4. Untersuchungen zur größtmöglichen Faltschachtel mit dem Graphiktaschenrechner -

Ein Lehrer-Schüler-Dialog: Quadervolumen bei variablem Zuschnitt, Nutzung unterschiedlicher Menüs: GRAPH, STAT, EQUA **(Maki)**

Zielstellung:

Beschreibung einer Unterrichtsstunde, in der die Schüler befähigt werden, Extremwertaufgaben (Minima und Maxima), so wie sie in Lehrbücher formuliert sind, selbstständig zu lösen. Zur Verwendung des Taschenrechners werden interessante Anregungen gegeben. Dabei werden auch gleichzeitig bestimmte Denkprozesse der Schüler stimuliert.

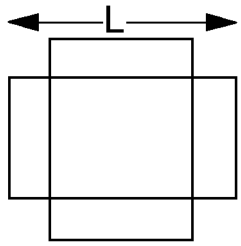
Mathematischer Hintergrund: Untersuchung der Veränderung von Funktionswerten

Das **"Problem der größtmöglichen Faltschachtel"** ist eine Aufgabenstellung, die in den meisten Lehrbüchern zu finden ist.

Obwohl unter Schülern oft die Meinung besteht, dass mit dem Graphiktaschenrechner rasch eine Lösung gefunden werden kann, ist das gar nicht unbedingt der Fall. Mit Sicherheit wird sich der Mathematikunterricht in der Zukunft wandeln, wenn nämlich die Schüler den Graphiktaschenrechner verwenden und der individuelle Lösungsweg eines jeden Schülers auf seine Richtigkeit geprüft werden muss. Die folgende Unterrichtsstunde soll die **"Lehrmethode zur Erkenntnisgewinnung"** etwas näher darstellen.

Die folgende Aufgabenstellung ist typisch für in zahlreichen Lehrbüchern enthaltene Aufgaben.

Aufgabe:
Gegeben ist ein Quadrat aus Pappe mit der Seitenlänge L[**cm**]. Wenn wir an den vier Ecken des Quadrats vier identische kleine Quadrate mit der Seitenlänge x[**cm**] ausschneiden, können wir die verbleibenden Rechtecke hochklappen, so dass eine offene Schachtel entsteht. Wie groß muss die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate sein, damit die Schachtel das größtmögliche Volumen hat?



Wenn der Lehrer diese Aufgabe stellt, könnte er beispielsweise vorschlagen, dass als Wert für L die Sitznummer eines jeden Schülers gewählt wird. Dadurch ergeben sich in einer Klasse mit **30** Schülern **30** verschiedene Aufgaben, so dass für die Lösung der Aufgabe jedem Schüler gleichsam persönliche Verantwortung zugewiesen wird. Dann kann der Lehrer ein Unterrichtsgespräch gestalten, in dem auch auf die Charakterzüge der einzelnen Schüler eingegangen wird, also etwa wie folgt:

"Schüler A hat eine ausgeprägte mathematische Denkweise,
Schüler B rechnet sehr gut und
Schüler C liebt die Mathematik nicht sonderlich."

Lehrer: *"Welche Formel können wir für das Volumen y aufstellen, wenn die Länge L gleich der Sitznummer und die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate gleich x ist ? "*

Schüler A: *"Aus der Skizze entnehme ich, dass das Volumen y die Grundfläche mal der Höhe ist. Somit lautet die Formel: "*

$$y = x(L - 2x)^2,\ 0 < x < L/2 \quad (L\text{: Sitznummer des Schülers}) \quad .... \quad \mathbf{(1)}$$

Lehrer: *"Und wie weiter ? "*

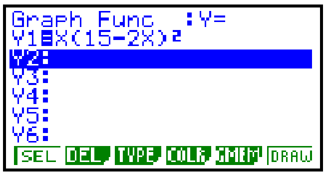
Schüler A: *"Aus dieser Formel können wir jetzt den Wert von x bestimmen, der zum größtmöglichen Volumen y führt. Anders gesagt, wir schreiben eine Tabelle aus ansteigenden und wieder abfallenden y-Werten."*

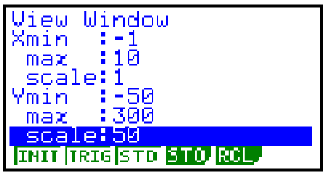
Lehrer: *"Gut. Jeder legt eine solche Wertetabelle aus ansteigenden und abfallenden y-Werten an und wir schreiben für jeden Schüler (für jedes L) die optimale Seitenlänge x der ausgeschnittenen Quadrate und den dazu gefundenen maximalen y-Wert (größtmögliches Volumen) an die Tafel."*

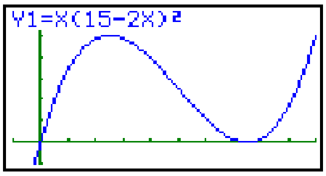
Nun beginnen die Schüler, ihre Tabellen anzulegen, indem sie die verschiedene Möglichkeiten ihres Graphiktaschenrechners ausnutzen.

Schüler A: (Sitz 15)

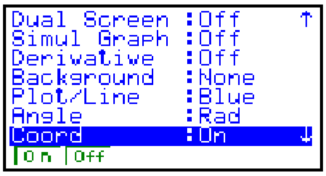
Er geht wie folgt vor: Aus dem Hauptmenü (**MAIN MENU**) heraus das **GRAPH**-Menü aufrufen, $x(15 - 2x)^2$ für **Y1** eingeben. Die Einstellung des Betrachtungsfensters mit SHIFT F3 [**V-Window**] aufrufen. Nach der Eingabe der Werte für das Betrachtungsfenster EXE drücken. Die Voreinstellungen erfolgen über SHIFT MENU [**SET UP**]. Zum Zeichnen des Graphen F6 [**DRAW**] drücken.

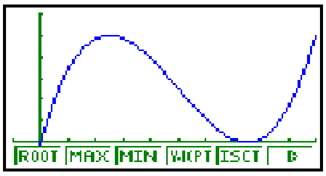


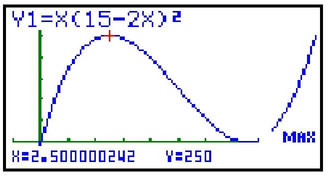




Dann SHIFT F5 [**G-Solv**] drücken. Bestimmung Maximalwertes durch Drücken von F2 [**MAX**].







Schüler A sagt: *"Ich hab's."* Er hat die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate auf eine Dezimale gerundet und x = **2,5** [**cm**] sowie für das maximale Volumen y = **250** [**cm**^{2}] an die Tafel geschrieben. *"Dieses Ergebnis haben wir der Leistungsfähigkeit des Graphiktaschenrechners zu verdanken: Hoch lebe der Taschenrechner! "*

Schüler C blickt ein wenig verächtlich in Richtung Schüler A, der das Verfahren zur Lösung der Aufgabe so rasch entwickelt hat.

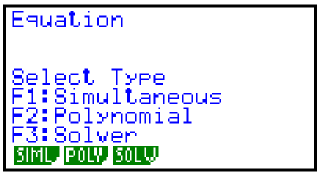
Lehrer: *"Einen Moment bitte, ihr seid noch nicht fertig. Differenziert Gleichung* **(1)** *und schreibt eine Wertetabelle mit ansteigenden und abfallenden Werten für y' ."*

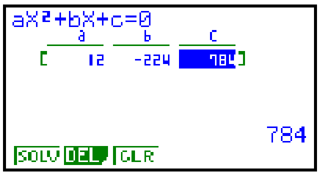
Antwort von Schüler B (Sitz 28)

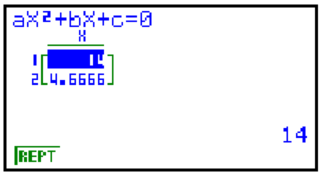
"Als erstes wird die Ableitung von $y = x\,(28 - 2x)^2$ *benötigt.* (Die Differenziation eines Produkts mit der Produktenregel ist in dieser Klassenstufe des Gymnasiums noch nicht allgemein bekannt.) *Die Ableitung von* $y = 4x^3 - 112x^2 + 784x$ *ergibt* $y' = 12x^2 - 224x + 784$ *. Jetzt kann ich den Graphiktaschenrechner nehmen, um den Maximalwert für* y *über* $y' = 0$ *zu errechnen."*

Lösung der quadratischen Gleichung über das EQUA-Menü:

Aus dem Hauptmenü (**MAIN MENU**) heraus das **EQUA**-Menü aufrufen und [F2][**POLY**] drücken. [F1][2] für quadratische Gleichung (Gleichung 2. Grades) drücken. Die Gleichung wird durch Eingabe der Koeffizienten [1] [2] [EXE] [–] [2] [2] [4] [EXE] [7] [8] [4] [EXE] und Drücken von [F1][**SOLV**] gelöst. Als Lösung ergeben sich die Werte **14** und **4,667**.







x	...	**4,667**	...	**28**
y'	+	**0**	-	
y	↗	**Maximum**	↘	

Die vollständige Tabelle
der ansteigenden und abfallenden Werte

Anmerkung:

Werden Quadrate mit der Seitenlänge **14 cm** aus dem Quadrat mit der Seitenlänge L **= 28 cm** ausgeschnitten, kann keine Schachtel gefaltet werden. Die optimale Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate ist also **4,67 cm** (auf zwei Dezimalen gerundet) und das maximale Volumen **1626 cm³**.

Lehrer: *"Die Vorgehensweise von Schüler B ist sehr schön, aber ... Und die anderen? "*

Schüler: Sie rufen: *"Schüler A, Schüler A."*

Lehrer: *"Wir wollen die Tabelle an der Tafel vervollständigen."*

L (Sitz-Nr.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
x	0,17	0,3	0,5	0,67	0,83	1	1,17	1,33	1,5	1,67	1,83	...
y_{max}	0,1	0,6	2	12	9,3	16	25,4	75	54	74,1	98,6	...

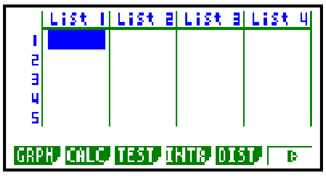
Lehrer: *"Ich möchte nun mit euch das Typische dieser Tabelle (eine Gleichung) untersuchen, und zwar den Zusammenhang zwischen der Seitenlänge* L *des Quadrates und dem Maximalvolumen* y_{max} *."*

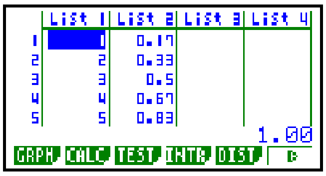
Schüler C: *"Können wir die Tabelle als einen Graphen mit dem Graphiktaschenrechner zeichnen? "*

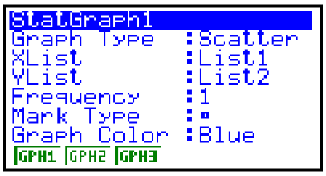
Lehrer: *"Aber ja. Wir wollen zuerst den Zusammenhang zwischen der Seitenlänge* L *des großen Quadrates und der Seitenlänge* x *der kleinen Quadrate untersuchen. Bin ich der Einzige, der glaubt, dass Graphiktaschenrechner in bestimmten Situationen geschickt eingesetzt werden können? "*

Zur graphischen Darstellung der Wertepaare im x-y-Koordinatensystem:

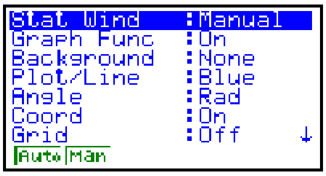
Aus dem Hauptmenü (**MAIN MENU**) heraus das **STAT**-Menü aufrufen. In **List1** die Sitz Nr. L und in **List2** die optimale Seitenlänge x der ausgeschnittenen Quadrate eingeben. Dann F1 [**GRPH**] drücken. Die eingegebenen Daten in List1 und List2 überprüfen, um Eingabefehler zu vermeiden. Dann F6 [**SET**] drücken. Den Graphiktyp (Scatterplot) durch Drücken von F1 [**Scat**] auswählen. F1 [**List1**] für **XList** und F2 [**List2**] für **YList** drücken. Die Eingabe mit EXE abschließen.

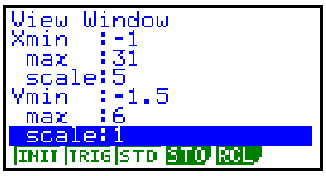


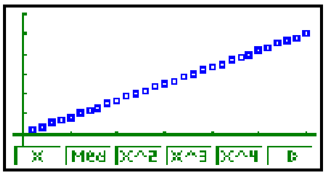




SHIFT MENU [**SET UP**] F2 [**Man**] drücken, um **Stat Wind** von **Auto** (Automatische Betrachtungsfenster-einstellung) in **Manual** (Manuelle Betrachtungsfenstereinstellung) zu ändern.
SHIFT F3 [**V-Window**] drücken. Dann den Maximalwert von List1 für **Xmax** und den Maximalwert von List2 für **Ymax** eingeben. Die Eingabe jeweils mit EXE abschließen.
Die Graphik erzeugen durch erneutes Drücken von EXE --> F1 [**GRPH**] --> F1 [**GPH1**].







Falls Probleme auftreten:

a) Falsch eingegebene Listendaten können durch Neueingabe der Daten sofort korrigiert werden.
b) Zum Löschen eines Listeneintrags MENU drücken und **LIST** (Listeneditor) wählen. Dann Eintrag mit F3 [**DEL**] löschen. MENU drücken und **STAT** wählen, um andere Daten eingeben zu können.

Lehrer: *"Nun, was sagt ihr dazu? Das ist die graphische Umsetzung eurer Tabelle."*

Schüler A: *"Scheint eine Gerade zu sein."*

Schüler C: *"Es ist eine Gerade, die nicht vollkommen gerade ist."*

Lehrer: *"Das ist wahr. Aber bedenkt, dass die Werte auf 2 Dezimalen gerundet sind und die Linie gar nicht perfekt gerade sein kann."*

Schüler A: *"Es muss eine Gerade sein! Ich möchte wissen, wie die Gleichung lautet."*

Lehrer: *"Es ist keine perfekte Gerade. Prüft das mal mit Zahlenwerten, von denen ihr wisst, dass sie korrekt sind. Nehmt zwei Paare natürlicher Zahlen aus der Tabelle und bestimmt die Gleichung der Geraden, die durch diese zwei Punkte verläuft. Nehmt aber nicht den Graphiktaschenrechner!"*

Schüler B: *"Eine Gerade durch die zwei Punkte* **(6, 1)** *und* **(12, 2)** *besitzt die Gleichung* $(y-1)/(x-6) = (2-1)/(12-6)$*, was zu* $y = x/6$ *vereinfacht werden kann."*

Lehrer: *"Das ist richtig. Ich denke, die Formel lautet* $x = L/6$ *."*

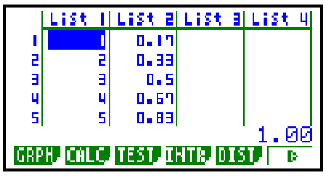
Schüler A: *"Die Seitenlänge des ausgeschnittenen Quadrats soll ein Sechstel der Seitenlänge* L *sein ? "*

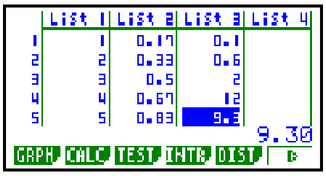
Schüler C (Sitz 8) teilt unverzüglich **8** durch **6** und erhält **1,333**.

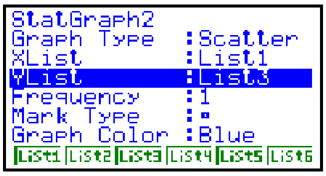
Schüler B: *"Wir sollten uns auch mit der Beziehung zwischen der Seitenlänge L und dem Maximalvolumen y_{max} beschäftigen."*

Lehrer: *"Schauen wir noch mal in die Liste."*

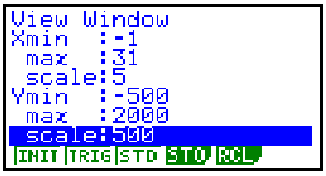
Aus dem Hauptmenü das **STAT**-Menü auswählen, das maximales Volumen (y_{max}) in **List3** eingeben und F1 [**GRPH**] drücken. Die Maximalwerte von List1 und List3 prüfen und dann F6 [**SET**] drücken. Zu **StatGraph2** wechseln durch F2 [**GPH2**].

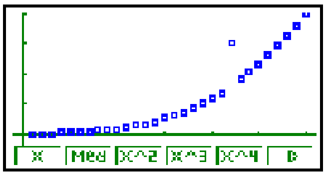


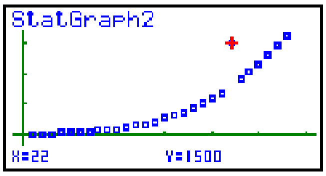




F2 [**List3**] für YList wählen und SHIFT F3 [**V-Window**] drücken.
Den Maximalwert von List1 als **Xmax** und den Maximalwert von List3 als **Ymax** eingeben. Dann die Graphik zeichnen durch Drücken von EXE --> F1 [**GRPH**] --> F2 [**GPH2**] --> SHIFT F1 [**Trace**].







Falls Probleme auftreten:

c) Wenn das Anfangsdisplay (Listeneditor) nicht erscheint, Rechner durch Drücken von SHIFT AC/ON [**OFF**] ausschalten. Rechner durch erneutes Drücken von AC/ON wieder einschalten und aus dem Hauptmenü (**MAIN MENU**) das **STAT**-Menü auswählen.

d) Wenn auf dem Display die vorige Graphik wieder erscheint, die YList-Einstellung in Zeile 3 der StatGraph2-Einstellung (siehe oben) durch Drücken von F3 von List2 in List3 ändern. Dann EXE und anschließend F2 [**GPH2**] drücken; jetzt muss die oben gezeigte Graphik gezeichnet werden.

e) Wenn der gewünschte Abschnitt des Graphen nicht zu sehen ist, das Display mit den Cursor-Tasten in der gewünschten Richtung scrollen.

Schüler B: *"Jetzt haben wir's! Es ist eine gekrümmte Linie."*

Schüler C: *"Es ist eine gekrümmte Linie, jedoch liegt ein Punkt nicht auf der Kurve."*

Schüler A: *"Das muss ein Fehler sein. Es ist nicht einzusehen, warum gerade dieser eine Punkt eine Ausnahme sein sollte."*

Lehrer: *"Die horizontale Koordinatenachse zeigt, dass es sich um den Schüler mit der Sitznummer 22 handelt. Überprüft mal den betreffenden Wert."*

Schüler 22: *" Tatsächlich. 1500 ist nicht richtig, es muss 789 heißen."*

Lehrer: *"Gibt es noch weitere Datenfehler? Stellen wir mal die Bereiche der x- und y-Achse auf dem Display (letztes Display) entsprechend ein und schauen nach. In der Nähe des Koordinatenursprungs sind noch zwei y-Fehler zu erkennen: bei Nr. 4 und Nr. 8."*

Schüler A: *"Ist die Kurve eigentlich quadratisch? Oder kubisch? Welchen Grad hat sie ? "*

Lehrer: *"Nicht aus jeder Graphik kann eine Formel abgeleitet werden. Euch ist hoffentlich klar geworden, dass ihr mathematische Fähigkeiten braucht? Eine Formel, die das Volumen y aus der Seitenlänge des Quadrats (Wert der Sitznummer) bestimmt, ist gerade mal der Anfang."*

Schüler B: *"Aus der Diskussion des Volumens ist zu erkennen, dass wir die Formel* **(1)** *von Schüler A verwenden können:"*

$y = x(L - 2x)^2, \ 0 < x < L/2$ (L: Sitznummer des Schülers) .... **(1)**

Schüler A: *"In diesem Falle ist es, wenn wir für L eine Zahl einsetzen, eine einfache kubische Funktion. Wir können also die Funktion differenzieren und die Extremwerte bestimmen:*

$y' = 12x^2 - 8Lx + L^2 = (6x - L)(2x - L)$ .... **(2)**

Die Bedingungen für x liefern einen Extremwert bei $x = L/6$."

Schüler C: *"Die Gleichung* **(2)** *ergibt zwei Extremstellen. Warum betrachten wir nur die eine ?"*

Schüler A: *"Die andere Extremstelle liefert keine Schachtel. Das können wir auch der Formel* **(1)** *entnehmen. Wir können außerdem aufgrund der Formel für die Gerade auf unserem ursprünglichen Graphen StatGraph1 bestätigen, dass die Formel $x = L/6$ lautet."*

Schüler B: *"Damit können wir aus der gewonnenen Kurve $x = L/6$ in Formel* **(1)** *einsetzen, und somit ergibt sich StatGraph2 als Graph der Kurve:"*

$y = L/6 \times (L - 2L/6)^2 = 2/27 \times L^3$

Lehrer: *"Wir kommen damit zum Abschluss. Machen wir uns noch ein paar Notizen."*

Unsere heutige Erkenntnis:

Die Seitenlänge von vier identischen Quadraten, die an den vier Ecken eine Quadrats der Seitenlänge L ausgeschnitten werden, muss $L/6$ betragen, damit das Volumen der sich ergebenden Schachtel ein Maximum wird. Das größtmögliche Volumen ist gleich $2L^3/27$.

Wir haben hier ein Beispiel für den Prozess der Erkenntnisgewinnung vor uns, in dem der Graphiktaschenrechner benutzt wird. Auf dem Rechner wurden wiederholt Berechnungen ausgeführt und das Interesse der Schüler wurde durch ein Unterrichtsgeschehen wachgehalten, das auf dem geistigen Erfassen der Problemmerkmale mittels Tabellen und Graphen aufbaut. Wichtiger ist es jedoch festzuhalten, dass durch den Graphiktaschenrechner die "Denkfähigkeit" der Schüler angeregt und sogar gesteigert wird.

Literaturhinweis:

[1] **Max Box Min Tin** (in englisch, Maximales Volumen bei minimaler Oberfläche) von G.Corris, in: ***Mathematics in School***, Vol. 22, Nr. 3 (May 1993), 36 - 39.