Rechnungen an Parabeln

Was man weiß, was Schüler/in wissen sollte. Check-Up zu Begriffen und Schreibweisen.
Der Ansatz für eine quadratische Funktion in Normalform ist $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, $a \neq 0$. Die Graphen heißen Parabeln. Besondere Kennzeichen sind der Scheitelpunkt $S(x_s|y_s)$ und die Nullstellen. Jede Parabel hat einen Scheitelpunkt. Er ist entweder der höchste oder der tiefste Punkt der Parabel. Eine quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, eine oder keine Lösung. Jede Parabel lässt sich durch Verschiebung und zentrische Streckung/Stauchung aus der Normalparabel $y = x^2$ herstellen. Je nach Darstellungsform (Scheitelpunktform, Normalform, Faktorform) lassen sich Kennzeichen der Parabel direkt ablesen.

Aufgaben mit Minimalanforderungen
Bestimme bzw. benutze die Parabelgleichung und gib die Nullstellen und den Scheitelpunkt an.

a) $y = 2x^2 + 8x - 24$
b) $P(1|18)$, $Q(2|12)$ u. $R(-1|12)$
c) $y = 3x^2 - 6x + 2$
d) $P(1|0)$, $Q(-3|0)$ u. $R(2|10)$
e) $P(1{,}5|-4{,}25)$, $Q(2|-5)$ u. $R(-5|-40)$

Aufgaben mit Standardanforderungen

a) Ein Ball wird geworfen. Seine Flugbahn lässt sich – bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes – durch die Gleichung $y = -2/25\cdot x^2 + 8/5\cdot x$ (x und y in Metern) beschreiben.
Wie weit und wie hoch fliegt der Ball?
b) Martin möchte für sein Kanninchen ein rechteckiges Gehege aus 14 m Drahtzaun bauen. Es soll möglichst groß sein.
c) Von zwei Zahlen a und b soll eine um 4 kleiner sein als die andere. Bei welchen Zahlen ist ihr Produkt am kleinsten?
d) Beim Klippenspringen wird anhand von Markierungen folgende Messreihe erstellt:

Flugzeit in s	0	1	2
Höhe in m	45	43	31

Wie lang dauert der „Flug“?
Gewinnt der Springer kurzfristig noch an Höhe?

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

a) Untersuche die Parabelfamilie mit $f_a(x) = a\cdot x^2 - 2a\cdot x$, $a \in IR$.
Skizziere die Graphen für a = -2, a = 1 und a = 2. Nenne Gemeinsamkeiten u. Unterschiede. Beschreibe insbesondere die Lage der Scheitelpunkte.

b) Eine Parabelbrücke ist 12 m breit und an der höchsten Stelle 6 m hoch. Ein Trailer mit den Maßen Breite 9 m und Höhe 3,2 m möchte unter der Brücke durchfahren.

c) Von einer Raketenflugbahn (Abschuss aus einem Tal) kennt man drei besondere Punkte. Den höchsten Punkt oberhalb der Landebene in 27,8 km Höhe nach 40 Sekunden und zwei Punkte auf gleicher Höhe (20,8 km über Landebene nach 20 bzw. 60 Sekunden).
Aus welcher Tiefe erfolgte der Start und wie lange fliegt sie oberhalb der Landebene?

Rechnungen an Parabeln

Falls nicht anders vorgegeben, löst du die Aufgaben so wie in den Unterrichtsbeispielen. Durch die Dokumentation deines Lösungsweges wird immer deutlich, wie du selbst vorgegangen bist. Natürlich muss auch die Verwendung des eingeführten Rechners ersichtlich sein. Du findest hier deshalb nur die Endergebnisse oder mal einen Tipp für einen besonderen Lösungsweg.

LÖSUNGEN

Aufgaben mit Minimalanforderungen

Bestimme bzw. benutze die Parabelgleichung und gib die Nullstellen und den Scheitelpunkt an.

a) $S(-2|-32)$, $x_1 = 2$, $x_2 = -6$
b) $y = -3x^2 + 3x + 18$, $S(0{,}5|18{,}75)$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$
c) $S(1|-1)$, $x_1 = \sqrt{3}/3 + 1 \approx 1{,}577$, $x_2 = -\sqrt{3}/3 + 1 \approx 0{,}422$
d) $y = 2x^2 + 4x - 6$, $S(-1|-8)$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$
e) $y = -x^2 + 2x - 5$, $S(1|-4)$, keine NS

Aufgaben mit Standardanforderungen

a) $S(10|8)$, Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = 20$, demnach fliegt er 20 m weit.

b) Flächenansatz: $A = x\cdot(7 - x)$ mit $S(3{,}5|12{,}25)$, also $x = y = 3{,}5$ als Gehegemaße.

c) Produktansatz: $P = a\cdot(a - 4)$ mit $S(2|-4)$, also $a = 2$, $b = -2$.

d) Fluggleichung: $y = -5x^2 + 3x + 45$. $x_1 \approx -2{,}71$, $x_2 \approx 3{,}31$, demnach ca. 3,3 s Flugdauer. $S(0{,}3|45{,}45)$, also gewinnt er noch 45 cm an Höhe.

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

a) Die Nullstellen sind stets $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Mit dem Vorzeichen von a ändert sich die Art der Öffnung. Die Scheitelpunkte liegen bei $S(1|-a)$.
Damit liegen alle Hoch- bzw. Tiefpunkte auf auf der Parallelen zur y-Achse: $x = 1$.

b) Brückengleichung aus $f(0) = 6$, $f(-6) = f(6) = 0$ bei KoSy Mitte: $y = -1/6\cdot x^2 + 6$. Der Trailer passt nicht durch, denn die Durchfahrbreite in 3,2 m Höhe beträgt wegen $y(\pm 4{,}1) \approx 3{,}2$ nur ca. 8,2 m.

c) Flugbahn: $y = -7/400\cdot x^2 + 7/5\cdot x - 0{,}2$ mit $x_1 \approx 0{,}14$ u. $x_2 \approx 79{,}85$. Sie startet aus 200 m Tiefe (unterhalb der Landebene) und erreicht die Höhe der Landebene nach x_1 Sekunden.
Damit fliegt sie $\Delta x = x_2 - x_1$ Sekunden – ca. 79,7 Sekunden – oberhalb der Landebene.

Hinweise zum Teacher-Tool "PARABELN"
Das Utility bietet den schnellen Zugriff auf die Lösung des Standardproblems:
„Wie lautet die Gleichung der Parabel durch drei Vorgabepunkte?“.
Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn das Koordinatensystem noch selbst gewählt werden muss. Die unterschiedlichen Lösungen sind so komfortabel zugänglich.

Die Dateneingabe mit Dezimalpunkt (z.B. 2.0) erzwingt die Ausgabe im gleichen Format.
Gleiches gilt für die Eingabe in Bruchform (z.B. 7⌟4 als unechter Bruch per Taste a b/c).

Bei berechneter oder schon eingegebener Gleichung liefert es zugleich häufig benötigte Kenndaten wie den Scheitelpunkt und die ggf. vorhandenen Nullstellen.
Durch die einfache Dateneingabe kann das vorliegende Tool drei Dinge erleichtern:

- Die Erstellung eigener Arbeitsblätter
- Die innere Differenzierung
- Die Erstellung von Tests und Klassenarbeiten

Hinweise zum Einsatz des Arbeitsblattes
Um die Selbstkontrolle für die Schüler/innen zu ermöglichen, sind lediglich die Endlösungen angegeben. Damit wird kein irgendwie gearteter Lösungsgang bevorzugt und das Arbeitsblatt bleibt universell einsetzbar.
Die Vielfalt der Lösungswege (klassisch händisch: zugehöriges 3x3 LGS lösen, geschickte Ansätze durch besondere Wahl des KoSy bzw. Symmetrieausnutzung, Punkte in ein KoSy eintragen und mit der Normalparabel vergleichen) wird durch den Rechnereinsatz nochmals erweitert (mit Rechner: Plot der Daten mittels Listen und anschließender quadratischer Regression, zugehöriges LGS durch Rechner lösen lassen, eigenständige Lösungskontrolle durch Darstellung des vermeintlichen Graphen, umfängliche Lösungsoptionen per G-Solv im Grafikmodus, Benutzung des DYNA-Menüs zur Variation von Parametern in Graphen).