Raindrop-Näherung für π

Was man weiß, was Schüler/in wissen sollte. Check-Up zu Begriffen und Schreibweisen.

Zur Bestimmung der Kreisfläche benötigt man die Zahl π. Sie ist das Symbol für eine irrationale Zahl, die weder ein periodischer Bruch noch ein abbrechender Dezimalbruch ist. Sinnvollerweise arbeitet man mit dem Symbol π oder mit einer Näherung für π, etwa $\pi \approx 3{,}141592$ bzw. bei Benutzung des Gleichheitszeichens $\pi = 3{,}141592....$
Als Formel für die Kreisfläche gilt: $A_{Kreis} = \pi \cdot r^2$. Dabei ist r der Radius des Kreises.

Führe das Programm "RAIN4PI" mehrfach aus und ergänze auf diese Weise die Tabelle.
Beachte, bei größeren Zahlen benötigt das Programm deutlich mehr Zeit!

Anzahl N der Tropfen	Anzahl T der Treffer	angezeigter Wert für die π-Näh.
100		
100		
100		
200		
400		
400		
600		
600		
800		
800		
1000		
1000		
2000		
2000		
4000		

Beim Betrachten der Tabelle fallen mehrere Dinge auf. Daraus ergeben sich Fragen.

Aufgaben mit Minimalanforderungen
a) Wo liegt bei dieser Simulation die Zufallskomponente?
b) Überlege und begründe, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt.
c) Warum sind die Trefferzahlen i.d.R. bei gleichem N nicht identisch?
d) Wie kann man vom Viertelkreisregen auf die Treffer beim Vollkreis schließen?

Aufgaben mit Standardanforderungen
a) Wie verändern sich die prozentualen T-Schwankungen für gleiche N-Werte?
b) Warum wird die Näherung für π bei größerem N nicht kontinuierlich besser?
c) Führe eine lineare Regression mit (N|T) durch und erläutere das (überraschende?) Ergebnis.
d) Was ist für π-Näh. zu erwarten, falls die Simulation für noch größere Werte von N läuft?

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad
a) Welche Formel wird wohl bei "RAIN4PI" für die π-Näherung mittels N und T benutzt?
b) Beschreibe, wie man π aus der Anzahl A(r) der Gitterpunkte annähern kann, die in einem Kreis vom Radius r liegen.
c) Führe eine lineare Regression mit den Daten (N|π-Näh.) aus und erläutere das Ergebnis für die Regressionsgerade.

Falls nicht anders vorgegeben, löst du die Aufgaben so wie in den Unterrichtsbeispielen. Durch die Dokumentation deines Lösungsweges wird immer deutlich, wie du selbst vorgegangen bist. Natürlich muss auch die Verwendung des eingeführten Rechners ersichtlich sein. Du findest hier deshalb nur die Endergebnisse oder mal einen Tipp für einen besonderen Lösungsweg.

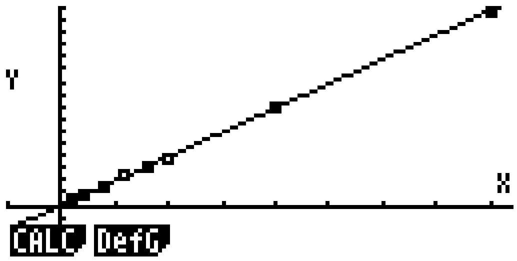
LÖSUNGEN

Aufgaben mit Minimalanforderungen

a) Es ist ein Zufallsversuch, da der Tropfen entweder in den Viertelkreis fällt oder nicht.
b) Es ist kein Laplace-Versuch, da Treffer und Niete nicht gleichwahrscheinlich sind.
c) Sonst wäre es kein Zufallsversuch.
d) Den Faktor 4 anwenden, da die Trefferquote sinnvollerweise proportional zur Fläche ist.

Aufgaben mit Standardanforderungen

a) Die prozentualen Schwankungen werden i.d.R. kleiner.
b) Durch den Zufallsregen ergeben sich immer mal wieder Schwankungen.



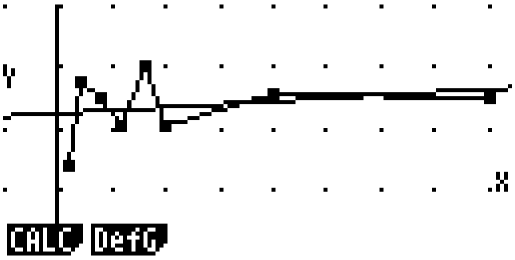
c) Die Datenpunkte (N|T) liegen optisch gut auf der Regressionsgeraden (z.B. y ≈ 0,78x - 1,5). Demnach steigt die Trefferanzahl im Mittel proportional zur der Regentropfenzahl an.

d) Der Näherungswert für π sollte im Mittel besser werden.

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

a) π ergibt sich aus dem Verhältnis der Treffertropfen zur allen gefallenen Tropfen.
$\pi \approx \frac{günstige}{mögliche} \cdot 4 = \frac{T}{N} \cdot 4$. Dies wird auch aus $A \approx \frac{T}{N} = \pi \cdot \frac{r^2}{4}$ und r = 1 deutlich.

b) Die Anzahl der Gitterpunkte ist gleichmäßig über das Quadrat verteilt. Die Zahl der Punkte innerhalb des Kreises im Verhältnis zur Zahl aller Punkte im Quadrat gibt annähernd das Flächenverhältnis wieder, falls der Radius r nicht zu klein ist. Konkret müssen also alle Gitterpunkte (x|y) per $y < \sqrt{(r^2 - x^2)}$ daraufhin überprüft werden, ob sie innerhalb des Kreises liegen. Ansonsten Rechnung wie bei b).



c)
Das Bild zeigt die Daten (N|π-Näh.) ergänzt um die Regressionsgerade (z.B. $y \approx 9{,}8 \cdot 10^{-6}x + 3{,}126$). Die extrem flache Steigung und die abnehmende Schwankung passen gut zur besser werdenden Näherung für die Zahl π.

Hinweise zum Teacher-Tool "RAIN4-PI"

Das Utility bietet die Möglichkeit Zufallsregen auf einem Viertelkreis zu simulieren.
Dabei lässt sich die Anzahl der Regentropfen in weiten Grenzen variieren. Der Modus Grafik-Zählen zeigt die Tropfen als Punkte an und zählt die Treffer. Oberhalb von 1000 Tropfen sollte aus Zeitgründen der reine Zählmodus gewählt werden.

Hinweise zum Einsatz des Arbeitsblattes

Das vorliegende Tool dient zunächst der Unterstützug bzw. Aufarbeitung der Methode „Simulation von Zufallsexperimenten".
Zusätzlich können einige wichtige Eigenschaften und Zusammenhänge dieser grundlegenden Methode erarbeitet werden. Die hier benutzte Formel zur Näherung von π können die Schülerinnen und Schüler i.d.R. mit geringen zusätzlichen Hilfestellungen finden.