Sächsisches Staatsministerium
für Kultus

Geltungsbereich:
- allgemeinbildendes Gymnasium
- Abendgymnasium und Kolleg
- schulfremde Prüfungsteilnehmer

Schriftliche Abiturprüfung
Leistungs- und Grundkursfach Mathematik

Abiturähnliche Musteraufgaben

---

1 Vorbemerkungen

Die neuen Lehrpläne für Mathematik in der gymnasialen Oberstufe und die gültige EPA stellen auch an die zentrale Abiturprüfung in Sachsen und an ihre Aufgabenkultur neue Anforderungen, die aus dem gewohnten Vorgehen herausführen ohne bisher Erreichtes zu ignorieren. Die unten angegebenen Musterklausuren zeigen exemplarisch, welche Anforderungen sich für das Abiturniveau in Sachsen aus der im Lehrplan geforderten Verknüpfung von Wissenserwerb, Entwicklung von Lern-, Methoden- und Sozialkompetenz sowie Werteorientierung ergeben. Es wird die Absicht verfolgt, die Umsetzung der allgemeinen fachlichen Ziele des Lehrplans

- Entwickeln von Problemlösefähigkeiten
- Entwickeln eines kritischen Vernunftgebrauchs
- Entwickeln des verständigen Umgangs mit der fachgebundenen Sprache unter Bezug und Abgrenzung zur alltäglichen Sprache
- Entwickeln des Anschauungsvermögens
- Erwerben grundlegender Kompetenzen im Umgang mit ausgewählten mathematischen Objekten

in potenziellen Abituraufgaben zu verdeutlichen.

Hinsichtlich der Aufgabenkultur wird besonderer Wert auf einen stärkeren Anwendungsbezug der Aufgaben und auf die Verknüpfung grundlegender Inhalte aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik gelegt.

In der Struktur der Prüfungsarbeit wird ein ausgewogenes Verhältnis zwischen der Nutzung von Hilfsmitteln und hilfsmittelfreiem Arbeiten realisiert. Innerhalb des Teils B werden einzelne Aufgaben bzw. einzelne Aufgabenteile in Abhängigkeit der vom Prüfungsteilnehmer in der Prüfung verwendeten Hilfsmittel differenziert gestaltet.

Die nachfolgenden Musteraufgaben besitzen orientierende Funktion für die Abiturprüfung ab 2010 an allgemeinbildenden Gymnasien.

3 Abiturähnliche Musteraufgaben für das Grundkursfach

3.1 Material für den Prüfungsteilnehmer

Allgemeine Arbeitshinweise

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B, die innerhalb von **240 Minuten** zu bearbeiten sind.

Teil A: Ein Teil der Aufgaben im Teil A ist auf dem **Aufgabenblatt** zu lösen.

Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil A sind ausschließlich folgende Hilfsmittel zugelassen:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung,
- Zeichengeräte und Zeichenhilfsmittel.

Im Teil A sind **15 BE** (Bewertungseinheiten) zu erreichen.

Alle Materialen zum Teil A werden 60 Minuten nach Arbeitsbeginn eingesammelt.

Teil B: Für die Bearbeitung der Aufgaben im Teil B sind nach dem Einsammeln von Teil A folgende **Hilfsmittel** zugelassen:

- grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner mit oder ohne Computer-Algebra-System (CAS) bzw. ein CAS auf der Grundlage einer anderen Plattform,
- Tabellen- und Formelsammlung,
- eigene Aufzeichnungen,
- im Teil A zugelassene Hilfsmittel.

Im Teil B sind **45 BE** zu erreichen.

Geben Sie auf dem Deckblatt der Arbeit den verwendeten Typ des Taschenrechners an.

Die **Lösungsdarstellung** muss nachvollziehbar sein und in einwandfreier Form erfolgen.

Schulchiffre: _______________ Kennzahl Prüfungsteilnehmer: _______________

Prüfungsinhalt

Teil A

Tragen Sie die Antworten zu den Aufgaben 1 und 2 auf dem vorliegenden Aufgabenblatt ein, und verwenden Sie für die Antworten zu den Aufgaben 3 und 4 das bereitliegende Papier für die Reinschrift.

1 In den Aufgaben 1.1 bis 1.5 ist von den jeweils fünf Auswahlmöglichkeiten genau eine Antwort richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1.1 Die Tangente an den Graphen einer ganzrationalen Funktion besitzt an der Stelle $x=-3$ den Anstieg $-\frac{7}{3}$. Jede Senkrechte zu dieser Tangente hat die Steigung

☐	☐	☐	☐	☐
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$

1.2 Welche der angegebenen Funktionen ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x)=-\frac{2}{x}$ $(x\in D_g)$ im größtmöglichen Definitionsbereich?

☐ $G(x)=-2\cdot\ln x$

☐ $G(x)=-\frac{2}{x^2}$

☐ $G(x)=-2\cdot\ln|x|$

☐ $G(x)=2\cdot\ln|x|$

☐ $G(x)=\frac{2}{x^2}$

1.3 Die Geraden g und h mit

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}\quad(s\in\mathbb{R})\ \text{und}\ h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\quad(t\in\mathbb{R})$$

☐	☐	☐	☐	☐
verlaufen parallel	schneiden sich senkrecht	schneiden sich nicht senkrecht	verlaufen windschief	sind identisch

1.4 Ein reguläres Tetraeder beschriftet mit den Zahlen 1 bis 4 wird genau zweimal geworfen. Die unten liegende Zahl gilt als geworfen.

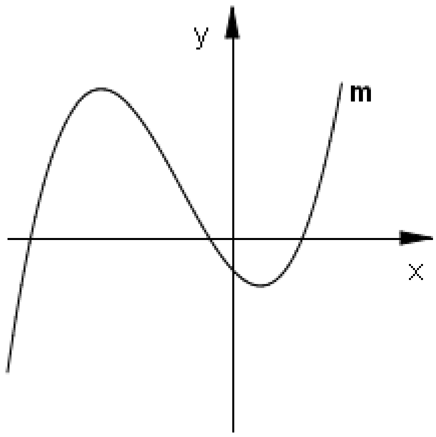
Die Wahrscheinlichkeit für „Es wurde mindestens einmal die 3 geworfen“ beträgt

☐	☐	☐	☐	☐
$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

Für Aufgabe 1 erreichbare BE-Anzahl: 4

2 Skizzieren Sie zum vorgegebenen Graphen einer Funktion m in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion m' im dargestellten Intervall.

Begründen Sie den Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion an markanten Stellen.



Begründung:

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Erreichbare BE-Anzahl: 4

3 Peter hat in einem Computer-Algebra-System (CAS) die Funktion a mit $a(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ definiert.
Welcher mathematische Sachverhalt wird durch die Funktion a beschrieben?

Geben Sie an, welchen Wert das CAS nach Auswertung der Eingabe $\frac{1}{3} \cdot a(5,6)$ ausgibt und geben Sie die Bedeutung dieses Wertes an.

Erreichbare BE-Anzahl: 3

4 Auf einer Spindel befinden sich genau acht CD-Rohlinge, von denen genau zwei unbrauchbar sind. Der Spindel werden nacheinander genau zwei Rohlinge ohne Zurücklegen entnommen.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit beide Rohlinge brauchbar sind.

Ermitteln Sie, wie viele Rohlinge man im Mittel der Spindel entnehmen muss, bis man einen brauchbaren gefunden hat.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Teil B

Aufgabe 1

Jeden Winter zieht es viele Wintersportfreunde mit Ski und Snowboard an die kleinen und großen Skihänge der Wintersportgebiete im Erzgebirge.

Ein Teil des Graphen der Funktion f mit $f(x) = e^{\frac{1}{6} \cdot x - 2} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{8} \cdot x \right) + 5 \quad \left(x \in D_f \right)$ kann zur Beschreibung der Profillinie einer Skipiste zwischen den Punkten A und $B(0; f(0))$ verwendet werden. Die Funktionswerte geben die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an.

Der Punkt A auf dem Graphen der Funktion f liegt so, dass seine y-Koordinate der größtmöglichen Höhe über dem Meeresspiegel entspricht.

Eine Einheit entspricht 100 m.

1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte A und B.

Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f so an, dass nur der Verlauf der Profillinie der Skipiste beschrieben wird.

Geben Sie die Höhendifferenz der Skipiste an.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

1.2 Ein Skifahrer fährt entlang der Profillinie der Skipiste vom Punkt A zum Punkt B. Beschreiben Sie den Verlauf des Anstieges der Skipiste auf dieser Fahrt.

Bestimmen Sie die durchschnittliche Hangneigung der Profillinie zwischen den Punkten A und B in Prozent.

Hinweis: Eine Hangneigung von z. B. 40 % bedeutet, dass bei einer horizontalen Entfernung von 100 m ein Höhenunterschied von 40 m existiert.

Zur Charakterisierung von Skipisten nutzt man nicht die durchschnittliche, sondern die maximale Hangneigung.

Begründen Sie, dass dieses Vorgehen sinnvoll ist.

Entsprechend der maximalen Neigung eines Hanges unterscheidet man drei Schwierigkeitsgrade von Skipisten:

blau: leicht (für Anfänger geeignet) mit einer maximalen Neigung unter 25 %

rot: mittelschwer mit einer maximalen Neigung von 25 % bis 40 %

schwarz: anspruchsvoll (nur für Könner) mit einer maximalen Neigung über 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der Skipiste zwischen den Punkten A und B.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

Fortsetzung auf Seite 18

Fortsetzung Aufgabe 1

Teilaufgabe 1.3 (für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen)

1.3 Für ein Computerprogramm soll die Profillinie der Skipiste durch die Funktion $f_{a;b}$ mit $f_{a;b}(x) = e^{\frac{1}{6}\cdot x-2} \cdot \left(\frac{7}{2} - a \cdot x\right) + b \quad \left(a, b \in R, a, b > 0; x \in D_{f_{a;b}}\right)$ simuliert werden.

Die Funktionswerte geben die jeweilige Höhe über dem Meeresspiegel an. Die Profillinie der Skipiste liegt zwischen den Punkten $P_{a;b}$ und $Q_{a;b}\left(0; f_{a;b}(0)\right)$. Der Punkt $P_{a;b}$ ist der lokale Extrempunkt der Funktion $f_{a;b}$.

Eine Einheit entspricht 100 m.

Erläutern Sie, welche Bedeutung der Parameter b bei der Simulation der Skipiste besitzt.

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Bedingungen I und II erfüllt sind.

I Der Punkt $Q_{a;b}$ liegt genau 300 m über dem Meeresspiegel.

II Die Abszisse des Punktes, in dem die Profillinie die maximale Neigung besitzt, beträgt 200 m.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

Teilaufgabe 1.3 (für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen)

1.3 Für ein Computerprogramm soll die Profillinie der Skipiste zwischen den Punkten A und B durch eine ganzrationale Funktion g angenähert werden.

Zwischen den Punkten A und B liegt auf der Profillinie ein Punkt, in dem die Neigung des Hanges maximal ist.

Welchen Grad muss die Funktion g mindestens haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion g.

Geben Sie im angegebenen Bereich die größtmögliche Differenz in den Höhen über dem Meeresspiegel zwischen der Funktion f und der Näherungsfunktion g an.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

1.4 In einem viel besuchten Skigebiet gibt es einen Vierer-Sessel-Lift, der zu 72 % von Skifahrern genutzt wird. Der Rest sind Snowboarder. Jeder Vierer-Sessel sei voll besetzt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
Ereignis A: Auf einem Vierer-Sessel fahren genau drei Skifahrer.
Ereignis B: Auf einem Vierer-Sessel fahren höchstens zwei Snowboarder.

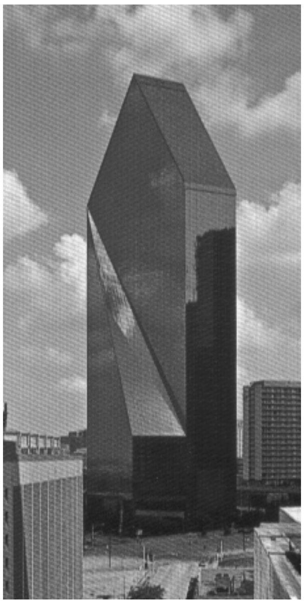
Geben Sie an, wie viele Snowboarder man durchschnittlich auf 20 Vierer-Sesseln beobachten kann.

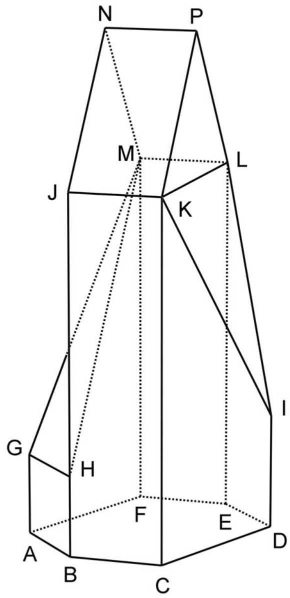
Erreichbare BE-Anzahl: 4

Aufgabe 2

Dallas in Texas ist für seine futuristisch gestalteten Hochhäuser berühmt. Eines der bekanntesten ist das 1986 fertiggestellte Fountain Place Building. Ziel des Architekten war es, ein Gebäude zu schaffen, dass von jedem Standort aus und zu jedem Zeitpunkt unterschiedlich aussehen soll. Das Gebäude ist vollständig mit verspiegeltem Glas verkleidet, so dass in Abhängigkeit der Lichtverhältnisse die Farbwirkung mehrmals täglich wechselt.

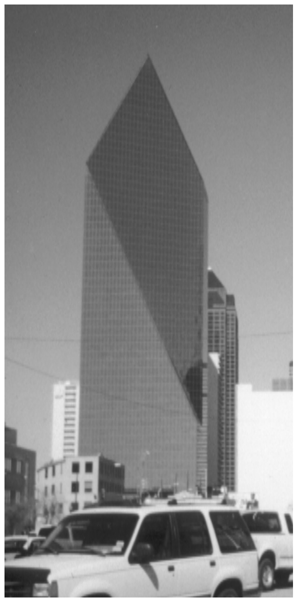
Ansicht von Westen





(Abbildung nicht maßstäblich)

Ansicht von Osten



Die geometrische Grundform besteht aus einem Quader mit aufgesetztem Prisma. In Richtung Westen und in Richtung Osten sind jeweils verschiedene dreiseitige Prismen mit angesetzten Pyramiden angebracht (siehe Abbildung).

Die Eckpunkte der sechseckigen Grundfläche sind allesamt Eckpunkte eines regulären Achtecks, das so in der x-y-Ebene eines gedachten kartesischen Koordinatensystems (eine Einheit entspricht 1 Meter) liegt, dass sich der Mittelpunkt dieses Achtecks im Koordinatenursprung befindet. Der Dachfirst $\overline{NP}$ verläuft parallel zur Seite $\overline{BC}$ des Achtecks, sein Mittelpunkt liegt senkrecht über dem Koordinatenursprung.

Von den Eckpunkten des Gebäudes sind folgende Koordinaten bekannt:

C (0 ; -41,5 ; 0), D (41,5 ; 0 ; 0), G (-41,5 ; 0 ; 35), H (-29,4 ; -29,4; 35), I (41,5 ; 0 ; 50),
K (0 ; -41,5 ; 155,5), L (29,4 ; 29,4 ; 155,5) und M (0 ; 41,5 ; 155,5).

2.1 Die Spitze M der im linken Bild sichtbaren Pyramide endet in 71 % der Gesamthöhe des Gebäudes.

Geben Sie die Gesamthöhe des Gebäudes an.

Weisen Sie nach, dass der Punkt P die Koordinaten $(14{,}7; -6{,}1; 219{,}0)$ besitzt.

Geben Sie die Koordinaten der nicht vorgegebenen Eckpunkte an.

Zeichnen Sie die Draufsicht des Gebäudes maßstäblich.

Erreichbare BE-Anzahl: 7

Fortsetzung auf Seite 20

Fortsetzung Aufgabe 2

2.2 Weisen Sie nach, dass es vier Eckpunkte der Grundfläche gibt, die ein Quadrat aufspannen.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

2.3 Zeigen Sie, dass $-7\,479{,}950 \cdot x + 3101{,}700 \cdot y - 1722{,}250 \cdot z = -396\,530{,}425$ eine Gleichung der Ebene E_{KLI} ist.

Prüfen Sie, ob die Ebenen E_{GHM} und E_{KLI} zueinander orthogonal sind.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

2.4 In einem früheren Planungsentwurf plante der Architekt, die Spitze der Pyramide nach Osten in die Grundrissebene zu legen, d. h., der Punkt I würde mit dem Punkt D zusammenfallen.

Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Ebenen E_{KLI} und E_{KLD}.

Das Glas der „schräg liegenden Fläche“ KLI bzw. KLD muss besonderen Qualitätsansprüchen genügen und ist deshalb besonders teuer.
Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die realisierte Variante mit der Fläche KLI gegenüber der ursprünglich geplanten Variante mit der Fläche KLD kostengünstiger ist.
Vernachlässigen Sie dabei die Unterschiede in den Kosten für die Verglasung der Flächen CDIK und DEIL in den beiden Varianten.

Erreichbare BE-Anzahl: 6

2.5 Nach dem Durchzug eines Hurrikans im Jahre 2004 musste eine Fläche von $20\,m^2$ der Glashülle ersetzt werden. Dafür wurden quadratische Glasscheiben mit einem Flächeninhalt von $0{,}25\,m^2$ verwendet.

Bei den Glaserarbeiten wurde mit einem Verschnitt von 10 % gerechnet. Die Ausschusswahrscheinlichkeit der Glasscheiben betrug 0,005.

Ermitteln Sie, wie viele Glasscheiben mindestens bestellt werden mussten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 eine für die Reparatur ausreichende Menge an Glasscheiben vorhanden war.

Erreichbare BE-Anzahl: 2

3.2 Hinweise für den prüfenden Fachlehrer

Erwartungsbild und Bewertungsmaßstab

Inhaltlich zu erwarten:	Erreichbar:

Teil A

1	je Ergebnis 1 BE: Feld 4, Feld 3, Feld 3, Feld 1	**4 BE**
2	Skizze (2 BE) Begründung (2 BE)	**4 BE**
3	Sachverhalt Ausgabewert des CAS: $50\cdot\pi$ Bedeutung des Ausgabewertes	**3 BE**
4	Ansatz für Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit: $\frac{15}{28}$ Ansatz für Anzahl der Entnahmen Anzahl: $\frac{9}{7}$	**4 BE**
		15 BE

Teil B

Aufgabe 1

1.1	Ansatz für Koordinaten des Punktes A Koordinaten des Punktes A Koordinaten des Punktes B Definitionsbereich: $D_f = \{x \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 22\}$ Höhendifferenz: 350 m	**5 BE**
1.2	Beschreibung (2 BE) Ansatz für durchschnittliche Hangneigung durchschnittliche Hangneigung: $\approx 15{,}9\ \%$ Begründung Ansatz für maximale Hangneigung maximale Hangneigung: $\approx 24{,}3\ \%$ Aussage: Es ist eine blaue Piste.	**8 BE**
1.3	**für Prüfungsteilnehmer, die ein CAS benutzen** Bedeutung des Parameters b Berücksichtigung Bedingung I Wert b: $b = 3 - \frac{7}{2\cdot e^2}$ Berücksichtigung Bedingung II (2 BE) Wert a: $a = \frac{1}{4}$	**6 BE**

1.3 **für Prüfungsteilnehmer, die kein CAS benutzen**
Grad der Funktion g: mindestens 3
Begründung
Ermittlung einer Gleichung von g (2 BE)
eine Gleichung von g
maximale Differenz **6 BE**

1.4 Art der Verteilung
Wahrscheinlichkeit für Ereignis A: $P(A) \approx 0,4180$
Wahrscheinlichkeit für Ereignis B: $P(B) \approx 0,9306$
Erwartungswert: 22,4 **4 BE**
23 BE

Aufgabe 2

2.1 Gesamthöhe: $h \approx 219,0$ m
Nachweis (2 BE)
Koordinaten des Punktes N: N (-14,7 ; 6,1 ; 219,0)
Koordinaten der anderen nicht gegebenen Eckpunkte
maßstäbliche Zeichnung (2 BE) **7 BE**

2.2 Nachweis für Viereck ACDF **2 BE**

2.3 Nachweis für Gleichung der Ebene E_{KLI} (2 BE)
eine Gleichung der Ebene E_{GHM}
Ansatz
Schlussfolgerung: nicht orthogonal **5 BE**

2.4 eine Gleichung der Ebene E_{KLD}
Schnittwinkel: 3,8°
Flächeninhalte der Dreiecke: $A_{KLI} = 4\,139\ m^2$; $A_{KLD} = 6\,029\ m^2$ (2 BE)
Ansatz
Ergebnis: Die Kosten der realisierten Variante sind um 31,3 % niedriger als bei der ursprünglich geplanten Variante. **6 BE**

2.5 Ansatz für Anzahl
Anzahl: n = 92 **2 BE**
22 BE

Sachsen 2010 Abitur Mathematik-Grundkurs(GK)-Muster

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (ohne Taschenrechner)

Aufgabe 1: Tippklausur (genau eine von fünf Antworten richtig)

Pflichtaufgabe 1.1

geg. Tangentenanstieg m_1=-7/3 an der Stelle x=-3 für eine Funktion
ges. Normalenanstieg m_2 der Normalen (Senkrechten) zur gegebenen Tangente

Lösung:
Es gilt der Zusammenhang $m_2 = -1/m_1$, d.h. $m_2 = 3/7$

Kontrolle im GTR:
$-7/3 \Rightarrow m_1$
$-1/m_1 \Rightarrow m_2$ ergibt 3/7

Damit ist Antwort 4 richtig.

Pflichtaufgabe 1.2

geg. g(x) = -2/x mit größtmöglichem Definitionsbereich
ges. Stammfunktion G(x) mit G'(x) = g(x)

Lösung:
∫(-2/x,x) = -2×ln|x| + C = - ln(x^2) + C = ln(x^(-2)) + C

(Integration z.B. durch zielgerichtetes Probieren:
Stammfunktion muss etwas mit ln(...) sein,
Probe durch Differenzieren)

Kontrolle im GTR(CAS):
Define g(x)=((-2)/(x))
Done

∫(g(x),x) ergibt -2×ln(abs(x))

Damit ist Antwort 3 richtig.

Pflichtaufgabe 1.3

geg. Geraden g: x(s) = [[0],[8],[0]] + s×[[-2],[-2],[3]] und h: x(t) = [[-6],[6],[3]] + t×[[2],[-2],[3]]
ges. Lage der Geraden zueinander (identisch oder parallel oder windschief oder senkrechter Schnitt oder Schrägschnitt)

Lösung:
nicht parallel, da Richtungsvektoren linear unabhängig sind:
[[-2],[-2],[3]] ≠ r×[[2],[-2],[3]] für alle r∈R,

damit auch nicht identisch.

Schnitt: [[0],[8],[0]] + s×[[-2],[-2],[3]] = [[-6],[6],[3]] + t×[[2],[-2],[3]] bedeutet
[[-6],[2],[-3]] = s×[[2],[2],[-3]] + t×[[2],[-2],[3]]

Wir betrachten die drei zuletzt vorkommenden Vektoren hinsichtlich der linearen Abhängigkeit:
(Regel von Sarrus oder Entwicklung nach 1.Zeile)

det([[6,2,2],[2,2,-2],[-3,-3,3]]) = 6×(6-6)-2×(6-6)+2×(-6+6) = 0

Damit liegen linear abhängige Vektoren vor, d.h. [[6],[2],[-3]] ist mit passenden s,t als Linearkombination s×[[2],[2],[-3]]+t×[[2],[-2],[3]] darstellbar.

Schittwinkel der Richtungsvektoren ist nicht 90°, da das Skalarprodukt nicht null wird:

dotP([[2],[2],[-3]],[[2],[-2],[3]])=4-4-9=-9≠0.

Somit liegt ein nichtsenkrechter Schnitt vor.

Damit ist Antwort 3 richtig.

Kontroll-Rechnung im GTR:
solve({6=2*s+2*t,2=2*s-2*t,-3=-3*s+3*t},{s,t,u}) ergibt {s=2,t=1,u=u}
dotP([[2],[2],[-3]],[[2],[-2],[3]]) ergibt -9

Schnittpunkt:
[[0],[8],[0]]+s*[[-2],[-2],[3]]|s=2 ergibt [[-4],[4],[6]]

Schnittwinkel beträgt 58°:
dotP([[-2],[-2],[3]],[[2],[-2],[3]])/(norm([[-2],[-2],[3]])*norm([[2],[-2],[3]])) ergibt 9/17
$\cos^{-1}$(ans) ergibt 58.03428125 (im Altgradmodus)

Pflichtaufgabe 1.4

geg. Mit einem regelmäßigen Tetraeder (Zahlen 1 bis 4) wird 2mal gewürfelt (unten liegende Zahl gilt als geworfen)
ges. Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "mindestens 1mal Zahl 3 geworfen"

Lösung:
A = {mindestens 1mal Zahl 3 geworfen in 2 Würfen}
P(A) = 1- P({nicht mindestens 1mal Zahl 3 geworfen in 2 Würfen})
= 1-(3/4)^2 = 7/16

Damit ist Antwort 1 richtig.

Kontrolle im GTR:
1-(3/4)^2 ergibt 7/16

Pflichtaufgabe 1.5 (nicht vorhanden)

Sachsen 2010 Abitur Mathematik-Grundkurs(GK)-Muster

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

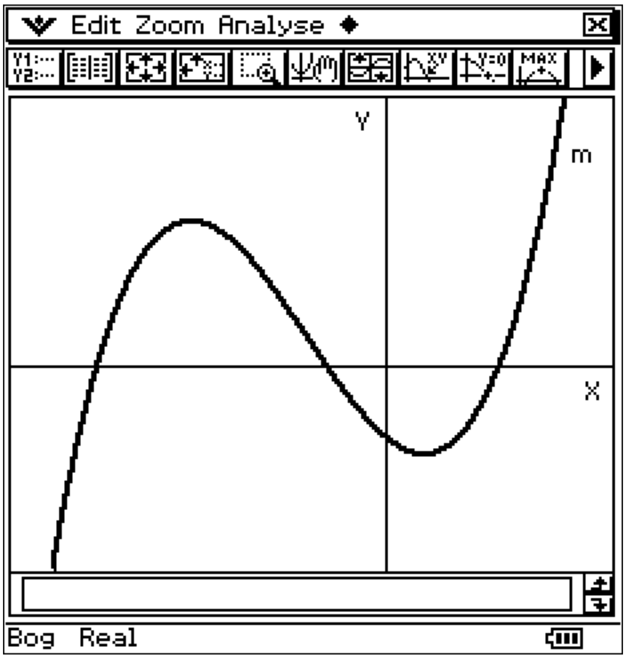
Pflichtaufgaben
Teil A: (ohne Taschenrechner)

Aufgabe 2: theoretisches Wissen zur Kurvendiskussion

geg. Schaubild einer (Stamm-)Funktion m (ohne Formel) mit 2 Extremwerten, dazwischen ein Wendepunkt und drei Nullstellen, vgl. Skizze

ges. Ableitungsfunktion m' (skizzieren und an markanten Stellen begründen) im vorgegebenen Intervall des x-y-Koordinatensystems

Skizze

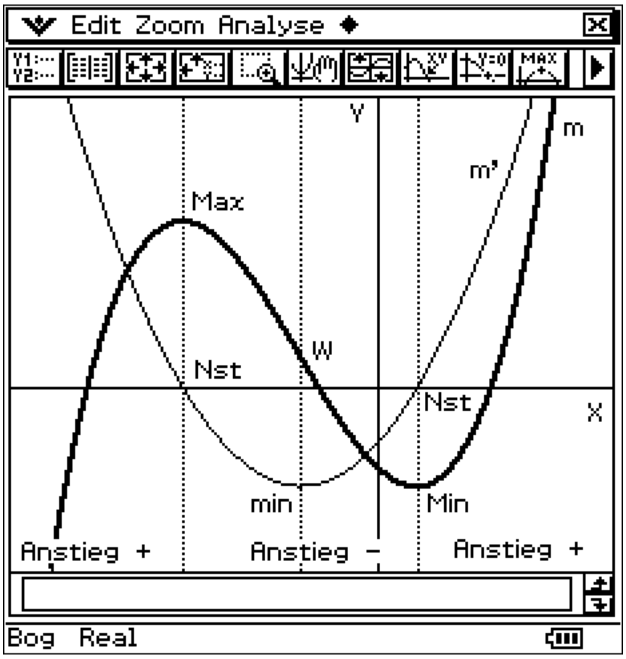


Lösung:

bekanntlich gilt:
Extremstellen von m sind Nullstellen der Ableitungsfunktion m' und die Wendestelle von m ist Extremstelle der Ableitungsfunktion m'.

Weiterhin erkennbar:
m streng monoton wachsend bedeutet positiver Anstieg m'
m streng monoton fallend bedeutet negativer Anstieg m'

Damit wechselt m' an der linken Nullstelle das Vorzeichen von + zu -, an der Wendestelle erreicht m' ein Minimum im negativen Wertebereich, um dann an der rechten Nullstelle das Vorzeichen von - wieder zu + zu wechseln.



Es folgt eine Beispielrechnung:

Define y1(x) = 0.2*(x+5)*(x+1)*(x-2)

done

diff(y1(x),x,1)   ergibt   (-(7-8*x-3*x^2))/5

Define y2(x) = -(7-8*x-3*x^2)/5

done

solve(y2(x)=0,x)   ergibt   {x = -4/3-37^(1/2)/3, x = -4/3+37^(1/2)/3}

fMin(y2(x),x)   ergibt   {MinValue=-37/15, x = -4/3}

Die Nullstellen $-(4/3)\pm\sqrt{(37)}/3$ der Ableitung markieren hier die Extremstellen der Ausgangsfunktion m,

Die Extremstelle -4/3 der Ableitung markiert hier die Wendestelle der Ausgangsfunktion m.

Sachsen 2010 Abitur Mathematik-Grundkurs(GK)-Muster

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

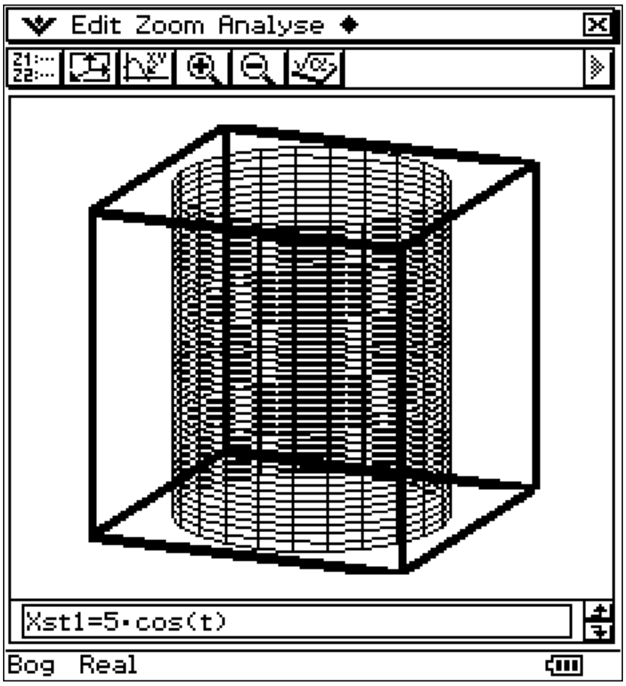
Pflichtaufgaben
Teil A: (ohne Taschenrechner)

Aufgabe 3: Geometrie, Analysis

geg. ist eine im CAS definierte Formel
$a(r,h) = \pi \times r^2 \times h$

ges. mathematischer Sachverhalt (Interpretation) zur Formel a(r,h)

Lösung:
Volumen eines Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h.



Kreiszylinder in 3D

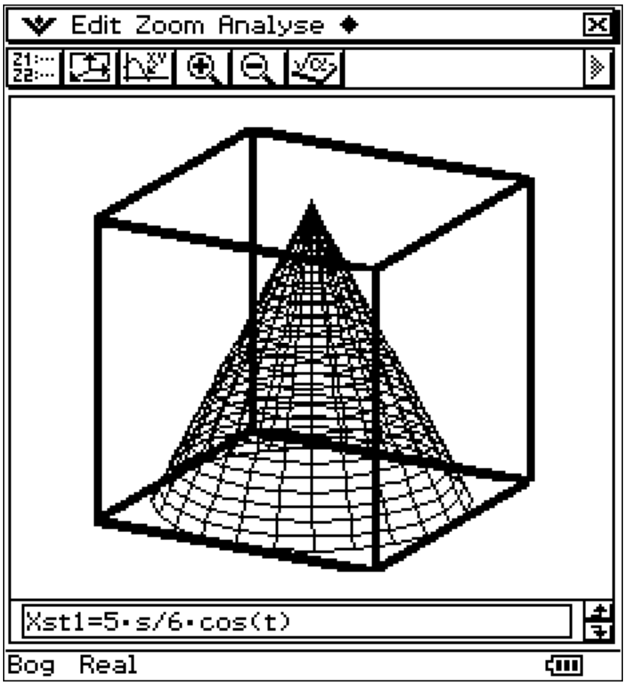
ges. Wert von (1/3)×a(5,6) und dessen Bedeutung

Lösung:

$(1/3)\times a(5,6) = (1/3)\times\pi\times 25\times 6 = 50\pi$

Bedeutung:

Volumen eines Kreiskegels mit Grundkreisradius 5 und Höhe 6.



Kreiskegel in 3D

Sachsen 2010 Abitur Mathematik-Grundkurs(GK)-Muster

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil A: (ohne Taschenrechner)

Aufgabe 4: Stochastik

geg. 8 CD-Rohlinge (auf einer Spindel), davon genau 2 unbrauchbar.
Entnahme von genau zwei Rohlingen (Ziehen ohne Zurücklegen)

ges. Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A={2 brauchbare Rohlinge entnommen}

Lösung:
$P(A) = nCr(6,2)/nCr(8,2) = 6\times 5/(8\times 7) = 15/28$

Kontrolle im GTR:
nCr(6,2)/nCr(8,2) ergibt 15/28

ges. mittlere Anzahl der Entnahmen (Ziehen ohne Zurücklegen) bis zum ersten brauchbaren Rohling

Lösung:
Ereignis Ai = {i-te entnommene Rohling ist brauchbar}, i=1,2,3.
Zufallsgröße X bezeichnet die zufällige Anzahl der Entnahmen bis zur ersten brauchbaren CD.

Dann gilt:
$\{X=1\}=A_1$ und $P(X=1) = 6/8 = 3/4$

$\{X=2\}$ = (nicht A_1 und A_2), d.h. (bedingte Wahrscheinlichkeit)
$P(X=2) = P(\text{nicht } A_1 \text{ und } A_2) = P(A_2|\text{nicht } A_1)\times P(\text{nicht } A_1) = (6/7)\times(2/8) = 3/14$

$\{X=3\}$ = (nicht A_1 und nicht A_2 und A_3), d.h.
$P(X=3) = P(\text{nicht } A_1 \text{ und nicht } A_2 \text{ und } A_3)$
$= P(A_3|\text{nicht } A_1 \text{ und nicht } A_2)\times P(\text{nicht } A_1 \text{ und nicht } A_2)$
$= (6/6)\times(nCr(2,2)/nCr(8,2)) = 1/nCr(8,2) = 1/28$

oder $P(X=3) = 1 - P(X=2) - P(X=1) = 1 - 3/4 - 3/14 = 1/28$.

Damit gilt:
$E(X) = 1\times 3/4 + 2\times 3/14 + 3\times 1/28 = 36/28 = 9/7$.

Kontrolle im GTR:
1*3/4+2*3/14+3*1/28 ergibt 9/7

Sachsen 2010 Abitur Mathematik-Grundkurs(GK)-Muster

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (mit Taschenrechner)

Aufgabe 1: Analysis, Stochastik

geg. Profillinie einer Skipiste: f(x) = e^((x/6)-2)×((7/2)-(x/8))+5, x∈Df,
zwischen den Punkten A und B(0;f(0))
(Funktionswerte f(x) geben Meeresspiegelhöhe an, 1 Einheit = 100m)
A ist Maximumpunkt der Funktion

Pflichtaufgabe 1.1

ges. Koordinaten von A und B, Definitionsbereich der Skipiste, Höhendifferenz der Skipiste

Lösung:
f(0) = e^(-2)×((7)/(2))+5 = 5,47367 = 547,367m
Damit gilt für B: B(0; 5,47367).

Kontrolle im GTR(CAS):
Define f(x)=e^((x/6)-2) × ((7/2)-(x/8)) + 5
done
f(0) ergibt 5.473673491

Extremwertsuche:
f'(x) = e^((x/6)-2)×(1/6)×((7/2)-(x/8)) + e^((x/6)-2)×(-1/8) = e^((x/6)-2)×((7/12)-(x/48)-1/8) = 0, d.h.
(7/12) - (x/48) - 1/8 = 0 |×48
28-x-6=0

hieraus folgt x = $x_{\mathbf{max}}$ = 22.

x=22 ist Maximumstelle, da für x+epsilon die Ableitung negativ und für x-epsilon die Ableitung positiv wird (epsilon>0, nahe Null).

f(22) = e^((22/6)-2)×((7/2)-(22/8))+5 = e^(5/3)×(3/4)+5 = 8,97087 = 897,087m.

Damit gilt für A: A(22; 8,97087).

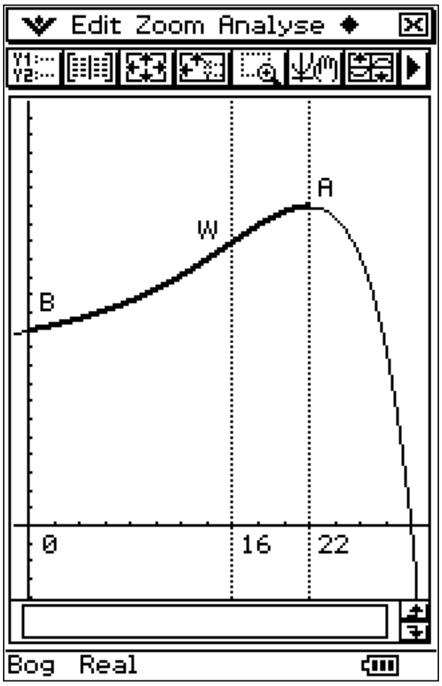
Kontrolle im GTR(CAS):
fMax(f(x),x) ergibt {MaxValue=8.970867538,x=22}

Definitionsbereich der Skipiste zwischen A und B: Df = [0; 22]

Höhendifferenz der Skipiste: f(22)-f(0) = 8,97087-5,47367 = 3,4972 = 349,72m

Kontrolle im GTR(CAS):
f(22)-f(0) ergibt 3.497194047

Skizze



Pflichtaufgabe 1.2

geg. Verlauf von A nach B
ges. Verlauf des Anstieges beschreiben

Lösung:
Start in A waagerecht (Anstieg Null), dann geht es bergab und immer steiler,
nach kurzem Verlauf (Wendepunkt passiert) wird es jedoch wieder flacher (Anstieg nimmt wieder ab).
Im Wendepunkt ist der Anstieg (Abfahrt) am steilsten (Wendepunkt ist der Extremwert der positiven Ableitung).

ges. durchschnittliche Hangneigung
(Hinweis: Hangneigung 40% bedeutet z.B.: auf 100m Entfernung 40m Höhenunterschied)

tan(α) = 40/100 = 0.40 = 40%,
d.h. Neigung ist der tan-Wert des Anstiegswinkels α an der Stelle x.
Andererseits gilt tan(α) = f'(x).

Lösung:
Wir berechnen den Mittelwert aller f'(x) über dem Intervall 0≤x≤22 (Integralmittel):
(1/22)×∫(f'(x),x,0,22) = (f(22)-f(0))/22 ≈ (350m/2200m)×100% = 15,9%

Kontrolle im GTR(CAS):

1/22*∫(diff(f(x),x,1),x,0,22) ergibt 0.1589633658
350/2200 ergibt 0.1590909091

ges. maximale Hangneigung, Begründung für maximale Hangneigung als Pistenkriterium

Lösung:
f''(x)=0 ergibt den Extremwert der 1.Ableitung (= maximaler Anstieg)
Die Stelle mit maximaler Hangneigung ist die gefährlichste (steilste) Stelle der Piste.

f'(x) = e^((x/6)-2)×((22/48)-(x/48)), s.o.,
hieraus
f''(x) = e^((x/6)-2)×(1/6)×((22/48)-(x/48)) + e^((x/6)-2)×(-1/48)
= e^((x/6)-2)×(16/(6×48)-x/(6×48)) = 0,

somit x=16 als Stelle der stärksten Hangneigung.

Es gilt f'(16) = e^((16/6)-2)×((22/48)-(16/48)) = e^(2/3)×(1/8) = 0,2435 = 24,35% < 25%

Kontrolle im GTR:
e^(2/3)*1/8 ergibt 0.2434667551
fMax(e^(x/6-2)*(22/48-x/48),x) ergibt {MaxValue=0.2434667551,x=16}

ges. Schwierigkeitsgrad der Piste

Lösung: Wegen f'(16) < 25%, s.o., handelt es sich um eine blaue Piste für Anfänger.

Pflichtaufgabe 1.3 (mit CAS)

geg. $f_{a,b}(x)$ = e^((x/6)-2)×((7/2)-a×x)+b, a,b∈R, a,b>0, x∈$Df_{a,b}$
Skipiste zwischen $P_{a,b}$ und $Q_{a,b}(0;f_{a,b}(0))$. $P_{a,b}$ ist lokaler Extrempunkt (Maximum)
(1 Einheit wieder 100m)

ges. Bedeutung von Parameter b (Erläuterung)

Lösung:
b ist eine additive Konstante, die zunächst eine feste Höhe b vorgibt und die Profillinie vertikal um b verschiebt.

ges. Parameter a,b derart, dass I. und II. gelten:
I. $Q_{a,b}$ hat genau 300m Höhe, d.h. $f_{a,b}(0)=3$
II. x_w = 2 (Wendestelle der Profillinie)

Lösung:

$f_{a,b}(0)$ = e^(-2)×(7/2)+b = 3 ergibt **b = 3-e^(-2)×(7/2) = 2,5263**

Kontrolle im GTR:
3-e^(-2)*7/2 ergibt 2.526326509

Weiter:

$f'_{a,b}(x)$ = e^((x/6)-2)×(1/6)×((7/2)-a×x)+e^((x/6)-2)×(-a) = e^((x/6)-2)×((7/12)-a-(a/6)×x)
= e^(x/6)-2)×((7-12a)/12-(a/6)×x)

hieraus

$f''_{a,b}(x)$ = e^((x/6)-2)×(1/6)×((7-12a)/12-(a/6)×x)+e^((x/6)-2)×(-a/6)
= e^((x/6)-2)×((7-12a)/72-a/6-(a/36)×x) = 0 für x=2

somit

((7-12a)/72)-(a/6)-(a/36)×2 = 0 und 7-12a-12a-4a = 0, d.h. 28a = 7 und **a = 1/4**.

Kontrolle im GTR:
Define f(a,b,x)=e^((x/6)-2)×((7/2)-a×x)+b
done
solve(f(a,b,0)=3,b) ergibt {b=3-7*e^(-2)/2}
approx(ans) ergibt {b=2.526326509}
diff(f(a,b,x),x,2)=0|x=2 ergibt (7*e^(-5/3)-28*a*e^(-5/3))/72 = 0
solve(ans,a) ergibt {a=1/4}

Pflichtaufgabe 1.4

geg. Vierer-Sessel-Lift mit 72% Skifahrern und 28% Snowbordern besetzt
(Jeder Sessel sei voll besetzt)

ges. Wahrscheinlichkeit für A={genau drei der 4 Sessel mit Skifahrern besetzt}

Lösung:
P(A) = nCr(4,3)×0.72^(3)×0.28 = binomialPDf(3,4,0.72) = 0,418

Kontrolle im GTR:
binomialPDf(3,4,0.72) ergibt 0.41803776

ges. Wahrscheinlichkeit für B={im Vierersessel sitzen höchsten zwei Snowborder}

Lösung:
P(B) = ∑(nCr(4,i)×0.28^(i)×0.72^(4-i),i,0,2) = binomialCDf(2,4,0.28) = 0.9306

Kontrolle im GTR:
binomialCDf(2,4,0.28) ergibt 0.93063168

ges. mittlere Besetzung mit Snowbordern in 20 Vierersesseln

Lösung:

Sei X die zufällige Anzahl der Snowborder in einem Vierersessel:
$X \in \{0,1,2,3,4\}$, X ist B(4,0.28)-verteilt.
Somit E(X) = n×p = 4×0.28 = 1.12
Dann ist $E(X_1+X_2+...+X_{20}) = E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_{20}) = 20\times E(X) = 20\times 1.12 = 22.4$

Die mittlere Besetzung in 20 Sesseln mit Snowbordern beträgt 22,4.

Sachsen 2010 Abitur Mathematik-Grundkurs(GK)-Muster

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (mit Taschenrechner)

Aufgabe 1: Analysis, Stochastik

geg. Profillinie einer Skipiste: f(x) = e^((x/6)-2)×((7/2)-(x/8))+5, x∈Df,
zwischen den Punkten A und B(0;f(0))
(Funktionswerte f(x) geben Meeresspiegelhöhe an, 1 Einheit = 100m)
A ist Maximumpunkt der Funktion

Pflichtaufgabe 1.1

ges. Koordinaten von A und B, Definitionsbereich der Skipiste, Höhendifferenz der Skipiste

Lösung:
f(0) = e^(-2)×((7)/(2))+5 = 5,47367 = 547,367m
Damit gilt für B: B(0; 5,47367).

Kontrolle im GTR(CAS):
Define f(x)=e^((x/6)-2) × ((7/2)-(x/8)) + 5
done
f(0) ergibt 5.473673491

Extremwertsuche:
f'(x) = e^((x/6)-2)×(1/6)×((7/2)-(x/8)) + e^((x/6)-2)×(-1/8) = e^((x/6)-2)×((7/12)-(x/48)-1/8) = 0, d.h.
(7/12) - (x/48) - 1/8 = 0 |×48
28-x-6=0

hieraus folgt x = $x_{\mathbf{max}}$ = 22.

x=22 ist Maximumstelle, da für x+epsilon die Ableitung negativ und für x-epsilon die Ableitung positiv wird (epsilon>0, nahe Null).

f(22) = e^((22/6)-2)×((7/2)-(22/8))+5 = e^(5/3)×(3/4)+5 = 8,97087 = 897,087m.

Damit gilt für A: A(22; 8,97087).

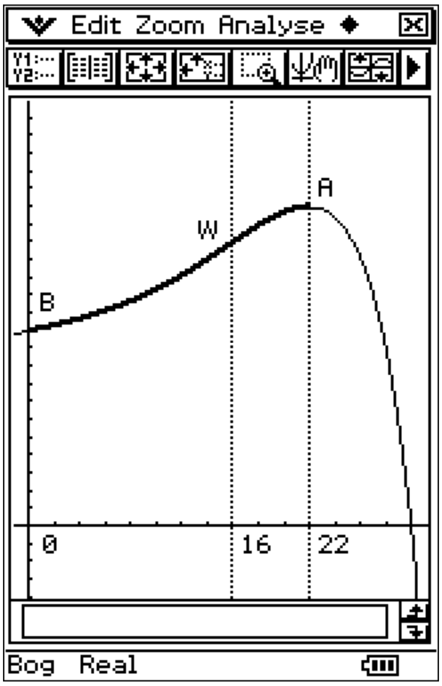
Kontrolle im GTR(CAS):
fMax(f(x),x) ergibt {MaxValue=8.970867538,x=22}

Definitionsbereich der Skipiste zwischen A und B: Df = [0; 22]

Höhendifferenz der Skipiste: f(22)-f(0) = 8,97087-5,47367 = 3,4972 = 349,72m

Kontrolle im GTR(CAS):
f(22)-f(0) ergibt 3.497194047

Skizze



Pflichtaufgabe 1.2

geg. Verlauf von A nach B
ges. Verlauf des Anstieges beschreiben

Lösung:
Start in A waagerecht (Anstieg Null), dann geht es bergab und immer steiler,
nach kurzem Verlauf (Wendepunkt passiert) wird es jedoch wieder flacher (Anstieg nimmt wieder ab).
Im Wendepunkt ist der Anstieg (Abfahrt) am steilsten (Wendepunkt ist der Extremwert der positiven Ableitung).

ges. durchschnittliche Hangneigung
(Hinweis: Hangneigung 40% bedeutet z.B.: auf 100m Entfernung 40m Höhenunterschied)

tan(α) = 40/100 = 0.40 = 40%,
d.h. Neigung ist der tan-Wert des Anstiegswinkels α an der Stelle x.
Andererseits gilt tan(α) = f'(x).

Lösung:
Wir berechnen den Mittelwert aller f'(x) über dem Intervall 0≤x≤22 (Integralmittel):
(1/22)×∫(f'(x),x,0,22) = (f(22)-f(0))/22 ≈ (350m/2200m)×100% = 15,9%

Kontrolle im GTR(CAS):

1/22*∫(diff(f(x),x,1),x,0,22) ergibt 0.1589633658
350/2200 ergibt 0.1590909091

ges. maximale Hangneigung, Begründung für maximale Hangneigung als Pistenkriterium

Lösung:
f''(x)=0 ergibt den Extremwert der 1.Ableitung (= maximaler Anstieg)
Die Stelle mit maximaler Hangneigung ist die gefährlichste (steilste) Stelle der Piste.

f'(x) = e^((x/6)-2)×((22/48)-(x/48)), s.o.,
hieraus
f''(x) = e^((x/6)-2)×(1/6)×((22/48)-(x/48)) + e^((x/6)-2)×(-1/48)
= e^((x/6)-2)×(16/(6×48)-x/(6×48)) = 0,

somit x=16 als Stelle der stärksten Hangneigung.

Es gilt f'(16) = e^((16/6)-2)×((22/48)-(16/48)) = e^(2/3)×(1/8) = 0,2435 = 24,35% < 25%

Kontrolle im GTR:
e^(2/3)*1/8 ergibt 0.2434667551
fMax(e^(x/6-2)*(22/48-x/48),x) ergibt {MaxValue=0.2434667551,x=16}

ges. Schwierigkeitsgrad der Piste

Lösung: Wegen f'(16) < 25%, s.o., handelt es sich um eine blaue Piste für Anfänger.

Pflichtaufgabe 1.3 (ohne CAS)

geg. ganzrationale Funktion g (Polynom) zwischen A und B mit Wendepunkt zwischen A und B

ges. Mindestgrad der ganzrationalen Funktion g

Lösung:
mindestens 3. Grades, da die 2. Ableitung g'' nicht konstant sein darf:
diese Ableitung muss einen Vorzeichenwechsel zulassen, d.h. 2. Ableitung mindestens 1.Grades, d.h. Ausgangsfunktion g mindestens 3. Grades.

ges. eine Gleichung g (Polynom)

Lösung:

Wie oben sei	f(x)=e^((x/6)-2)×((7/2)-(x/8))+5	
und	f(0)=5.473673491, d.h.	**B(0; 5,47367)**
sowie	f(22)=8.970867538, d.h.	**A(22; 8,97087)**
und	f(16)=7.921601062, d.h.	**P_w(16;7,9216)**

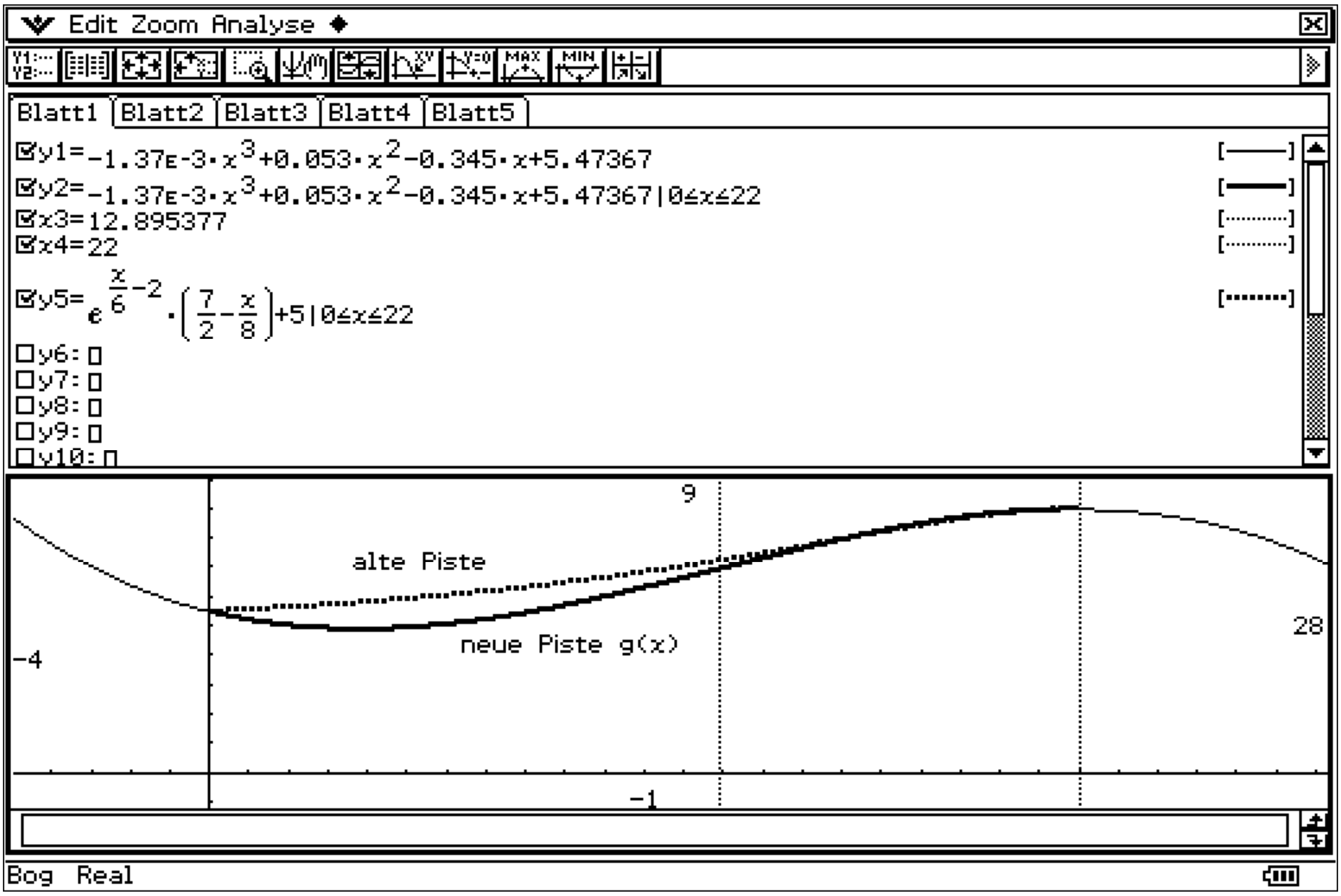
Rechnung im GTR:
e^(x/6-2)*(7/2-x/8)+5|x=16 ergibt 7.921601062

Ansatz für g:
g(x) = a*x^3+b*x^2+c*x+d
Bedingungen
g(0) = 5.473673491 (1)
g(16) = 7.921601062 (2)
g(22) = 8.970867538 (3)
g'(22) = 3a×x^(2)+2b×x+c|x=22 = 0 (4)
g"(16) = 6a×x+2b|x=16 = 0 (5)

Damit haben wir fünf Bedingungen zur Bestimmung der 4 Unbekannten a,b,c,d.
(1),(3) und (4) sollten erfüllt sein

Kontrolle im GTR(CAS): mit (1),(2),(3),(4)
Define g(x)=a×x^3+b×x^2+c×x+d
done
solve({g(0)=5.473673491,g(16)=7.921601062,g(22)=8.970867538,3*a*x^2+2*b*x+c=0|x=22},
{a,b,c,d})
ergibt
{a=-1.370042717E-3,b=0.05305627199,c=-0.3451739433,d=5.473673491}

Skizze der Funktion g(x) mit (1),(2),(3),(4)

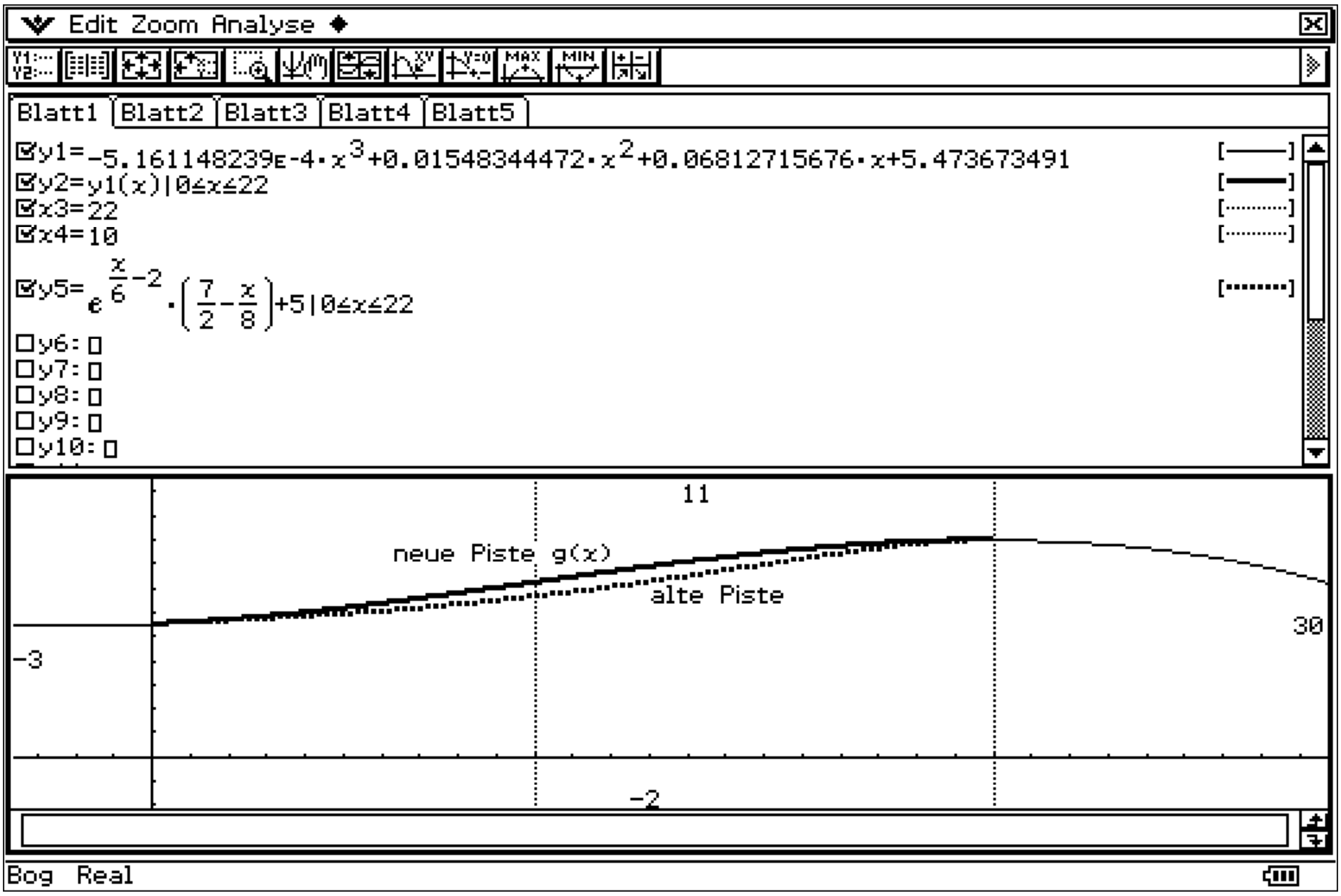


Das Schaubild der Funktion ist nicht streng monoton im betrachteten Intervall. Der Wendepunkt liegt bei 12,9.
Wird der Wendepunkt nach links verlegt, z.B. auf x=10, liegt das erkennbare lokale Minimum schließlich außerhalb des betrachteten Intervalls:

Kontrolle im GTR(CAS): mit (1),(3),(4),(5 mit x=10)

solve({g(0)=5.473673491,g(22)=8.970867538,3*a*x^2+2*b*x+c=0|x=22,6*a*x+2*b=0|x=10},
{a,b,c,d})
ergibt
{a=-5.161148239E-4,b=0.01548344472,c=0.06812715676,d=5.473673491}

Skizze der Funktion g(x) mit (1),(3),(4),(5 mit x=10)



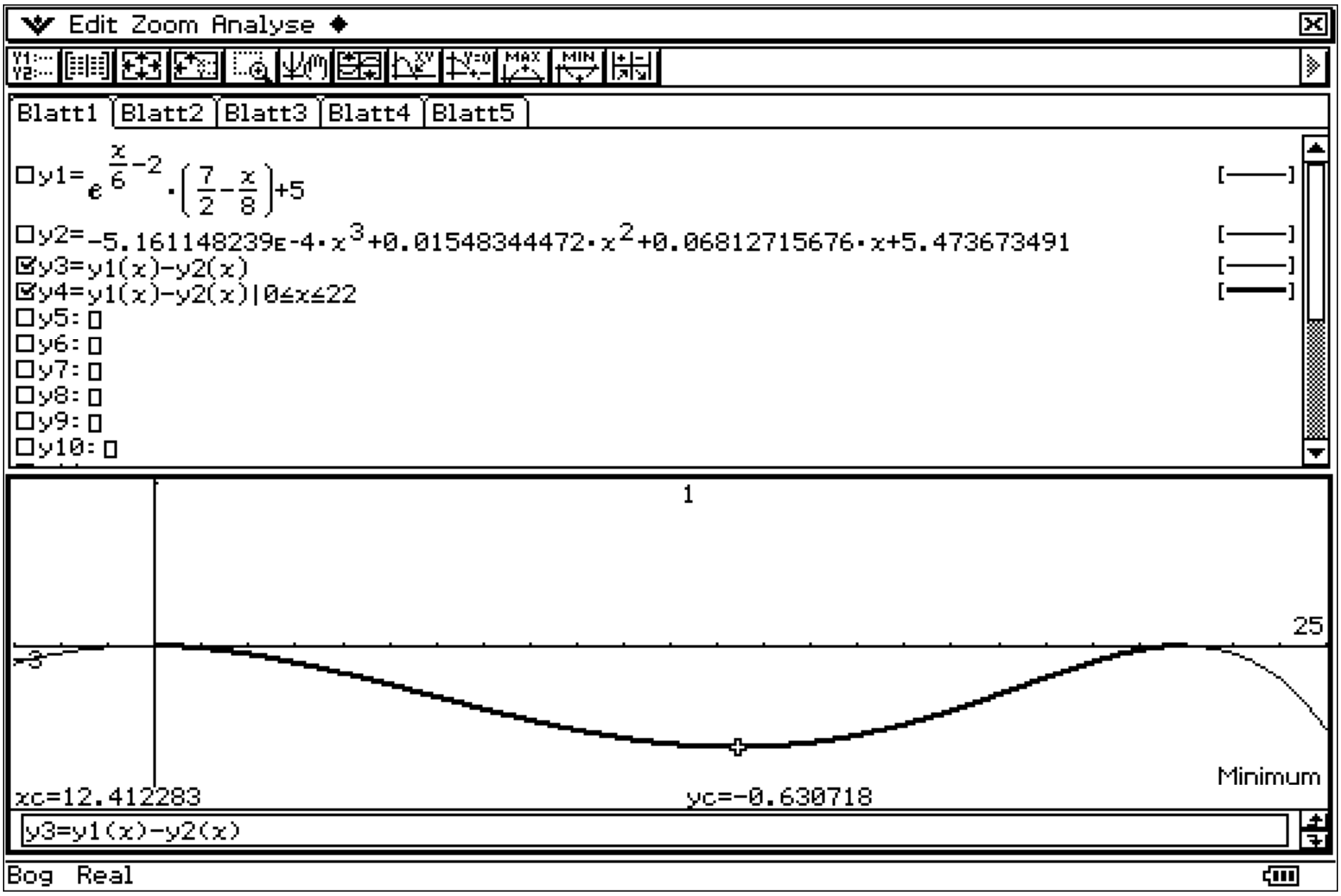
Damit erfüllt z.B. die Funktion
g(x)=-5.161148239E-4*x^3+0.01548344472*x^2+0.06812715676*x+5.473673491|0≤x≤22
im betrachteten Intervall die wesentlichen Forderungen an die Piste.

ges. maximaler Höhenunterschied zwischen f(x) und g(x)

Lösung:
f(x)-g(x) betrachten.

Skizze der Differenz f(x)-g(x), s.u.

An der Stelle xc=12.41228307849 erkennt man die maximale Differenz
von 0.630718095743 = 63m.



Pflichtaufgabe 1.4

geg. Vierer-Sessel-Lift mit 72% Skifahrern und 28% Snowbordern besetzt
(Jeder Sessel sei voll besetzt)

ges. Wahrscheinlichkeit für A={genau drei der 4 Sessel mit Skifahrern besetzt}

Lösung:
P(A) = nCr(4,3)×0.72^(3)×0.28 = binomialPDf(3,4,0.72) = 0,418

Kontrolle im GTR:
binomialPDf(3,4,0.72) ergibt 0.41803776

ges. Wahrscheinlichkeit für B={im Vierersessel sitzen höchsten zwei Snowborder}

Lösung:
P(B) = ∑(nCr(4,i)×0.28^(i)×0.72^(4-i),i,0,2) = binomialCDf(2,4,0.28) = 0.9306

Kontrolle im GTR:
binomialCDf(2,4,0.28) ergibt 0.93063168

ges. mittlere Besetzung mit Snowbordern in 20 Vierersesseln

Lösung:

Sei X die zufällige Anzahl der Snowborder in einem Vierersessel:
$X \in \{0,1,2,3,4\}$, X ist B(4,0.28)-verteilt.
Somit $E(X) = n \times p = 4 \times 0.28 = 1.12$
Dann ist $E(X_1+X_2+...+X_{20}) = E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_{20}) = 20 \times E(X) = 20 \times 1.12 = 22.4$

Die mittlere Besetzung in 20 Sesseln mit Snowbordern beträgt 22,4.

Sachsen 2010 Abitur Mathematik-Grundkurs(GK)-Muster

Lösungen mit GTR-Unterstützung (ClassPad und Hinweise auf das CAS)

(Reine Rechnungen können im Main-Menü erfolgen, im eActivity-Menü können zusätzlich zu den Rechenschritten auch reine Texte und spezielle Arbeitsfenster mit eingebunden werden.)

Pflichtaufgaben
Teil B: (mit Taschenrechner)

Aufgabe 2 (Algebra, Stochastik)

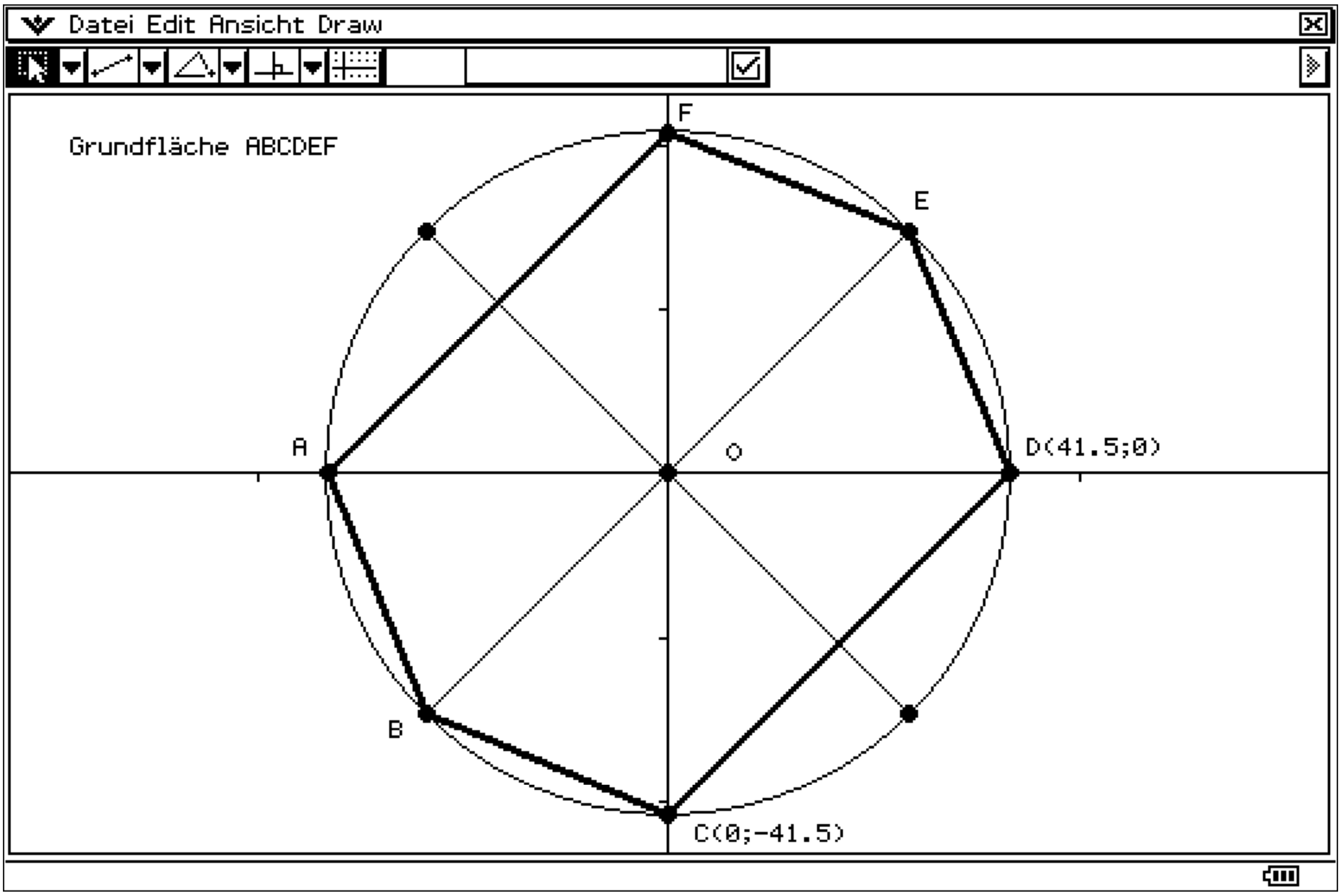
geg. geometrischer Körper gemäß Abbildung (1 Einheit = 1m)
Grundfläche 6-Eck mit Eckpunkten auf einem regelmäßigen 8-Eck, wobei zwei gegenüberliegende Ecken fehlen.

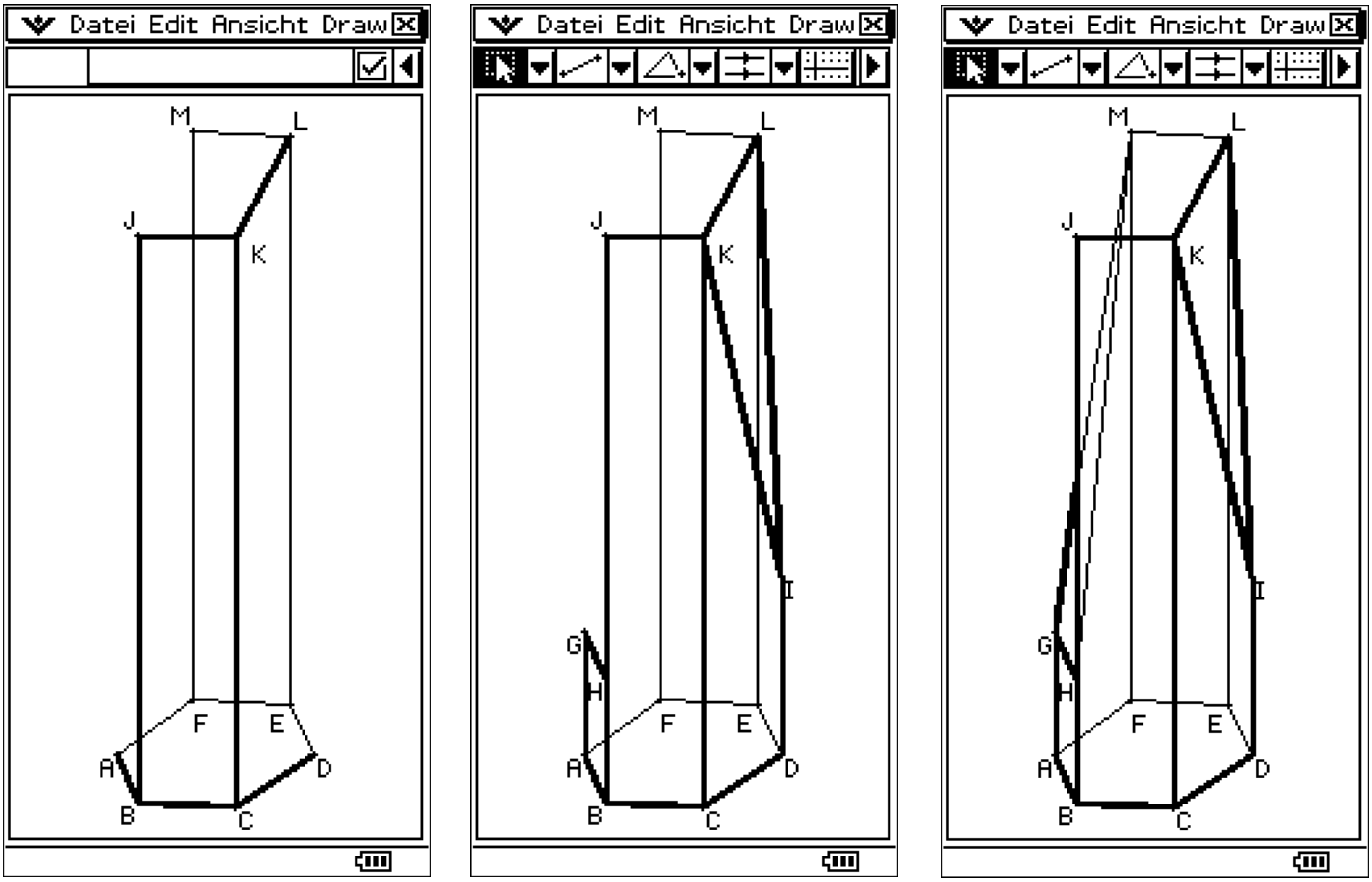
Grundkörper: Quader BCEFJKLM
aufgesetzt: Prisma JKLMNP
seitlich angesetzt: Pyramide CDEIKL und Pyramide ABFGHM

Mittelpunkt des 8-Ecks im Koordinatenursprung
Dachfirst: NP senkrecht über Koordinatenursprung und parallel zu Kante BC

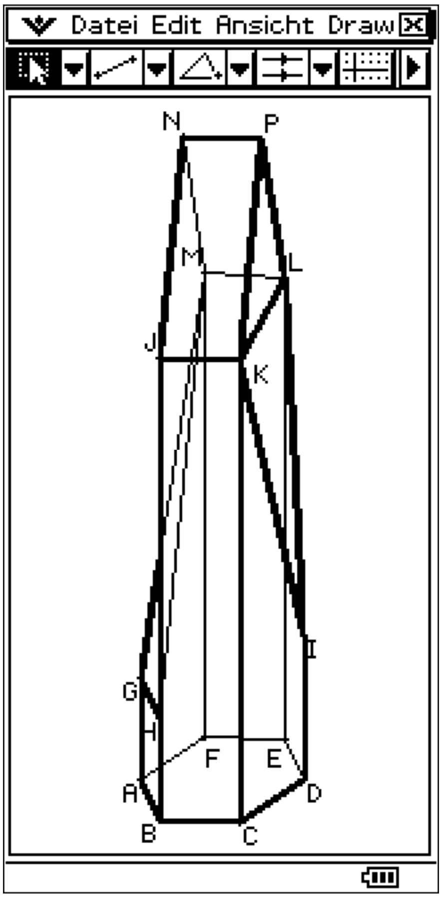
bekannt: B, C, G, H, I, K, L, s.u.

Grundfläche ABCDEF:





Konstruktion des Quaders BCEFJKLM mit den seitlichen Pyramiden CDEIKL und ABFGHM als Anbau sowie dem Prisma JKLMNP als Dachaufbau



bekannt:

C(0;-41.5;0), D(41.5;0;0) in 0,00m Höhe (Grundfläche),

G(-41.5;0;35), H(-29.4;-29.4;35) in 35,00m Höhe,

I(41.5;0;50) in 50,00m Höhe,

K(0;-41.5;155.5), L(0;41.5;155.5) in 155,50m Höhe.

Pflichtaufgabe 2.1

geg. Pyramidenspitze M endet in 71% der Gesamthöhe

ges. Gesamthöhe

Lösung:

$z_m = 155{,}50\text{m} = z_n \times 0{,}71$,

somit $z_n = 155{,}50/0{,}71 = 219{,}014 \approx 219\text{m}$

Rechnung im GTR:

155.5/0.71 ergibt 219.0140845

ges. Nachweis, dass P(14,7;-6,1;219,0) gilt

Lösung:

Bestimmung von E, um 45° um O gedreht (Radius 41.5):
E(41.5×cos(45°);41.5×sin(45°);0) = E(29.3;29.3;0)

Da E jedoch unterhalb von L(29.4;29.4;155,5) liegt, nutzen wir dessen Koordinaten:
E(29.4;29.4;0)

Nun bestimmen wir den Mittelpunkt von C und E (Lotfußpunkt von P in x-y-Ebene):
(1/2)×(C+E) = (1/2)×((0;-41.5;0)+(29.4;29.4;0)) = (14,7;-6.05;0)

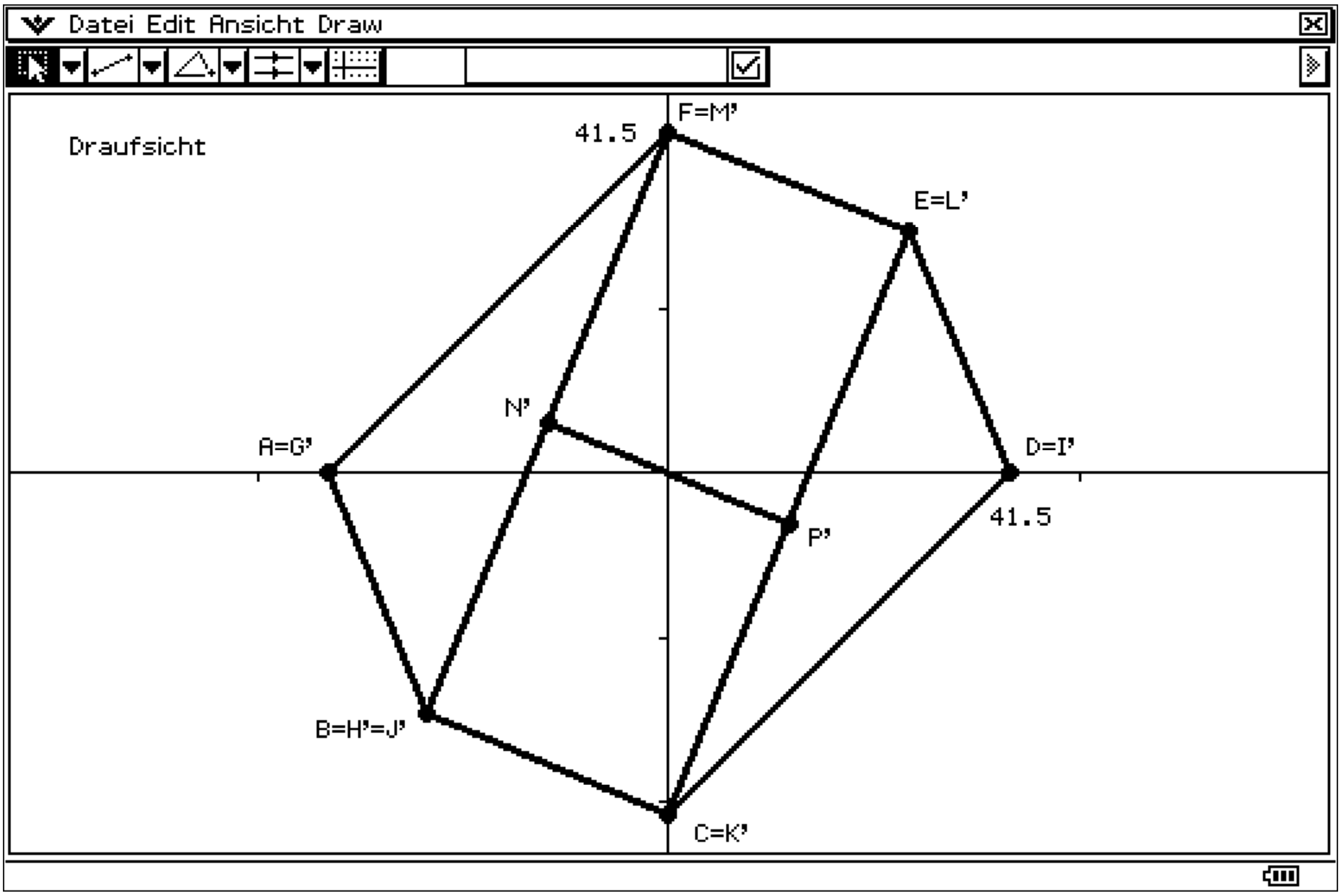
Damit hat P die Koordinaten P(14,7;-6,1;219), wobei die mittlere Koordinate aufgerundet wurde.

Rechnung im GTR:
41.5*cos(45°) ergibt 29.34493142 und 41.5*sin(45°) ergibt 29.34493142
1/2*([[0,-41.5,0]]+[[29.4,29.4,0]]) ergibt [[14.7,-6.05,0]]

ges. Koordinaten aller weiteren Eckpunkte und Draufsicht des Gebäudes (maßstäblich)

Lösung:

A(-41.5;0;0), darüber G(-41.5;0;35), **B(-29.4;-29.4;0)**, darüber H(-29.4;-29.4;35),
E(29.4;29.4;0), s.o., gegenüber von B(-29.4;-29.4;0), **F(0;41.5;0)**, darüber M(0;41.5;155.5),
J(-29.4;-29.4;155.5) in Höhe von K(0;-41.5;155.5) und über B(-29.4;-29.4;0),
N in der Mitte zwischen B und F mit zn=219, d.h.
N(((-29.4)/(2));((-29.4+41.5)/(2));219) = N(-14.7;6.05;219) ≈ **N(-14.7;6.1;219)**
P in Mitte zwischen C und E mit zp=219, d.h. **P(14,7;-6,1;219)**, s.o.



Pflichtaufgabe 2.2

ges. Nachweis eines Quadrates mit Eckpunkten im Grundriss

Lösung:

ACDF bilden ein Quadrat, denn es handelt sich um jeden zweiten Eckpunkt im regelmäßigen 8-Eck. A,C,D,F liegen auf den orthogonalen Koordinatenachsen jeweils mit Abstand 41.5 vom Koordinatenursprung.

rechnerisch:
$\|AC\| = \|CD\| = \|DF\| = \|FA\| = 41.5\times\sqrt{2}$ (gleiche Seitenlängen)
und
rechte Winkel: $\angle(FAC) = \angle(ACD) = \angle(CDF) = \angle(DFA) = 90°$

Kontrolle mit GTR:

[[-41.5,0,0]]⇒A
[[0,-41.5,0]]⇒C
[[41.5,0,0]]⇒D
[[0,41.5,0]]⇒F

norm(C-A) ergibt 83*(2)^(1/2)/2
norm(D-C) ergibt 83*(2)^(1/2)/2
norm(F-D) ergibt 83*(2)^(1/2)/2
norm(A-F) ergibt 83*(2)^(1/2)/2

dotP(F-A,C-A) ergibt 0
dotP(A-C,D-C) ergibt 0
dotP(C-D,F-D) ergibt 0
dotP(D-F,A-F) ergibt 0

Skalarprodukt 0 bedeutet rechter Winkel.

Pflichtaufgabe 2.3

ges. Nachweis einer Ebenengleichung E_{KLI} in der Form
-7479.95*x+3101.7*y-1722.25*z=-39653.425

Lösung:

eine Parameterdarstellung ist
x(s,t) = OK + s×KL + t×KI, s,t∈R

Normalenvektor KL×KI = [[a],[b],[c]] = [[-7479.950],[3101.700],[-1722.250]] = n_1

Ebenengleichung: ax+by+cz=d mit d=[[a],[b],[c]]▫OK = -396530.425

Rechnung im GTR:

[[0,-41.5,155.5]]⇒K

[[29.4,29.4,155.5]]⇒L
[[41.5,0,50]]⇒I

crossP(L-K,I-K)⇒n1 ergibt [[-7479.95,3101.7,-1722.25]]
dotP(n1,K)⇒d ergibt -396530.425

ges. Untersuchung der Orthogonalität der Ebenen $E_{\mathbf{KLI}}$ und $E_{\mathbf{GHM}}$

Lösung:

ein Normalenvektor der Ebene $E_{\mathbf{GHM}}$ ist
$GH \times GM = n_2$

Rechnung im GTR:

[[-41.5,0,35]]⇒G
[[-29.4,-29.4,35]]⇒H
[[0,41.5,155.5]]⇒M

crossP(H-G,M-G)⇒n2 ergibt [[-3542.7,-1458.05,1722.25]]
dotP(n1,n2) ergibt 19010640.12

Damit besteht keine Orthogonalität zwischen den betrachteten Ebenen.

Pflichtaufgabe 2.4

geg. für I (alte Version) sollte gelten D=I: Ebene $E_{\mathbf{KLD}}$
ges. Schnittwinkel der alten und der neuen Ebene: $E_{\mathbf{KLD}}$ und $E_{\mathbf{KLI}}$

Lösung:

$KL \times KI = n_1$ = [[-7479.950],[3101.700],[-1722.250]], s.o.
und
$KL \times KD = n_3$ = [[-11024.95],[4571.7],[-1722.25]]

Rechnung im GTR:

K ist [[0,-41.5,155.5]]
L ist [[29.4,29.4,155.5]]
D ist [[41.5,0,0]]
crossP(L-K,D-K)⇒n3 ergibt [[-11024.95,4571.7,-1722.25]]
n1 ist [[-7479.95,3101.7,-1722.25]]

Schnittwinkel:
dotP(n1,n3)/(norm(n1)*norm(n3)) ergibt 0.9978059465
$\cos^{-1}$(ans) ergibt 3.796126526
Der Schnittwinkel beträgt 3,8°.

ges. prozentuale Verkleinerung der alten zur neuen Dreiecksfläche, d.h. ΔKLD zu ΔKLI

Lösung:

Dreiecksfläche ist die halbe Parallelogrammfläche, aufgespannt durch die Vektoren KL und KI bzw. KL und KD.
Weiter: Parallelogrammfläche = Norm des Kreuzproduktvektors ‖KL×KI‖ bzw.‖KL×KD‖

Rechnung im GTR:
[[41.5,0,50]]⇒I
1/2*norm(crossP(L-K,I-K))⇒Fneu ergibt 4139.333882
1/2*norm(crossP(L-K,D-K))⇒Falt ergibt 6029.430082
solve(Falt*x=Fneu,x) ergibt {x=0.6865215826}
1-0.6865215826 ergibt 0.3134784174

Kosteneinsparung 31,3%, da die neue Fläche nur noch 68,7% der alten Fläche ausmacht.

Pflichtaufgabe 2.5

geg. 20m^2 Glas ersetzen mit quadratischen Glasscheiben zu 0,25m^2 (d.h. 80 Scheiben zu ersetzen), Verschnitt 10%, d.h. 0,25-0,025 = 0,225m^2 wirksame Scheibe.

20/0,225 = 88,89 ≈ 89 Scheiben müssten vorgehalten werden, wenn es keine Ausschussscheiben gäbe.

Ausschusswahrscheinlichkeit für eine Scheibe 1-p = 0,005

ges. Mindestbestellmenge, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% ausreichend viele Glasscheiben für die Reparatur vorhanden sind.

Lösung:

Bernoullischema mit p = 0.995, Ansatz für n Scheiben
S_n sei die zufällige Anzahl der fehlerfreien Scheiben unter n Scheiben.

Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur 0.5 (zentraler Grenzwertsatz):

$P(S_n \geq 89) = 1 - P(S_n \leq 88) \approx 1 - \varphi((88.5-n\times p)/\sqrt{(n\times p\times(1-p))}) \geq 0.99$
hieraus
$\varphi((88.5-n\times p)/\sqrt{(n\times p\times(1-p))}) \leq 0.01 = \varphi(z_{0.01})$, $z_{0.01}$ ist das Quantil der Ordnung 0.01

$z_{0.01}$ = invNormCDf("L",0.01,1,0)

Damit

$(88.5-n\times p)/\sqrt{(n\times p\times(1-p))} \leq z_{0.01}$

Auflösung nach n ergibt den notwendigen Umfang n der Bestellung.

Rechnung im GTR:

invNormCDf("L",0.01,1,0) ergibt -2.326347874
solve((88.5-n*0.995)/(n*0.995*(1-0.995))^(1/2)=-2.326347874,n) ergibt {n=90.51365945}

Damit sind n=91 Scheiben zu bestellen.

exakte Rechnung:

1-binomialCDf(88,91,0.995) ergibt 0.9890489946
1-binomialCDf(88,92,0.995) ergibt 0.9987694555

Damit wird erst mit **n=92** die geforderte Mindestwahrscheinlichkeit von 99% erreicht.
(Der zentrale Grenzwertsatz ergab lediglich eine Näherungslösung, die abschließend präzisiert wurde.)