n$$

$$(1 - 2t)s_n = a_1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \ldots + t^{n-1} - 2a_n t^n$$

$$s_n = \left(1 - t^n - 2a_n(1 - t)t^n\right) / \left((1 - t)(1 - 2t)\right) \qquad \ldots \qquad (3)$$

Mit t = **0,01** ergibt sich

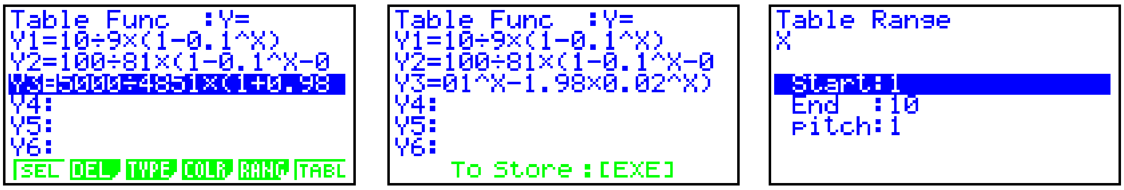
$$s_n = 5000/4851 \times (1 + 0{,}98 \times 0{,}01^n - 1{,}98 \times 0{,}02^n) \qquad \ldots \qquad (4)$$

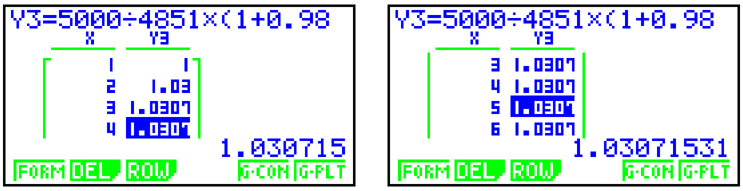
Für **n > 10** folgt hieraus wegen $0{,}01^n \approx 0$ und $0{,}02^n \approx 0$ der Grenzfall ($n \to \infty$)

$$s = 5000/4851$$

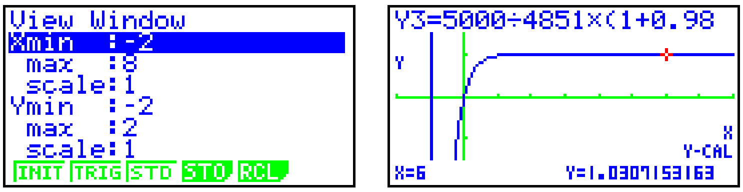
(4) wird wieder mit dem Graphiktaschenrechner im **TABLE**-Menü tabelliert und im **GRAPH**-Menü graphisch dargestellt, und es wird die Trace-Funktion (bzw. G-Solv und Y-CAL) angewendet.

Tabellierung im **TABLE**-Menü:





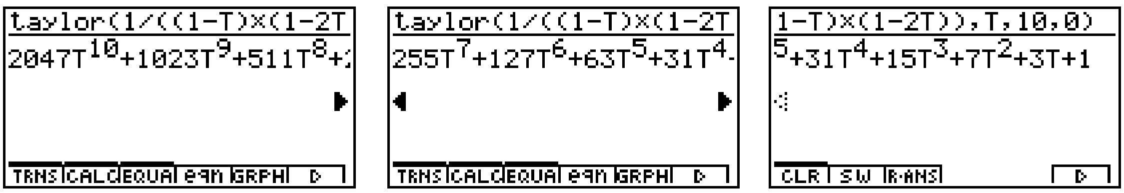
Graphische Darstellung im **GRAPH**-Menü:



Wenn wir in **(4)** die Terme ignorieren, die **n** enthalten, erhalten wir die erzeugende Funktion

$$s = s(t) = 1 / \big((1 - t)(1 - 2t)\big)$$

Entwickelt man diese (erzeugende) Funktion in eine Taylorreihe (Entwicklungsstelle t_0 = **0**), stellt man unschwer fest, dass die Taylorkoeffizienten a_n die Anzahl der Züge beim Umstapeln des Turmes von Hanoi mit genau **n** Scheiben beschreibt! Wir zeigen abschließend einige Screenshots aus dem **CAS**-Menü des Symboltaschenrechners **CASIO ALGEBRA FX 2.0** zur Taylorentwicklung:



Literaturhinweis (zum Turm von Hanoi):

[1] **Informatik für die Sekundarstufe II, Band 2** (Höhere Datentypen, Automaten, Sprachen) von R. Baumann, S.24 (Beispiel 1: Türme von Hanoi), Klett-Verlag 1993 (1. Auflage) ISBN 3-12-717742-9