9. Verwendung des Graphiktaschenrechners in der Sekundarstufe II - Ein Lehrer-Schüler-Dialog: Kubische Funktionen und deren Formelvarianten **(CASIO)**

Zielstellung:
Die Schüler haben in einer der vorangehenden Klassen die quadratischen Funktionen (Parabeln) $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ und deren Darstellung kennengelernt.
Das Unterrichtsziel für heute besteht darin, mit den Schülern weiterführende Überlegungen zu den Graphen kubischer Funktionen anzustellen. Die Schüler haben das Differenzieren noch nicht gelernt. Deshalb soll ein Verfahren zum Zeichnen kubischer Funktionen gefunden werden ohne die Differenzialrechnung anwenden zu müssen.

Mathematischer Hintergrund: Kubische Funktionen und Kurvenscharen

Ding-dong. Es klingelt zum Unterrichtsbeginn im ersten Schulhalbjahr. Lehrer K. tritt ein.

Lehrer K.: Wir wollen heute eine neue Aufgabenstellung lösen, indem wir wieder das Verfahren zum Zeichnen einer quadratischen Funktion anwenden (das Faksimile-Prinzip, das Prinzip der originalgetreuen Abbildung), das wir in der vorigen Klassenstufe erlernt haben.
Auch heute werden wir einen Graphiktaschenrechner verwenden.

Die allgemeine Form der kubischen Funktionen ist $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Wir wollen jetzt die Graphen bestimmten Varianten zuordnen. Die Koeffizienten sind a, b, c und d. Womit beginnen wir?

Hendrick: Was meinen Sie dazu, wenn wir die Graphen nach dem Vorzeichen der Koeffizienten gruppieren, nämlich negativ, Null oder positiv?

Lehrer K.: Können wir machen. Wir wollen sie in dieser Weise grob gruppieren. Ivan, wie viele Formelvarianten gibt es?

Ivan: Vorauszusetzen ist erst einmal, dass $a \neq 0$ ist. Die anderen Koeffizienten können negativ, Null oder positiv sein. Wir können also rechnen: $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ Varianten.

Lehrer K.: Jack, welche Rolle spielt d ?

Jack: d gibt die Lage des Schnittpunkts mit der y-Achse an.

Lehrer K.: Dann bewegen sich die Graphen aufwärts oder abwärts, wenn sich d ändert. Ändert sich dabei auch die Form des Graphen?

Jack: Nein.

Lehrer K.: Gut, wir lassen d unverändert und denken uns die Graphen in einer Koordinatenebene ohne x-Achse. Das heißt, wir kümmern uns nicht um den Schnittpunkt mit der x-Achse. Wie viele Varianten wird es also geben, Ivan?

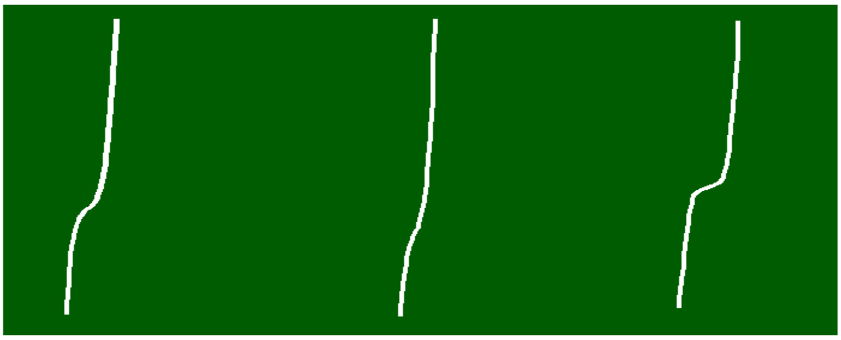
Ivan: 18 Varianten.

Lehrer K.: Ich denke, Sie können die **18** Formelvarianten ohne Schwierigkeiten graphisch darstellen. Wir stellen dazu die drei Koeffizienten a, b und c in der Form (a, b, c) dar und halten fest, dass jeder Koeffizient negativ, Null (a jedoch nicht) oder positiv sein kann:

(+, +, +), **(+, +, 0)**, **(+, +, -)**, **...**, **(-, -, -)** .

Zeichnen wir z.B. Funktionen der Variante **(+, +, -)** mit dem Graphiktaschenrechner. Wir setzen für a, b, c und d beliebige positive Zahlen ein und zeichnen den jeweiligen Graphen. Kommen Sie bitte nach vorn und zeichnen Sie Ihren Graphen an die Tafel.

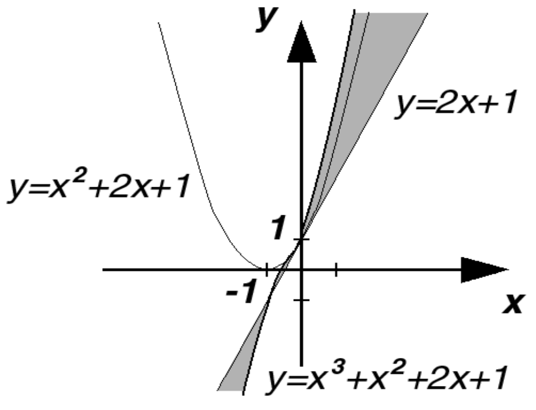
Drei Schüler zeichneten die folgenden Graphen an die Tafel:

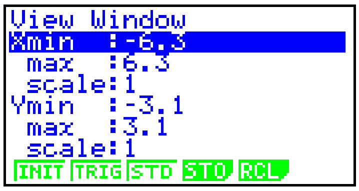


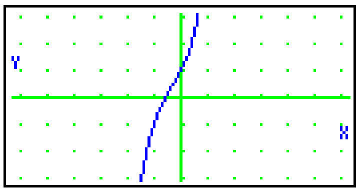
Lehrer K.: Alle Graphen sind monoton wachsend. Wir können schließen, dass der Graph von $y = f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ ebenfalls monoton wachsend ist. Das wollen wir mit dem Faksimile-Prinzip nachweisen.

Lehrer K.: Wir wollen die Beziehungen zwischen den folgenden drei Funktionen untersuchen:

$y = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ und $y = 2x + 1$.





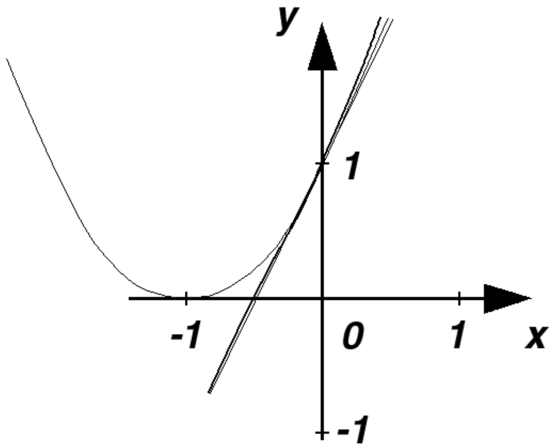


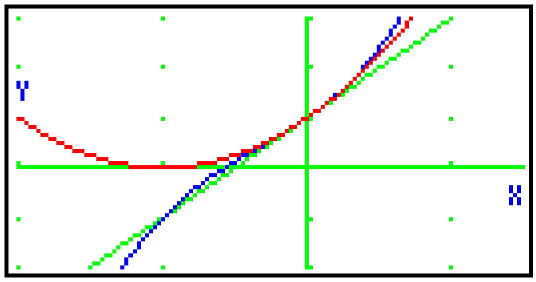
Die Beziehung zwischen $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ und $y = 2x + 1$ hinsichtlich der Lage ist wie folgt gegeben: $2x + 1 + (x^3 + x^2) = 2x + 1 + x^2(x + 1)$.

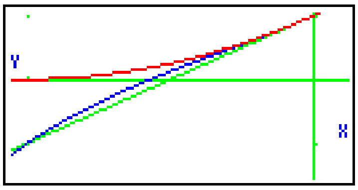
Die Differenz zwischen den beiden Funktionen ist demnach $x^2(x + 1)$.

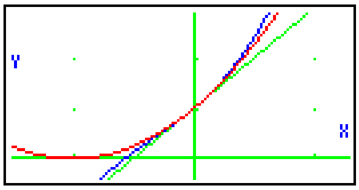
- Wenn $x < -1$ ist, ergibt sich $x^2(x + 1) < 0$, und die kubische Funktion liegt unter der Geraden $y = 2x + 1$, vgl. Schraffur.
- Wenn $x = 0$ oder $x = -1$ gilt, dann ergibt sich $x^2(x + 1) = 0$. Für $x = 0$ ist die Gerade $y = 2x + 1$ die Tangente an den kubischen Graphen.
- Wenn $x > -1$ ist, ergibt sich $x^2(x + 1) > 0$, und die kubische Funktion liegt über der Geraden $y = 2x + 1$, vgl. Schraffur.

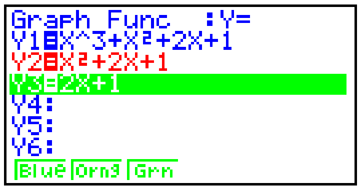
Wenn die Beziehung hinsichtlich der Lage nicht eindeutig ist, selbst wenn die Graphen in unterschiedlicher Farbe gezeichnet sind, wählen Sie F2 **[Zoom]** und F1 **[Box]**, legen das rechteckige Fenster mit dem Cursor fest und drücken EXE. Dadurch werden die Graphen vergrößert.











Analog ist die Beziehung zwischen $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ und $y = x^2 + 2x + 1$ hinsichtlich der Lage gegeben:

$x^3 + x^2 + 2x + 1 - (x^2 + 2x + 1) = x^3$.

Die Differenz zwischen den beiden Funktionen ist damit x^3.

- Wenn $x < 0$ ist, liegt die kubische Funktion $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ unter der Parabel $y = x^2 + 2x + 1$.
- Wenn $x = 0$ ist, haben die beiden Graphen dieselbe Tangente $y = 2x + 1$.
- Wenn $x > 0$ ist, liegt die kubische Funktion $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ über der Parabel $y = x^2 + 2x + 1$.

Diese Behauptung kann nach dem Faksimile-Prinzip wie folgt in Worte gefasst werden: Links von der y-Achse (im zweiten und dritten Quadranten) gilt für $x =$ **const.** $= t$:
$t^3 < 0$ und die kubische Funktion $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ wird unter der Funktion $y = x^2 + 2x + 1$ punktweise auf der senkrechten Geraden $x = t$ ($t < 0$) aufgetragen.
Rechts von der y-Achse (im ersten und vierten Quadranten) gilt für $x =$ **const.** $= t$:
$t^3 > 0$ und die kubische Funktion $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ wird über der Funktion $y = x^2 + 2x + 1$ punktweise auf der senkrechten Geraden $x = t$ ($t > 0$) aufgetragen.

Leon: Herr K., ist es denkbar, dass der Graph der kubischen Funktion an der linken Seite des grau schattierten Bereiches für $x > -1$ nicht monoton oder sinusförmig verläuft?

Lehrer K.: Gute Frage!

Mary: Es seien α und β zwei positive x-Werte mit $0 < \alpha < \beta$.
Wir wollen jetzt herausfinden, welcher der Terme größer ist:

$$\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 \quad \text{oder} \quad \beta^3 + \beta^2 + 2\beta + 1 \ ?$$

$$(\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha + 1) - (\beta^3 + \beta^2 + 2\beta + 1) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha + \beta + 2)$$

$$= (\alpha - \beta)\,(\alpha^2 + (\beta + 1)\,\alpha + \beta^2 + \beta + 2)$$

$$= (\alpha - \beta)\left((\alpha + (\beta + 1)/2)^2 - (\beta + 1)^2/4 + \beta^2 + \beta + 2 \right)$$

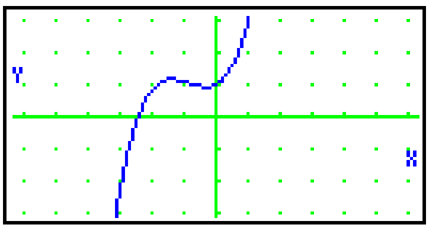
$$= (\alpha - \beta)\left((\alpha + (\beta + 1)/2)^2 + (3\beta^2 + 2\beta + 7)/4 \right)$$

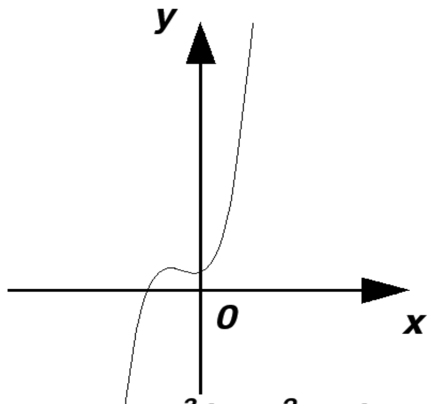
$$= (\alpha - \beta)\left((\alpha + (\beta + 1)/2)^2 + \left(3\,(\beta + 1/3)^2 + 20/3\right)/4 \right) < 0$$

Der Graph ist also nicht sinusförmig sondern streng monoton wachsend.
Die gleiche Schlußfolgerung ergibt sich für beliebige x-Werte mit $\alpha < \beta$.

Lehrer K.: Aber wir können durchaus kubische Funktionen finden, die ansteigen und abfallen. Kann jemand derartige Graphen zeichnen?

Ned: Ich habe $y = 0.4x^3 + x^2 + 0.5x + 1$ gezeichnet, wie hier zu sehen:





$y = 2x^3/5 + x^2 + x/2 + 1$

Lehrer K.: Jetzt kommen wir zu einer Aufgabenstellung. Fertigen Sie einen schriftlichen Beleg an!

Aufgabenstellung:

In Bezug auf die Graphen $y = \mathrm{f}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ klassifizieren wir die 18 Graphen neu, und zwar in zwei Gruppen wie folgt:

- Eine kubische Funktion mit den drei Koeffizienten a, b und c, die der einen dieser Gruppen angehört, ist monoton, selbst wenn wir die Koeffizienten ändern.
- Im Gegensatz dazu ist eine kubische Funktion mit Koeffizienten a, b und c, die der anderen Gruppe angehört, ansteigend und abfallend, wenn wir die Koeffizienten passend wählen.

Einverstanden?

Schauen wir uns an, was die Schüler zu Hause getan haben.

Ned hat sich entschlossen, ein Experiment mit dem Graphiktaschenrechner durchzuführen, weil er der Meinung war, das sei mit dem **DYNA**-Menü eine einfache Sache.
Er hat eine Variable geändert und sich darangemacht, das Ergebnis zu untersuchen:

$$\mathbf{Y1 = AX^3 + X^2 + 2X + 1}$$

Peter entschied sich, die Veränderungen zu beobachten, wenn er die Funktionen im **TABLE**-Menü tabelliert.

Quinton hat den Anstieg durch Einschalten von **Derivative** (im SET UP, mittels SHIFT MENU [SET UP]) untersucht, weil er es für wichtig hielt, das Ansteigen und Abfallen zu untersuchen.

Ich bin gespannt auf ihre Belege.

Anmerkung des Herausgebers zur Klassifikation der Kurvenscharen:

1. Gruppe von Kurvenscharen (strenge Monotonie in einer Richtung, keine Extremwerte):

$y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \ \forall x \in \mathbf{R}$ (oder $y' = 3ax^2 + 2bx + c \leq 0, \ \forall x \in \mathbf{R}$)

Es gibt höchstens eine Stelle x mit $y' = 0$,

d.h. $0 \leq b^2 \leq 3ac$ und $a > 0 \wedge c \geq 0$ bzw. $a < 0 \wedge c \leq 0$.

2. Gruppe von Kurvenscharen (zwei Extremwerte):

Es gibt zwei Stellen x mit $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$,

d.h. $b^2 > 3ac$ und $ac > 0$ bzw. $ac = 0$ bzw. $ac < 0$.

Beispiele zur 1. Gruppe (stets mit $a \neq 0$, $d=1$ und $b^2 \leq 3ac$):

folgende der **18** oben genannten Formelvarianten findet man in dieser Gruppe:

Variante **(+, 0, 0)**: $y = x^3 + 1$, Variante **(-, 0, 0)**: $y = -x^3 + 1$, ($c = 0 \wedge b = 0$)

Variante **(+, 0, +)**: $y = x^3 + 5x + 1$, Variante **(-, 0, -)**: $y = -x^3 - 5x + 1$, ($ac > 0 \wedge b = 0$)

Variante **(+, +, +)**: $y = x^3 + x^2 + x + 1$, Variante **(+, -, +)**: $y = x^3 - x^2 + x + 1$, ($ac \geq b^2 / 3 > 0$)

Variante **(-, +, -)**: $y = -x^3 + x^2 - x + 1$, Variante **(-, -, -)**: $y = -x^3 - x^2 - x + 1$, ($ac \geq b^2 / 3 > 0$)

Beispiele zur 2. Gruppe (stets mit $a \neq 0$, $d=1$ und $b^2 > 3ac$):

folgende der **18** oben genannten Formelvarianten findet man in dieser Gruppe:

Variante **(+, +, 0)**: $y = x^3 + 2x^2 + 1$, Variante **(-, +, 0)**: $y = -x^3 + 2x^2 + 1$, ($b > 0 \wedge c = 0$)

Variante **(+, -, 0)**: $y = x^3 - 2x^2 + 1$, Variante **(-, -, 0)**: $y = -x^3 - 2x^2 + 1$, ($b < 0 \wedge c = 0$)

Variante **(+, 0, -)**: $y = x^3 - x + 1$, Variante **(-, 0, +)**: $y = -x^3 + x + 1$, ($ac < 0 \wedge b = 0$)

Variante **(+, -, -)**: $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$, Variante **(-, -, +)**: $y = -x^3 - 2x^2 + x + 1$, ($ac < 0 \wedge b < 0$)

Variante **(+, +, -)**: $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$, Variante **(-, +, +)**: $y = -x^3 + 2x^2 + x + 1$, ($ac < 0 \wedge b > 0$)

Variante **(+, +, +)**: $y = x^3 + 3x^2 + x + 1$, Variante **(+, -, +)**: $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, ($b^2 / 3 > ac > 0$)

Variante **(-, +, -)**: $y = -x^3 + 3x^2 - x + 1$, Variante **(-, -, -)**: $y = -x^3 - 3x^2 - x + 1$, ($b^2 / 3 > ac > 0$)

Vier Varianten sind damit in beiden Gruppen vertreten.