Wann ist der Tod eingetreten, Herr Doktor?

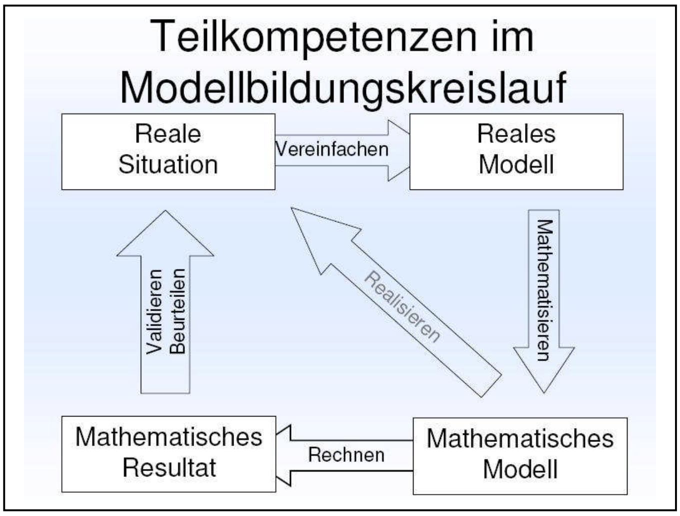
Als ich mich vor mich mehr als zwei Jahren mit einer Schülerin zu einem ersten Facharbeitsgespräch zusammensetzte, kam die Idee auf, Abkühlungsvorgänge zu betrachten, weil wir gerade vorher im Unterricht die Abkühlung einer Tasse Kaffee und damit das Newton'sche Abkühlungsgesetz untersucht hatten. Beim Brainstorming kam u.a. das Thema Todeszeitpunktsbestimmung auf den Tisch. Die Schülerin ging zunächst sehr engagiert an das Thema heran, fand aber schließlich nicht genügend Daten und untersuchte statt dessen lieber die Lagerzeiten von Kühltruhen bei Stromausfall. Nun war aber mein Ehrgeiz geweckt und mir fielen bei einer Recherche verschiedene Dokumente in die Hand, die sich ausführlich mit den Problemen der Todeszeitpunktsbestimmung beschäftigten.[1]
Daraus entstand eine kleine Unterrichtseinheit, die sich um einen fiktiven Mordfall rankte. Ich habe sie in meinem Leistungskurs auch deshalb eingesetzt, weil ich an diesem Beispiel noch einmal den Modellierungskreislauf thematisieren wollte. Vorher müssen unbedingt Exponentialfunktionen behandelt worden sein, der ClassPad ist als CAS-Werkzeug fast unentbehrlich.

Todeszeitpunktsbestimmung in der Praxis
Dem Normalbürger wird die Eingangsfrage in der Regel nur im abendlichen Krimi begegnen, im Zusammenhang mit der üblichen Kabbelei zwischen Pathologen und Kommissar. Tatsächlich spielt sie allerdings auch in der Rechtsmedizin eine wichtige Rolle. Das derzeit im deutschsprachigen Raum und auch international nahezu ausschließlich gebräuchliche Nomogramm-Verfahren nach Henßge beruht auf einem mathematischen Modellansatz (siehe AB3) für die tiefe Rektaltemperatur. Wie alle übrigen mathematischen Modelle setzt es eine Konstanz der Umgebungstemperatur und deren Kenntnis während des gesamten Abkühlungsverlaufes voraus. Da diese Voraussetzungen häufig nicht gegeben ist, werden immer wieder Zweifel an der Methode geltend gemacht. Zum Beispiel war das Verfahren im berühmten Mordprozess O.J. Simpson an 2 Tagen Gegenstand der Verhandlung. Und so darf es auch nicht verwundern, dass die Unsicherheitsspanne noch +/-2,8 Stunden beträgt und es einige Versuche gibt, ein Modell für variable Umgebungstemperaturen zu entwickeln. Bisher aber ohne Erfolg.

Der Einstieg in die Unterrichtseinheit
Der Einstieg (AB1[2]) geschieht über einen fiktiven Kriminalfall, der später noch mehrmals wieder aufgegriffen wird.
Kommissarin Müller betrat die elegante Vorstadtvilla und wurde von den dort anwesenden Beamten ins Schlafzimmer geführt, wo Jürgen R. (57 Jahre) nur mit einer Schlafanzughose in einer Blutlache lag. Der Gerichtsmediziner Dr. Konrad Schlaumeier war gerade mit der ersten Untersuchung fertig und wollte den Raum verlassen. Müller, die ihn wegen seiner arroganten Art nicht leiden konnte, fasste ihn kurz an den Arm und fragte: „Herr Doktor, können Sie schon mal etwas zu Todesursache und Todeszeitpunkt sagen?" „Ich habe bei der Leiche gerade eine Rektaltemperatur von 32,5 °C gemessen und die voraussichtliche Todesursache werden Sie ja wohl selbst feststellen können. Alles weitere nach der Obduktion", war die Antwort und Dr. Schlaumeier war verschwunden, bevor der ob dieser frechen Antwort erbosten Kommissarin eine passende Erwiderung einfiel. Aber in der Tat war bei einer raschen Betrachtung der Leiche nicht zu übersehen, dass der Tod wahrscheinlich durch mehrere heftige Schläge mit einem stumpfen Gegenstand eingetreten war. Dass die Totenstarre schon

[1] U.a. fand ich die Dissertation von Monika Eckl, aus der ich einen Großteil meines Hintergrundwissens geschöpft habe.
[2] Alle Arbeitsblätter können von der CASIO-Schulhomepage (http://www.casio-schulrechner.de/de/) herunter geladen werden.

eingetreten war, war auch leicht zu prüfen. Sie schaute seufzend auf ihre Armbanduhr und dachte: „Es ist erst 8.00 h, der Tag fängt ja gut an ...“



Hier lernen die Schülerinnen und Schüler zunächst ein ganz einfaches lineares Modell kennen, das sie später nach dem mehrfachen Durchlaufen des Modellierungskreislaufes[3] zum Vergleich einsetzen können.
Mit der 1 °C/h – Methode kommt man schnell auf einen Todeszeitpunkt von etwa 3.30 h. An dieser Stelle können sich die Schülerinnen und Schüler selbst über weitere begleitende Untersuchungen zur Todeszeitpunktsbestimmung informieren und zum ersten Mal ihren Modellierungsansatz reflektieren. Welche Voraussetzungen sind eingegangen, welche Randbedingungen haben keine Berücksichtigung gefunden (vereinfachen)? Welches mathematische Modell habe ich eingesetzt (Mathematisieren)? Passen die Rechenergebnisse zu den Informationen? U.s.w.

Das Newton’sche – Abkühlungsmodell

Das zweite Arbeitsblatt (AB2) liefert weitere Hinweise und Informationen. Die Frau des Ermordeten und ihr Liebhaber sind verdächtig, haben aber von 20.00 h bis 1.00 h ein wasserdichtes Alibi. Und der uncharmante Pathologe sagt: „ *...Aber soviel noch: Ich habe 2 Stunden nach der Temperaturmessung – kurz vor dem Abtransport der Leiche - noch eine weitere Messung vorgenommen. Die Leiche war mittlerweile noch 31,2 °C warm, die Umgebungstemperatur in dem gut klimatisierten Schlafzimmer lag bei 19 °C. Wenn Sie nun noch bedenken, dass die tiefe Rektaltemperatur bei einem lebenden Menschen ganz gut mit 37,2 °C abgeschätzt werden kann, werden Sie doch wohl eine bessere Schätzung hinbekommen als mit ihrem primitiven linearen Modell.“*

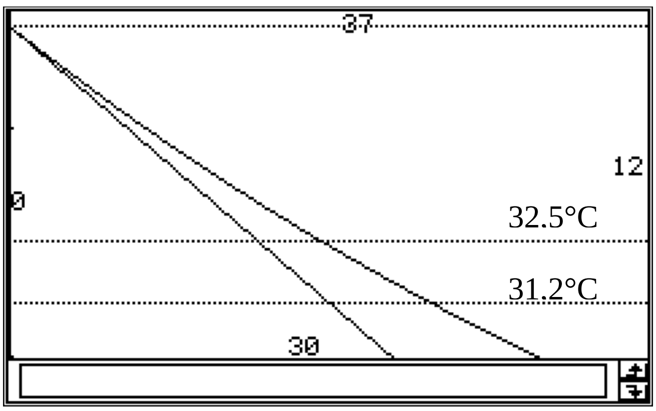
> Der zweite Modellierungsansatz
>
> Das **Newton’sche Abkühlungsgesetz** lautet:
>
> $$f(t) = Tu + (To - Tu)e^{-kt}$$
>
> Dabei ist Tu die Umgebungstemperatur und To die Anfangstemperatur.
> Es gilt streng nur für dünne Körper.

Nach dem ersten Modell hätte die Rektaltemperatur zwei Stunden später schon bei 30,5 °C liegen müssen. Das Modell passt also nicht. Da wir kurz vorher Abkühlungsvorgänge im Unterricht behandelt hatten, kam die Schülerinnen und Schüler schnell auf die Idee, für eine Verbesseerung des Modellansatzes mit dem Newton’schen Abkühlungsgesetz zu arbeiten.
Mit den zwei Messergebnissen M1(t/32.5) und M2(t+2/31.2) kann man dann zwei Gleichungen aufstellen und k und t bestimmen.

Raumtemperatur

19⇒TU

Körpertemperatur



[3] Grafik nach G. Greefrat (aus einem Vortrag bei der MUED-Tagung 2007)

```
37.2⇒T0
```

Definition Funktion

```
define n(x)=TU+(T0-TU)×e^(-k×x)
```

Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} n(t)=32.5 \\ n(t+2)=31.2 \end{array}\right|_{k,t}$$

```
{k=0.05062686685,t=5.900659614}
```

Die Todeszeit wird durch das Modell also auf etwa 6 Stunden vor dem Auffinden geschätzt, also auf etwa 2.00 h. Das bringt also keine Entlastung für die Verdächtige.

Danach lässt sich sehr gut eine Fehlerdiskussion und eine weitere Modellierungskritik anschließen:

- Wie wirken sich Messungenauigkeiten von z.B. 0,1 °C auf die Vorhersage des Todeszeitpunktes aus?
- Welchen Einfluss hat z.B. eine fiebrige Erkältung ?
- Welche Bedingungen sind neu eingegangen, welche sind immer noch nicht berücksichtigt?

Das Doppelexponentialmodell nach Henßge

Marshall und Hoare entwickelten auf Grund vieler eigener Abkühlungsexperimente mit Leichen die Vorstellung, dass die postmortale Rektaltemperaturkurve anfänglich ein Plateauniveau aufweisen, darauf folgt eine fast lineare Abkühlungsphase, an die sich schließlich die asymptotische Endphase mit Annäherung der Temperatur an die Umgebungsbedingungen anschließt. Voraussetzung für dieses Modell, das von Henßge noch verfeinert wurde, ist eine konstante Umgebungstemperatur.
Das Arbeitsblatt (AB3) liefert über einen

Der dritte Modellierungsansatz

Modellfunktion nach Henßge

$$g(t) = (To - Tu)(\alpha\, e^{-\beta t} + \gamma\, e^{-\delta t}) + Tu$$

Dabei sind To die Rektaltemperatur bei Eintritt des Todes und Tu die konstante Umgebungstemperatur. g(t) ist die Rektaltemperatur zum Zeitpunkt t, wenn die Todeszeit mit t = 0 angesetzt wird.
Die Parameter α,β,γ und δ sind wie folgt definiert:

$$\alpha = \frac{p}{p-z} \qquad \beta = -z \qquad \gamma = \frac{z}{z-p} \qquad \delta = -p$$

und $z = 0{,}0284 - 0{,}0284 - \frac{1{,}2815}{M^{0{,}625}}$, M = Masse (kg)

$p = 5\,z$ für $tu \le 23{,}2$ °C
bzw. $p = 10z$ für $tu > 23{,}2$ °C

Ausgewählte Korrekturfaktoren

Faktor	Bekleidung	Luft
0.75	nackt	strömend
1	nackt	immobil
1.1	1-2 dünne Lagen	immobil
1.2	1–2 dickere Lagen	immobil

Kommentar des Pathologen weitere Informationen:
„Wie sie sehen, geht als weitere Größe nur die Körpermasse ein, weil Henßge mit einigem Recht angenommen hat, dass die eigentlich wichtige, am Wärmeaustausch tatsächlich beteiligte Oberfläche über die Masse miterfasst werden kann. Die Körpermasse unseres Mordopfers lag übrigens bei 80 kg. Um schließlich auch dem Bekleidungszustand der Leiche gerecht zu werden, werden die Kör-

permassen mit einem Faktor < 1 multipliziert, wenn der Wärmeaustausch wegen leichter oder fehlender Bekleidung und guter Durchlüftung gut möglich ist. Ist die Leiche dagegen warm angezogen, „erhöht“ man die Körpermasse mit Hilfe eines Faktors größer 1.“

Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst die konkrete Funktion für diesen Fall aus den Angaben zusammenstellen. Danach erfolgt die Abschätzung der Todeszeit und die Diskussion um eine mögliche Täterschaft der Ehefrau und ihres Liebhabers. Als weitere Verbesserung können dann noch Korrekturfaktoren eingebracht werden, die die Masse und damit die Oberfläche des Körpers und weitere Randbedingungen berücksichtigen.

Mit m = 80 kg ergibt sich z= -0.05445, a = 1.25, b= 0.05445, c = -0,25 und d = 0.272245

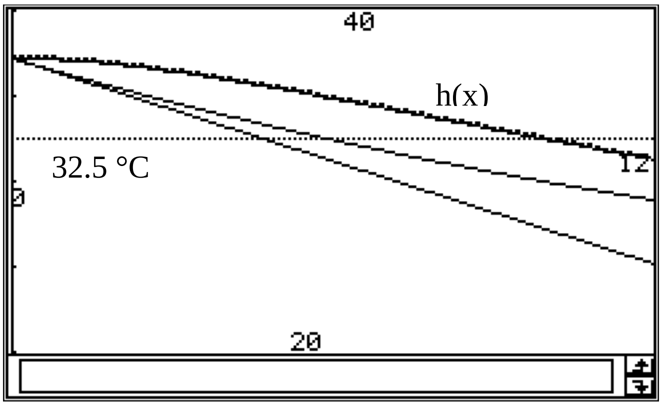
define $f(x)=a\times e^{-b\times x}+c\times e^{-d\times x}$

Modellfunktionen nach Henssge

define h(x)= f(x)×(T0−TU)+TU

Für t > 23,2 °C erhält man eine entsprechende Funktion

define ha(x)= fa(x)×(T0−TU)+TU



solve(h(x)=32.5,x)

{x=−4.528655777,x=9.067718163}

Der Mord müsste danach etwa um 23.00 h passiert sein. Das entlastet die Verdächtigen etwas, schließt sie aber wegen der Toleranz von 2,8h nicht völlig aus.

Verfeinerung des Modells:

Bekleidungszustand berücksichtigen (Schlafanzughose)

Mit q = 1.1 und m= 80*1.1 erhält man z= -0.0496579, b= 0.0496579 und d = 0.248289

die neue Funktion heißt hn(x)

solve(hn(x)=32.5,x)

{x=−4.96559045,x=9.942591564}

hiernach ist der Tod etwa gegen 22.00 h eingetreten. Unter Berücksichtigung der Toleranz müsste die Tatzeit zwischen 19.00 und 1.00 h eingetreten sein. Die Angeklagten wären deshalb (nicht ganz) entlastet.

Die Untersuchungen können schließlich noch durch Fragestellungen nach Manipulationsmöglichkeiten oder geänderte Rahmenbedingungen („Fieber“) fortgesetzt werden.

Beispiel Fieber:

Nimmt man an, dass die Körpertemperatur bei 38,2 °C lag, erhält man für die Funktion hn(x)

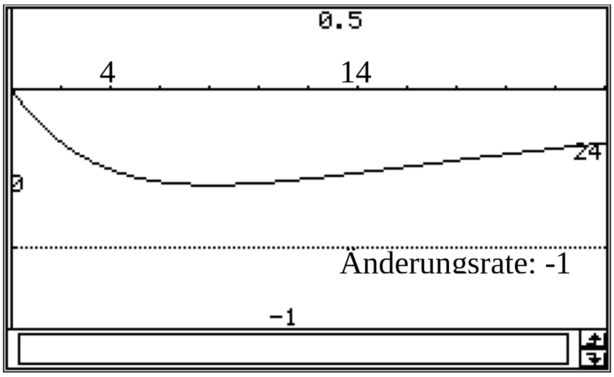
z = -0.049568, a = 1.25, b = 0.049568, c = -0.25 und d = 0.24829

```
solve(hn(x)=32.5,x)

        {x=-5.240662683,x=11.1411576}
```

Die Tat könnte dann also unter dieser Bedingung schon um 21.00 h geschehen sein.

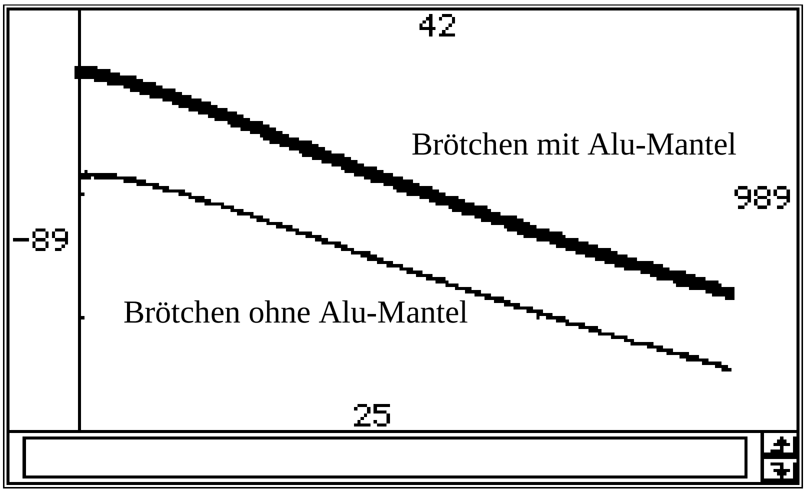
Schließlich bleibt die Frage im Raum, wie es denn zu der Faustregel 1 °C pro Stunde kommen konnte. Ich konnte den Grund dafür nicht ermitteln. Allerdings kann man rechnerisch prüfen, ob es z.B Henßge-Modell Zeiträume gibt, in denen die Änderungsrate so groß ist.
Am einfachst geht das, indem man sich die Änderungsraten darstellen lässt. Die folgende Grafik zeigt die Funktion h'(x). Man erkennt, dass unter den gegebenen Bedingungen eine Änderungsrate von –1 niemals erreicht wird, die Steigung sich aber ab Stunde 4 bis Stunde 14 nur wenig ändert.



Schließlich bietet die zugrundeliegende Funktionenschar vielfältige Ansatzpunkte, die Wirkungsweise der verschiedenen Parameter – mit oder ohne Sachzusammenhang - zu untersuchen und zu beleuchten.

Nachklang

Im Rahmen der Modellierungsüberlegungen kam im Kurs die Frage auf, ob es denn nicht möglich sei, über experimentelle Untersuchungen die Brauchbarkeit der verschiedenen Modelle zu prüfen. Da frische Leichen nicht zur Verfügung standen, haben wir überlegt, ob z.B. Brötchen oder Würstchen als „Modellleichen“ herhalten könnten. Ich habe einige Wochen später nach Ausleihe eines EA-200 dazu noch einige Messreihen gefahren. Dazu habe ich die Brötchen im Backofen erhitzt und die Innentemperatur mit einem Messfühler bestimmt (siehe Bild). Die folgende Grafik zeigt je eine Messreihe mit einem Brötchen mit Anfangstemperatur von 35,75 °C und eine mit einem mit Alu-Folie umwickelten Brötchen mit Anfangstemperatur 40 °C.
Dabei wird deutlich, dass zu Anfang tatsächlich eine Plateauphase auftritt und danach ein fast linearer Rückgang zu beobachten ist.



Messzeitraum jeweils 15 Minuten
(= 900 Sekunden)

Literatur

- Monika Eckl: „Temperaturgestützte Todeszeitschätzung bei nur partiell bekannten Umgebungsbedingungen“, Dissertation an der Ludwig-Maximilians-Universität zu München, 2004
  (herunterzuladen von http://edoc.ub.uni-muenchen.de/archive/00002139/01/Eckl_Monika_M.pdf)
- Exceldatei mit den Korrekturfaktoren: http://www.henssge.homepage.t-online.de/amasoft/dt.htm#O.%20J. Dort können auch die Gerichtsprotokolle zum O.J. Simpson-Prozess heruntergeladen werden.