Simulation von Zufallsexperimenten mit dem Utility "WUERFELN"

Was man weiß, was Schüler/in wissen sollte. Check-Up zu Begriffen und Schreibweisen.

Wenn man ein Zufallsexperiment häufig wiederholt, liefern die ermittelten relativen Häufigkeiten gute Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten (Empirisches Gesetz der großen Zahlen). Bei der Simulation geht es darum, etwas über die Wahrscheinlichkeiten in Erfahrung zu bringen, ohne Zufallsexperimente real ablaufen zu lassen. Würfel mit n Seitenflächen und den aufgedruckten Zahlen 1 bis n können dazu z.B. mit der Option“Augensumme“ bzw. „Produkt der Augenzahlen“ dienen. Zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten benötigt man i.d.R. folgendes:
Summenregel, Komplementärregel, Laplace-Experimente, beide Pfadregeln im Baumdiagramm.

Gib - soweit möglich - alle Ergebnisse exakt (einfache Dezimalbruch- oder Bruchdarstellung) an.
Mit "Su" ist die Summe und mit "Prod" das Produkt der Augenzahlen gemeint.

Aufgaben mit Minimalanforderungen
Simuliere das Zufallsexperiment und vergleiche die relativen Häufigkeiten mit den durch am Baumdiagramm oder andere elementare Überlegungen ermittelten Wahrscheinlichkeiten.

a) Gib eine Prognose ab: Eine Münze wird mehrfach geworfen. Wie oft erwartest du Wappen? (1 ≙ Zahl u. 2 ≙ Wappen beim Würfel mit 2 Seiten) und n = 50, 100, 500 Simulationen.
b) Gib eine Prognose ab: Zwei Würfel werden mehrfach geworfen. Wie oft erwartest du die Summe 6? (2 Würfel mit 6 Seiten) und n = 50, 100, 500 Simulationen.
c) Bestimme P(einmal „Z“ u. zweimal „W“) d.h. P(Su = 5) für einen Dreier-Münzwurf. (1 ≙ Zahl u. 2 ≙ Wappen beim Würfel mit 2 Seiten) und n = 50, 100, 500 Simulationen.
d) Bestimme P(zweimal „Z“ u. einmal „W“) d.h. P(Su = 4) für einen Dreier-Münzwurf. (1 ≙ Zahl u. 2 ≙ Wappen beim Würfel mit 2 Seiten) und n = 50, 100, 500 Simulationen.
e) Gib eine Prognose ab: Zwei Münzen werden mehrfach geworfen. Wie oft erwartest du WW? (1 ≙ Zahl u. 2 ≙ Wappen beim Würfel mit 2 Seiten) und n = 50, 100, 500 Simulationen.

Aufgaben mit Standardanforderungen
Simuliere das Zufallsexperiment und vergleiche die relativen Häufigkeiten mit den durch am Baumdiagramm oder andere elementare Überlegungen ermittelten Wahrscheinlichkeiten.

a) Gib eine Prognose: Ein Würfel wird 100-mal geworfen. Wie oft erwartest du eine drei?
b) Bestimme P(Z|Z|Z) d.h. P(Su = 3) für einen Dreier-Münzwurf. (1 ≙ Zahl u. 2 ≙ Wappen beim Würfel mit 2 Seiten) und n = 50, 100, 500 Simulationen:
c) Bestimme P(W|W|W) d.h. P(Su = 6) für einen Dreier-Münzwurf (1 ≙ Zahl u. 2 ≙ Wappen beim Würfel mit 2 Seiten) und n = 50, 100, 500 Simulationen.
d) Bestimme P(höchstens einmal “Z”), d.h. P(Prod = 4) + P(Prod = 8) beim Dreier-Münzwurf.

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

a) Wie kannst du vorgehen, um die Güte der Zufallszahlen deines GTR zu testen? Prüfe an einem selbst gewählten Beispiel.
b) Ein Ehepaar wünscht sich drei Töchter. Untersuche, ob sich P(genau drei Töchter) mit dem dreimaligen Würfeln (3 Würfel mit Augenzahlen 1 bis 4) über die Option Augensumme bzw. Augenprodukt simulieren lässt.
c) Simuliere die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Multiple-Choice-Test (5 Aufgaben mit je 3 vorgegebenen Antworten, nur eine davon ist richtig) mindestens zwei der fünf Fragen richtig zu haben, falls nur per Zufall angekreuzt wird.

Simulation von Zufallsexperimenten mit dem Utility "WUERFELN"

Falls nicht anders vorgegeben, löst du die Aufgaben so wie in den Unterrichtsbeispielen.
Durch die Dokumentation deines Lösungsweges wird immer deutlich, wie du selbst vorgegangen bist. Natürlich muss auch die Verwendung des eingeführten Rechners ersichtlich sein. Du findest hier deshalb nur die Endergebnisse oder mal einen Tipp für einen besonderen Lösungsweg.

LÖSUNGEN

Aufgaben mit Minimalanforderungen
Simuliere das Zufallsexperiment und vergleiche die ermittelten relativen Häufigkeiten mit den durch am Baumdiagramm oder durch andere Überlegungen ermittelten Wahrscheinlichkeiten.

a) Theoretisch 50 mal, da die Chance je 50% ist.
b) P(Su = 6) = 6/36 ≈ 13,8%.
c) P(einmal „Z“ u. zweimal „W“) = 3/8 = 37,5%.
d) P(zweimal „Z“ u. einmal „W“) = 3/8 = 37,5%.
e) P(W|W) = ¼ = 25%.

Aufgaben mit Standardanforderungen
Simuliere das Zufallsexperiment und vergleiche die ermittelten relativen Häufigkeiten mit den durch am Baumdiagramm oder durch andere Überlegungen ermittelten Wahrscheinlichkeiten.

a) P(„drei“) = 1/6 ≈ 16,7%.
b) P(Z|Z|Z) = $0{,}5^3$ = 1/8 = 12,5%.
c) P(W|W|W) = $0{,}5^3$ = 1/8 = 12,5%.
d) P(höchstens einmal “Z”) = 4/8 = 50%.

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

a) Individuelle Lösungen möglich. Etwa die Zahlen von 1 bis 10 über einen 10-seitigen Würfel simulieren und die ermittelten relativen Häufigkeiten für mehrere Gruppen addieren und mit 10% vergleichen.
b) Geht nicht, da z.B. (für M gelte 1, 2; für J gelte 3, 4) Su = 6 durch MMM oder JMM entstehen kann.
c) P(mind. 2 Richtige) ≈ 53,9%, individuelle Lösungen möglich.

Simulation von Zufallsexperimenten mit dem Utility "WUERFELN"

Hinweise zum Teacher-Tool "WUERFELN"
Das Utility bietet den schnellen Zugriff auf Simulationen mit Hilfe von Würfeln.
Die Flächen 1 bis n werden dabei mit den Zahlen 1 bis n belegt.
Eine Fläche des Würfels lässt sich „Zinken“, d.h. die Wahrscheinlichkeit kann für die zugehörige Zahl vorgegeben werden. Für die anderen Flächen gilt dann bzgl. der restlichen Prozentzahl die Gleichverteilung.

Erläuterungen zu den möglichen Einstellungen.
Anzahl der Flächen: Hier werden für einen n-Flächner die Zahlen von 1 bis n vergeben. Sinnvoll sind Werte bis zum Ikosaeder, also bis n = 20.

Anzahl der Würfel: Sie sollte nicht zu hoch (≤ 10) gewählt werden.

Anzahl der Würfe: Sie sollte – schon aus Zeitgründen – nicht zu hoch gewählt werden. Werte bis ca. 1500 sind praktikabel.

Hardwarebedingt (Displayanzeige des Histogramms) ist bei Wahl der Option „Augenprodukt“ die Bedingung $(\text{Anz. der Flächen}^{\text{Anz. der Würfel}}) \leq 125$ bzw. bei Wahl der Option „Augensumme“ die Bedingung (Anz. der Flächen · Anz. der Würfel) ≤ 125 als Einschränkung wirksam.

Wenn das Histogramm angezeigt wird, hat man mittels SHIFT F1 Zugriff auf die Histogrammdaten. Mit den Cursortasten "Rechts" oder "Links" kann man durch die Daten wandern.

Durch die einfache Dateneingabe kann das vorliegende Tool drei Dinge erleichtern:

- Die Erstellung eigener Arbeitsblätter
- Die innere Differenzierung
- Die Erstellung von Tests und Klassenarbeiten

Hinweise zum Einsatz des Arbeitsblattes
Um die Selbstkontrolle für die Schüler/innen zu ermöglichen, sind lediglich die Endlösungen angegeben. Damit wird kein irgendwie gearteter Lösungsgang bevorzugt und das Arbeitsblatt bleibt universell einsetzbar.

Bei den Aufgaben wurde vom Zinken kein Gebrauch gemacht.
Es ist sinnvoll, das Utility auch den Schülern zur Verfügung zu stellen.

Der Schwerpunkt liegt auf dem Modellierungsaspekt, wobei je nach Niveau das Modell mehr oder weniger stark vorgegeben ist.
Natürlich sind die relativen Häufigkeiten nicht reproduzierbar, sie schwanken im üblichen Rahmen. Durch Zusammen- und Zuarbeit mehrerer Gruppen lässt sich häufig die für Realexperimente ohnehin nicht realistische Bedingung n ≥ 10000 Simulationen erreichen. Ab hier werden die Schwankungen erträglich.
Bei Simulationszahlen oberhalb von 100 erscheint der Einstieg in das 1VAR-Menü sinnvoll, um die dort angebotenen statistischen Kennwerte für eine eindimensionale Stichprobe zu studieren.