Heron-Verfahren

Was man weiß, was Schüler/in wissen sollte. Check-Up zu Begriffen und Schreibweisen.

Das Heron-Verfahren basiert auf der Konstruktion von Rechtecken, die stets ihren Flächeninhalt behalten und immer quadratähnlicher“ werden. Dabei ist die Idee der Mittelwertbildung entscheidend. Die Iterationsvorschrift: $x_{i+1} = \frac{1}{n}\left((n-1)\cdot x_i + \frac{a}{x_i^{n-1}}\right)$ liefert Näherungswerte für $\sqrt[n]{a}$.

Mit n = 2 und etwa $x_o = 1$ liefert sie gute Näherungswerte für $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$. Hier erleichtert der GTR die Arbeit erheblich. Ausgehend vom Startwert x_o wird obige Iterationsvorschrift als x abgespeichert und immer wieder mit der EXE-Taste wiederholt.

Gib - soweit möglich - alle Ergebnisse exakt (einfache Dezimalbruch- oder Bruchdarstellung) an. Bei mehreren Werten bietet sich eine Tabelle an.

Aufgaben mit Minimalanforderungen

Benutze den Heron-Algorithmus und berechne 4 Näherungwerte für $\sqrt{a}$. Veranschauliche die ersten drei Schritte durch Rechtecke. Starte stets mit $x_o = 1$.

a) Wähle a = 27 und dokumentiere.
b) Wähle a = 12 und dokumentiere.
c) Wähle a = 16 und dokumentiere.
d) Wähle a = 19 und dokumentiere.
e) Wähle a = 30 und dokumentiere.

Aufgaben mit Standardanforderungen

Benutze den Heron-Algorithmus und berechne Näherungwerte für $\sqrt{a}$ auf 5 Nachkommastellen genau.

a) Wähle a = 1500 und $x_o = 10$.
b) Wähle a = 1000 und $x_o = 15$.
c) Wähle a = 1259 und $x_o = 7$.
d) Wähle a = 65020 und $x_o = 100$.

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

Benutze den Heron-Algorithmus und berechne Näherungwerte für $\sqrt[n]{a}$.

a) Führe mit $x_o = 1$ für $\sqrt[3]{8}$ sieben Iterationen (Tabelle!) aus und erläutere die Ergebnisse.

b) Berechne Näherungswerte für $\sqrt[4]{1000}$ auf 5 Nachkommastellen genau. Wähle $x_o = 10$.

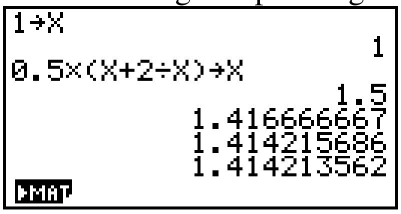
c) Was berechnet die allgemeine Heron-Formel für n = 1? Wähle selbst ein Beispiel aus. Erläutere möglichst genau am Term und unabhängig davon mit Hilfe der Wurzel-Definition.

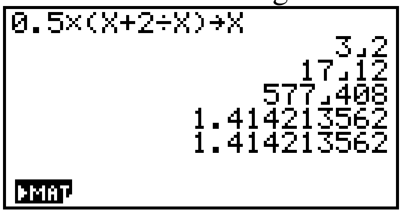
Heron-Verfahren

Falls nicht anders vorgegeben, löst du die Aufgaben so wie in den Unterrichtsbeispielen. Durch die Dokumentation deines Lösungsweges wird immer deutlich, wie du selbst vorgegangen bist. Natürlich muss auch die Verwendung des eingeführten Rechners ersichtlich sein. Du findest hier deshalb nur die Endergebnisse oder mal einen Tipp für einen besonderen Lösungsweg.

LÖSUNGEN

Das Bedienungsbeispiel zeigt Screenshots mit Näherungswerten für Wurzel aus 2 und $x_o = 1$:





Aufgaben mit Minimalanforderungen

Benutze den Heron-Algorithmus und berechne 4 Näherungwerte für $\sqrt{a}$. Veranschauliche die ersten drei Schritte durch Rechtecke. Starte stets mit $x_o = 1$.

i	a)		b)		c)		d)		e)	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	1	27	1	12	1	16	1	19	1	30
1	14	≈ 1,93	6,5	≈ 1,85	8,5	≈ 1,88	10	≈ 1,90	15,5	≈ 1,94
2	7,964285714	≈ 3,39	4,173076923	≈ 2,88	5,191176471	≈ 3,08	5,95	≈ 3,19	8,717741935	≈ 3,44
3	5,677210122	≈ 4,76	3,52432648	≈ 3,40	4,136664723	≈ 3,87	4,571638655	≈ 4,16	6,079500015	≈ 4,93
4	5,216533605		3,464616186		4,002257525		4,36384883		5,507058168	

Aufgaben mit Standardanforderungen

Benutze den Heron-Algorithmus und berechne Näherungwerte für $\sqrt{a}$ auf 5 Nachkommastellen genau.

i	a)	b)	c)	d)
0	10	15	7	100
1	80	40,83333333	93,42857143	375,1
2	49,375	32,66156463	53,4520533	274,2202213
3	39,87737342	31,639295572	38,50293626	255,6644603
4	39,74634468	31,62278091	35,60087057	254,991085
5	38,72983698	31,6227766	35,48258715	254,9901959
6	38,72983346	31,6227766	35,48239	254,9901959
7			35,48239	

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

a) Für $\sqrt[3]{8}$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	3,33	2,46	2,08	2,0031	2,0000049	2	2

b) Für $\sqrt[4]{1000}$:

i	0	1	2	3	4	5	6
	10	7,75	6,34	5,73	5,626	5,623416	5,6234132

c) Beispiel für allgemeines a. Es soll die 1-te Wurzel per $1\cdot(0\cdot x + a/x^o) \rightarrow x$ berechnet werden. Dies liefert beständig den Wert a in Übereinstimmung mit $\sqrt[1]{a} = a$.

Trainingsblatt 09: **Heron-Verfahren**

Hinweise zum Teacher-Tool "HERON"
Das Utility bietet den schnellen Zugriff auf die Lösung des Standardproblems:
„Wie verändern sich sukzessive die Näherungswerte beim Heron-Verfahren?“

Die Dateneingabe mit Dezimalpunkt (z.B. 2.0) erzwingt die Ausgabe im gleichen Format.
Gleiches gilt für die Eingabe in Bruchform (z.B. 7⌟4 als unechter Bruch per Taste a b/c).

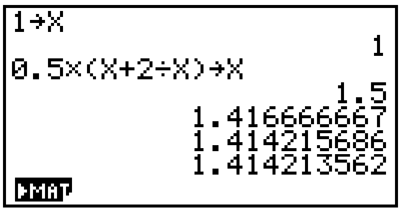
Durch die einfache Dateneingabe kann das vorliegende Tool drei Dinge erleichtern:

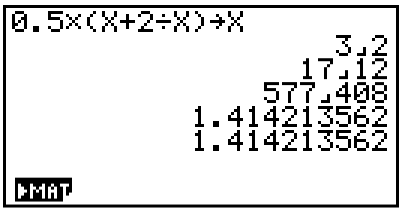
- Die Erstellung eigener Arbeitsblätter
- Die innere Differenzierung
- Die Erstellung von Tests und Klassenarbeiten

Hinweise zum Einsatz des Arbeitsblattes
Um die Selbstkontrolle für die Schüler/innen zu ermöglichen, sind lediglich die Endlösungen angegeben. Damit wird kein irgendwie gearteter Lösungsgang bevorzugt und das Arbeitsblatt bleibt universell einsetzbar.

Die klassisch händische Bearbeitung des Heron-Verfahrens fußt i.d.R. auf der geometrischen Anwendung und rechnerischen Begleitung, soweit die Bruchrechnung einen vernünftigen Umgang mit den Ergebnissen ermöglicht.
Ohne einen mindestens „normalen“ Taschenrechner oder eine Tabellenkalkulation ist man hier sehr schnell am Ende.

Einen möglichen Einsatz des GTR beim Heron-Verfahren zeigen die beiden Abbildungen:





Näherungswerte für Wurzel aus 2 mit dem Startwert $x_o = 1$: