

Trainingsblatt 05: **Umkehrfunktionen zu linearen Funktionen****Was man weiß, was Schüler/in wissen sollte. Check-Up zu Begriffen und Schreibweisen.**

Eine lineare Funktion $f: A \rightarrow B$ vermittelt eine eindeutige Zuordnung, deshalb kann die Frage nach der Umkehrzuordnung $B \rightarrow A$ positiv beantwortet werden. Die zugehörige Funktion heißt Umkehrfunktion oder einfach Inverse f^{-1} . Sie vermittelt sozusagen den Rückweg im Sinne von $f(a) = b$ gehört zu $f^{-1}(b) = a$, deshalb gilt auch $f(f^{-1}(c)) = f^{-1}(f(c)) = c$. Man erhält die Umkehrfunktion geometrisch durch Spiegelung von f an der Winkelhalbierenden. Der Rechengang zur Bestimmung von f^{-1} vertauscht erst die Variablen und löst dann nach y auf. Es gibt i.d.R. einen Fixpunkt F , er ist der gemeinsame Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden.

Aufgaben mit Minimalanforderungen

Bestimme bzw. benutze die Umkehrfunktion f^{-1} zur Funktion f und gib den Fixpunkt an.

- a) $f: y = 2x + 5$
- b) $f: y = -3x - 3$
- c) $f: y = -\frac{1}{2}x - 4$
- d) $f: y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$
- e) $f: y = 8 + 10x$

Aufgaben mit Standardanforderungen

- a) Bestimme die Umkehrfunktion und den Fixpunkt zu f , wobei $f(1) = 4$ und $f(5) = -8$ gilt.
- b) Marcel vergleicht zwei Handytarife, den Tarif A: 0,20 €/Minute und 10 € Grundgebühr mit dem Tarif B: 0,10 €/Minute bei 25 € Grundgebühr. Er geht am liebsten von verschiedenen monatlichen Budgets aus und möchte wissen, wie viel Minuten er jeweils dafür telefonieren kann. Berechne dazu die Tariffunktionen und ihre Umkehrfunktionen und gib die jeweiligen Tarifwechselpunkte an.
- c) Bestimme die Umkehrfunktion und den Fixpunkt zu f , mit $P(8|-6,5)$ und $Q(0|0,5)$.
- d) Überprüfe, ob $f^{-1}: y = 4x + 2$ die Umkehrfunktion zu $f: y = 0,25x + \frac{1}{2}$ sein kann?

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

- a) Die Tabelle zeigt zugehörige Temperaturen in Grad Celsius und Fahrenheit.

Temp. in °C	0	100
Temp. in °F	32	212

Bestimme die zu den beiden Zuordnungen f und f^{-1} gehörenden Funktionsgleichungen.

$f: ^\circ\text{C} \rightarrow ^\circ\text{F}$ bzw. $f^{-1}: ^\circ\text{F} \rightarrow ^\circ\text{C}$.

Für welchen Zahlenwert ist die Temperaturangabe in °C und °F die selbe?

- b) Die Punkte $P(3|4)$ und $Q(7|9)$ liegen auf dem Graphen von f bzw. f^{-1} . Prüfe, ob $F(-2|-2)$ für diese Datenlage der Fixpunkt ist.
- c) Die Funktion $f_m(x) = m \cdot x - 3m + 4$ beschreibt eine Geradenschar mit einem gemeinsamen Punkt G_f .
Bestimme die Schar der Umkehrfunktionen $f_m^{-1}(x)$ und ihren gemeinsamen Punkt $G_{f^{-1}}$.
Erstelle eine Grafik mit drei sinnvollen Werten für m . Lässt sich ein Fixpunkt für das Paar $f_m(x), f_m^{-1}(x)$ angeben?

Falls nicht anders vorgegeben, löst du die Aufgaben so wie in den Unterrichtsbeispielen.

Durch die Dokumentation deines Lösungsweges wird immer deutlich, wie du selbst vorgegangen bist. Natürlich muss auch die Verwendung des eingeführten Rechners ersichtlich sein. Du findest hier deshalb nur die Endergebnisse oder mal einen Tipp für einen besonderen Lösungsweg.

LÖSUNGEN

Aufgaben mit Minimalanforderungen

Bestimme bzw. benutze die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zur Funktion $f(x)$ und gib den Fixpunkt an.

- a) f^{-1} : $y = \frac{1}{2}x - 2,5$ $F(-5|-5)$.
- b) f^{-1} : $y = -\frac{1}{3}x - 1$ $F(-0,75|-0,75)$.
- c) f^{-1} : $y = -2x - \frac{1}{2}$ $F(-\frac{1}{6}|\frac{1}{6})$.
- d) f^{-1} : $y = 3x + 1$ $F(-0,5|-0,5)$.
- e) f^{-1} : $y = 0,1x - 0,8$ $F(-8/9|-8/9)$.

Aufgaben mit Standardanforderungen

- a) f : $y = -3x + 7$. f^{-1} : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. Der Fixpunkt ist $F(\frac{7}{4}|\frac{7}{4})$.
- b) f : $y = 0,2x + 10$. f^{-1} : $y = 5x - 50$. Der Fixpunkt ist $F(12,5|12,5)$.
- c) f : $y = -\frac{7}{8}x + 0,5$. f^{-1} : $y = -\frac{8}{7}x + \frac{4}{7}$. Der Fixpunkt ist $F(\frac{4}{15}|\frac{4}{15})$.
- d) Es stimmt nicht! Richtig ist f^{-1} : $y = 4x + 2$ mit $F(\frac{2}{3}|\frac{2}{3})$.

Aufgaben mit höherem Schwierigkeitsgrad

- a) f : $y = \frac{9}{5}x + 32$, mit x in $^{\circ}\text{C}$ und y in $^{\circ}\text{F}$. f^{-1} : $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$, mit x in $^{\circ}\text{F}$ und y in $^{\circ}\text{C}$.
Der Fixpunkt ist $F(-40|-40)$.
- b) f : $y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$. f^{-1} : $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$. Der richtige Fixpunkt ist $F(-1|-1)$.

- c) Gemeinsamer Punkt für $f_m(x)$ ist $G_f(3|4)$. $f_m^{-1}(x) = \frac{1}{m} \cdot x + \frac{3m-4}{m}$ mit $G_{f^{-1}}(4|3)$.

Zu jeder Wahl von m gibt es einen Fixpunkt $F_m\left(\frac{3m-4}{m-1} \mid \frac{3m-4}{m-1}\right)$.

Hinweise zum Teacher-Tool "LINUMFKT"

Das Utility bietet den schnellen Zugriff auf die Lösung des Standardproblems:

„Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zu einer linearen Funktion $f(x)$?“.

Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn das Koordinatenvertauschungsverfahren in Verbindung mit der grafischen Darstellung wegen unhandlicher Daten nur unbefriedigend arbeitet. Die Lösungen sind über das Tool komfortabel zugänglich.

Die Dateneingabe mit Dezimalpunkt (z.B. 2.0) erzwingt die Ausgabe im gleichen Format.

Gleiches gilt für die Eingabe in Bruchform (z.B. $7 \frac{1}{4}$ als unechter Bruch per Taste a b/c).

Bei eingegebener Gleichung für $f(x)$ liefert es zugleich den häufig benötigten Fixpunkt F.

Durch die einfache Dateneingabe kann das vorliegende Tool drei Dinge erleichtern:

- Die Erstellung eigener Arbeitsblätter
- Die innere Differenzierung
- Die Erstellung von Tests und Klassenarbeiten

Hinweise zum Einsatz des Arbeitsblattes

Um die Selbstkontrolle für die Schüler/innen zu ermöglichen, sind lediglich die Endlösungen angegeben. Damit wird kein irgendwie gearteter Lösungsgang bevorzugt und das Arbeitsblatt bleibt universell einsetzbar.

Die Vielfalt der Lösungswege (klassisch händisch: Variablen vertauschen und nach y auflösen, grafische Darstellung von f und Spiegelung an der Winkelhalbierenden, Koordinatenvertauschungsverfahren auf zwei Punkte anwenden und f sowie f^{-1} im KoSy einzeichnen) wird durch den Rechneinsatz nochmals erweitert (mit Rechner: Plot der Daten und der vertauschten Datenpunkte mittels Listen und anschließender linearer Regression, eigenständige Lösungskontrolle durch Darstellung des vermeintlichen Graphen, umfängliche Lösungsoptionen per G-Solv im Grafikmodus, Benutzung des DYNA-Menüs zur Variation von Parametern in Graphen, Unterstützung der funktionalen Schreibweise wie z.B. $y_1(y_2(7)) = 7$, falls y_1 und y_2 invers zueinander sind).