

Der Algebra FX-2.0 PLUS im Zentralabitur Niedersachsen

Übersicht der mit dem CAS-Rechner erwartete Fähigkeiten im Fach Mathematik
vgl. Niedersächsisches Kultusministerium vom 24. September 2007

1. Die Grundlagen

Im Verlauf des Kapitels 1 sollen die Funktion f mit $f(x) = (x+3)(x+1)$ und die Funktionsschar g_k mit $g_k(x) = -\frac{x^2 - 2x - 8}{x+2} + k; k \in \{1; 10; 13\}$ betrachtet werden.

(1) Einstellen der Grundmodi des jeweiligen CAS und Umgang mit Fehlermeldungen

Einstellen des Grundmodus

Systemmanager
F1: Speicherverwendung
F2: Kontrast
F3: Ausschaltautomatik
F4: Sprache
F5: Rückstellung
F6: Tutorial-Verries.
Meml. C-18 Pol. Analyse-Block

Das linke Sichtfenster erhält man über das Menü SYSTEM. Vor Klausuren ist eine Rückstellung empfehlenswert. Nachdem die Rückstellung (F5) gewählt wurde, kann über F4 eine Initialisierung erfolgen:

* Rückstellung *

F1: Einstelldaten
F2: Hauptspeicher
F3: Datenspeicher
F4: Initialisierung
F5: Main-Strg-Titl

Umgang mit Fehlermeldungen

Fehler	Mögliche Ursache	Abhilfe
Syntaxfehler	<ul style="list-style-type: none"> Befehle falsch eingegeben Anstatt der Variablen X wurde das Multiplikationszeichen x eingegeben Minuszeichen wurden verwechselt 	<ul style="list-style-type: none"> Eingabe evtl. mit Anleitung überprüfen. Abändern! (-) steht nur als Vorzeichen, sonst wird der Rechenoperator $\frac{\square}{\square}$ verwendet.
Bereichsfehler	<ul style="list-style-type: none"> VWindow ist falsch eingestellt 	<ul style="list-style-type: none"> Überprüfen der Min/ Max- Werte (meist werden diese vertauscht). STD (F3) stellt die Standardeinstellung her.
Bedingungsfehler	<ul style="list-style-type: none"> Es ist keine Funktionsgleichung aktiviert 	<ul style="list-style-type: none"> Über SEL (F1) mindestens eine Funktionsgleichung aktivieren.
Ma- Fehler	<ul style="list-style-type: none"> Ein unlösbares/ mehrdeutiges LGS soll im EQUA- Menü gelöst werden. 	<ul style="list-style-type: none"> Das LGS sollte im CAS- Menü gelöst werden. (Eingabe siehe „Analytische Geometrie- Lineare Algebra“)
Dimensionsfehler	<ul style="list-style-type: none"> Matrizen, die multipliziert werden sollen, haben eine unpassende Dimension 	<ul style="list-style-type: none"> Kontrolle der Dimension, ggfs. Dimension abändern.

(2) Speicherfunktion nutzen

Zahlwerte abspeichern

Die Buchstaben A, B, C etc. erhält man durch die Tastenkombination ALPHA (rot) + alle Tasten, die rote Buchstaben überschrieben haben!

Nach dem Bestimmen des Funktionswertes der Funktion f an der Stelle $x=2$ über das RUN- Menü speichert man die Ergebnisse mit der Pfeiltaste \rightarrow entsprechend ab („Ans“ erscheint, nachdem die Pfeiltaste gedrückt wurde).

(2+3)×(2+1) 15
Ans→A 15
A 15
MAT

Analog geht man mit Ergebnissen mit Parameter im CAS- Menü vor.

-(2²-2×2-8)/(2+2)+K
K+2
-
TNSICAL DEQUAL 23H GRPHI 0

Ans→A
K+2
TNSICAL DEQUAL 23H GRPHI 0

Um die Parameterwerte der Funktionsschar g_k für spätere Aufgaben mit in die Überlegung einzubeziehen, können diese in eine Liste im STAT- Menü eingetragen werden.

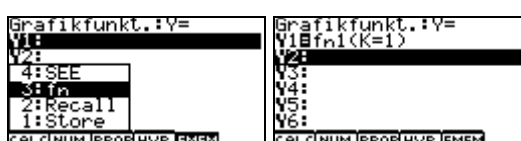
List 1	List 2	List 3	List 4
1			
2	10		
3	13		
4			
5			

Funktionen abspeichern

Im RUN- oder CAS- Menü eingegebene Funktionsterme können über die **OPTN**- Taste abgespeichert werden. Nachdem das Untermenü von **OPTN** umgeblättert wurde (**F6**), wählt man über **FMEM** (**F5**) die Möglichkeit, Funktionen mit **1:Store** abzuspeichern. Über **2:Recall** können die abgespeicherten Funktionen im RUN- als auch im CAS- Menü aufgerufen werden. Dazu muss erneut die **OPTN**- Taste gedrückt werden.



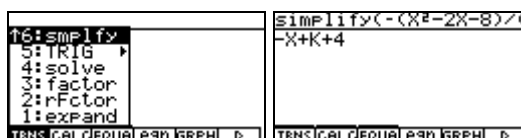
Im GRPH-TBL- Menü können die Funktionen durch den Befehl **3:fn** und die entsprechende Nummer der Funktion aufgerufen und gezeichnet werden. (k=1 ist die Vorgabe eines Parameters für die Funktionsschar).



(3) Arbeiten mit Termen

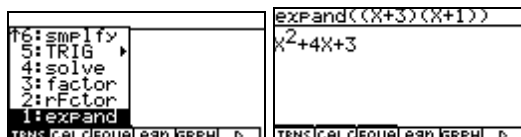
Vereinfachung der Funktionsschar g_k

Komplizierte oder ungekürzte Terme wie die der Funktionsschar g_k können über das CAS- Menü vereinfacht werden.



Ausmultiplizieren der Funktion f

Faktorierte Terme wie der Funktionsterm von f können über das CAS- Menü ausmultipliziert werden.

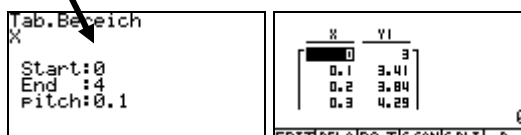
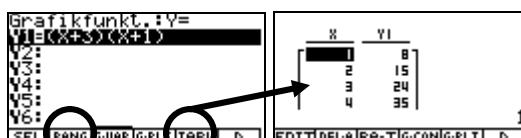


(4) Arbeiten mit Funktionen

Arbeiten mit Wertetabellen

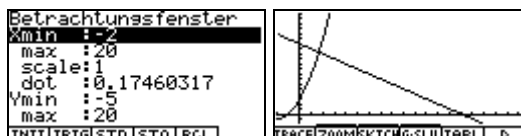
Die Funktionswerte von f sind schneller zu ermitteln, wenn man über das GRPH-TBL- Menü die Wertetabelle wählt. Dazu blättert man das Menü einmal über die Funktionstaste **F6** und erhält nebenstehende Abbildung.

Über Rang (im Untermenü **F2**) kann der Start- und Endwert mit Schrittweite (pitch) eingestellt werden.



Angemessene grafische Darstellung von Funktionen

Die Graphen sollten durch VWindow in einem geeigneten Koordinatensystem eingezeichnet werden. VWindow erhält man über das GRPH-TBL- Menü, anschließend mit der Tastenkombination **Shift** + **OPTN**.

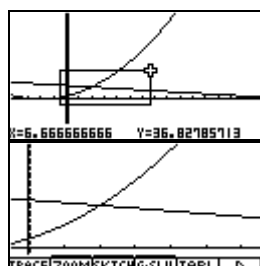
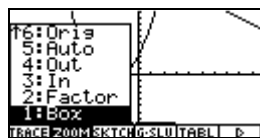


Durch den ovalen Cursor können bereits gezeichnete Graphen nach links bzw. rechts und nach oben bzw. unten verschoben werden!

Es besteht die Möglichkeit über Zoom (Untermenü **F2**) den Graphen *geeignet* zu zeichnen.

Beispiel: Zoomen mit 1: Box

Zunächst wird ein Eckpunkt durch **EXE** markiert. Anschließend zieht man das Rechteck beliebig auf und markiert den gegenüberliegenden Eckpunkt mit **EXE**.

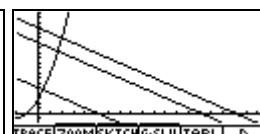


- 1: Box= Graph in Box wird vergrößert
- 2: Factor= Zoomfaktor
- 3: In= Vergrößert ...
- 4: Out= Verkleinert aus dem zu wählenden Zentrum
- 5: Auto= Automatischer Zoom
- 6: Orig= Versetzt den Graphen in den ursprünglichen Zustand
- ...

Darstellung von Funktionsscharen

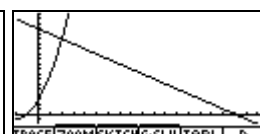
Im GRPH-TBL- Menü wird die Liste 1 aus (2) *Speicherfunktion* nutzen (s.o.) mit der Funktionsgleichung von g_k eingegeben.

Grafikfunkt.:Y=
 $V1=(X+3)(X+1)$
 $V2=(X-8)/(X+2)+List\ 1$
 $V3:$
 $V4:$
 $V5:$
 $V6:$



Alternativ bietet sich die nebenstehende Eingabe an, so dass neben der Angebotskurve lediglich der Graph der Nachfragefunktion für $k=13$ gezeichnet wird!

Grafikfunkt.:Y=
 $V1=(X+3)(X+1)$
 $V2=(X-2X-8)/(X+2)+K$
 $V3=V2(K=13)$
 $V4:$
 $V5:$
 $V6:$

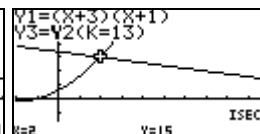


(5) Lösen von Gleichungen (Schnittpunkt)

Grafisches Lösen

Nachdem im GRPH-TBL- Menü der Graph gezeichnet wurde, kann ein Schnittpunkt über G-SLV (Untermenü **F4**) ermittelt werden (siehe auch 2. Analysis: (1) b))

G-SLV:
 5:Inter
 4:V-ICpt
 3:Min
 2:Max
 1:Root



Tabellarisches Lösen

Im GRPH-TBL- Menü findet man, nachdem mit **F6** einmal im Untermenü geblättert wurde, die Möglichkeit eine Wertetabelle auszugeben (**F5**). Die gewünschten x- Werte können direkt eingegeben werden!

X	Y1	Y2
1.9	14.21	15.1
2	15	15
2.1	15.81	14.9
2.2	16.64	14.8

Numerisches Lösen

Über das EQUA- Menü kann der Schnittpunkt berechnet werden. Dazu wählt man **F3:Lösung** und gibt anschließend die Gleichung (auch mit Parameter k) ein:

Eq: $(X+3)(X+1) = -(X^2-2X)$
 $X=1$
 $K=13$
 Lower=-9E+99
 Upper=9E+99

Eq: $(X+3)(X+1) = -(X^2-2X)$
 $X=2$
 Lft=15
 Rst=15

Wichtig: Je nach dem welcher Startwert (x oder k) durch den Cursor markiert wird, berechnet der FX 2.0 auch die entsprechende Lösung! (In der Abbildung wurde zuvor der x- Wert markiert)

Algebraisches Lösen

Über das CAS- Menü erhält man die Lösungen in Abhängigkeit des Parameters k! Nach dem der Befehl **solve** aufgerufen wurde, gibt man direkt die zu lösende Gleichung ein.

CAS:
 5:solve
 4:solve
 3:factor
 2:rFactor
 1:expand

Solve $((X+3)(X+1)) = -(X^2-2X)$
 $X = \frac{-\sqrt{4K+29} - 5}{2}$
 $X = \frac{\sqrt{4K+29} - 5}{2}$

2. Analysis

(1) Analyse von Funktionen bzw. Funktionsscharen

Es sei die Schar der Funktionen $f_k(x)$ mit $f_k(x) = (x+2)e^{kx}$; $k \neq 0$; gegeben.

a) Bestimmung der Ableitungsfunktionen

Über das CAS- Menü kann symbolisch abgeleitet werden. Dazu wählt man zunächst das Untermenü CALC, anschließend den Befehl **diff**.

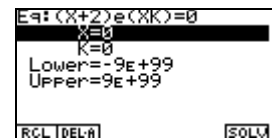
Der erste Term nach dem Befehl **diff** ist der abzuleitende Funktionsterm. Es folgt die Variable x und die Angabe höherer Ableitungen (2=2.Ableitung).



b) Je nach Problemstellung algebraische, numerische bzw. grafische Bestimmung von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten

Numerische Lösung möglicher Nullstellen:

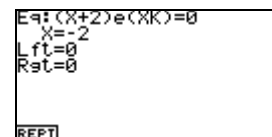
Über das EQUA- Menü kann eine Nullstelle berechnet werden. Dazu wählt man *F3:Lösung* und gibt anschließend die Gleichung ein (vgl. 1.Grundlagen (5)).



Lft= Wert der linken Gleichungsseite:

Rgt= Wert der rechten Gleichungsseite

Es wird jeweils nur ein Wert berechnet, der sich durch Iteration mit dem vorgegebenen Startwert ergibt.

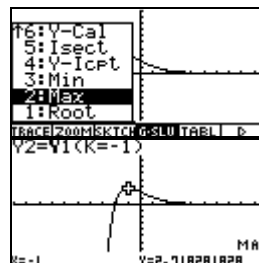


Grafische Lösung möglicher Extrema:

Über das GRPH-TBL- Menü kann nach dem Einzeichnen G-SLV (F3) gewählt werden.

Allerdings werden nur die Werte berechnet, die im Sichtfenster vorhanden sind!

Weiterhin stehen in dem Untermenü G-SLV Berechnungsmöglichkeiten zur Verfügung, die im rechtsstehendem Kasten ersichtlich sind.

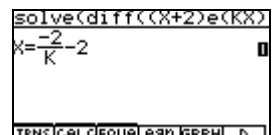


Berechnung des/ der:

- 1: Nullstellen
- 2: Maximums
- 3: Minimums
- 4: Y-Achsenabschnittes
- 5: Schnittpunktes
- 6: Funktionswertes
- 7: Stellen (x-Werte)
- 8: bestimmten Integrals

Algebraische Lösung möglicher Wendestellen:

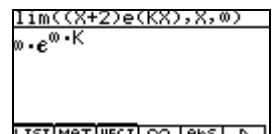
Über das CAS- Menü können durch den **solve**- Befehl und anschließend mit dem **diff**- Befehl alle (!) möglichen Wendestellen berechnet werden.



c) Bestimmung von Grenzwerten

Über das CAS- Menü erhält man durch Calc ($\boxed{F2}$, vgl. (1) a)) den Befehl für den Grenzwert $3:\lim$. Das Unendlichkeitszeichen erhält man durch die Taste $\boxed{OPTN} + \boxed{F4}$. Der erste Term nach dem Befehl \lim ist der zu betrachtende Funktionsterm. Es folgt die Variable x und der (uneigentliche) Wert, nach dem die Variable streben soll.

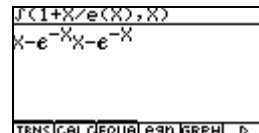
(Die Lösung im Beispiel ist abhängig vom Parameter k ; ist k negativ kann vorerst kein Grenzwert bestimmt werden, ist k positiv strebt der Funktionswert gegen den uneigentlichen Grenzwert ∞).



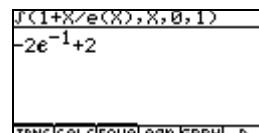
(2) Ermittlung von Stammfunktionen, bestimmten Integralen und Flächeninhalten

Es sei die Funktion f mit $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x}; x \in \mathbb{R}$ gegeben.

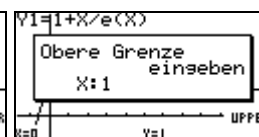
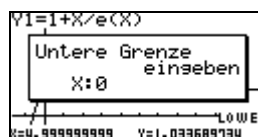
Über das CAS- Menü kann symbolisch integriert werden. Dazu wählt man im Untermenü CALC (**F2**) das Integrationszeichen und gibt entsprechend der rechtsstehenden Abbildung ein. Die Variable x kann im Befehl aufgenommen werden, es muss bei einem unbestimmten Integral aber nicht geführt werden.



Hängt man an die Formel die Unter- und Obergrenze an (hier: $x_U = 0$ und $x_O = 1$), erhält man das entsprechende bestimmte Integral.



Das bestimmte Integral kann über das GRPH-TBL- Menü bestimmt werden. Dazu wählt man über G-SLV (**F4**) das Integrationszeichen (vgl. (1) b)).



Durch direkte Eingabe der Grenzen erhält man das Ergebnis.

**3. Analytische Geometrie – Lineare Algebra****(1) Bestimmung der Lösungsmenge sowohl eindeutig als auch nicht eindeutig lösbarer LGS**

Es seien die Linearen Gleichungssysteme (LGS) mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben:

$$\begin{cases} 4x - 6y - 2z = a + 4 \\ -2x + 8y + (a+4) \cdot z = 2 \\ -2x + (a+4) \cdot y + (a+2) \cdot z = 0 \end{cases}$$

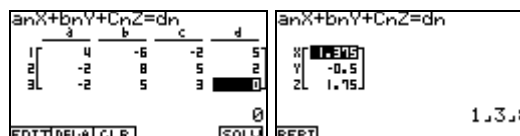
Im Weiteren wird mit den entsprechenden erweiterten Koeffizientenmatrizen gearbeitet.

Die LGS können auch als Schnittproblem zwischen der Ebenenschar $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ a+4 \end{pmatrix} \beta$ und

der Geradenschar $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a+4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -a-4 \\ -a-2 \end{pmatrix} \delta$ interpretiert werden.

1. Fall: Sei $a = 1$ gegeben:

Über das EQUA- Menü können nach Wahl **F1: Gleichzeitig** und $n=3$ (**F2**) die Werte der Koeffizientenmatrix eingegeben werden. Nach Bestätigung durch **EXE** folgt das Ergebnis (siehe rechte Abbildung).



(Der Schnitt zwischen Ebene und Gerade führt zu einem Punkt mit dem rechtsstehenden Ortsvektor)

2. Fall: Sei $a = -1$ gegeben:

Über das CAS- Menü kann eine Matrix direkt eingegeben werden. Es gilt für die Eingabe: [[Zeile1][Zeile2]...].

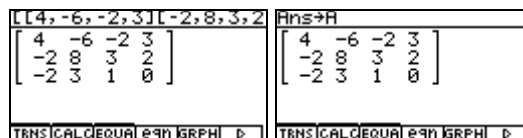
Nach Bestätigung durch **EXE** sollte man die Matrix (auf A) abspeichern (siehe Abbildung).

Berechnungen mit Matrizen können durch die **OPTN**-Taste aufgerufen werden. Über das Untermenü **MAT** (**F2**) erhält man den Befehl **6:Rref**.

Das LGS ist in diesem Fall nicht lösbar!

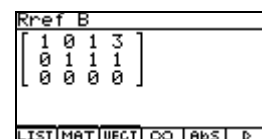
(Es gibt keinen Schnitt zwischen Ebene und Gerade).

Das **EQUA**- Menü würde in diesem Fall „Ma-Fehler“ ausgeben!

**3. Fall: Sei $a = 2$ gegeben:**

Die Eingabe erfolgt wiederum im CAS- Menü und man erhält

die Lösung $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\}$ (ist direkt ablesbar).



(Die Lösungsmenge ist vergleichbar mit einer Schnittgeraden)

Das **EQUA**- Menü würde in diesem Fall „Ma-Fehler“ ausgeben!

4. Fall: Sei ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ gegeben:

Über das CAS- Menü können auch Matrizen mit Parametern eingegeben werden, wobei der zu beachtende Parameter (hier A) nicht schon belegt sein sollte. In dem Fall sollte man vorher die Variablen löschen (siehe Abbildung; Untermenü einmal über **F6** blättern).

Die Lösung mit Parameter über **Rref** ist mit **Vorsicht** zu genießen, da der Rechner dem Anwender zuliebe schon weitestgehend kürzt. Bei dem oben gewählten Beispiel würde $a=2$ nicht als mehrdeutiges Lineares Gleichungssystem erkannt werden.

Über das **EQUA**- Menü ist das Arbeiten mit Parametern nicht möglich!



(2) Anwendung der jeweiligen Möglichkeiten zur Lösung eindeutig lösbarer LGS mit n linearen Gleichungen und n Variablen, $n > 3$

EQUA- Menü: Die Anzahl der Unbekannten kann nachdem **F1: Lösung** gewählt wurde erhöht werden.

CAS- Menü: Die Listen- und Spalteneinträge können durch direkter Eingabe ([[Zeile1][Zeile2]...]) erhöht werden.

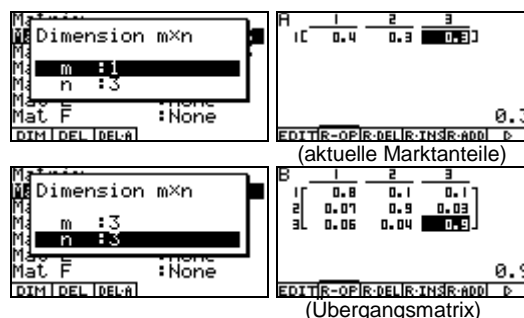
(3) Operationen mit Matrizen

Auf dem Markt für Kreuzfahrtschiffe teilen sich drei große Konkurrenten und einige kleine Werften, die hier vernachlässigt werden sollen, die Marktanteile. Die größte Werft (A) konnte bislang 40 % Marktanteil verzeichnen. Die anderen beiden teilen sich die Marktanteile mit je ca. 30%. Die Veränderung der Marktsituation zum nächsten Kalenderjahr soll aus der folgenden Tabelle ersichtlich sein:

Marktanteile nach: von:	Werft A	Werft B	Werft C
Werft A	80 %	10 %	10 %
Werft B	7 %	90 %	3 %
Werft C	6 %	4 %	90 %

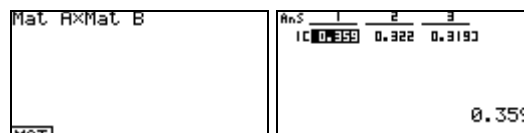
MatrizenmultiplikationRUN- Menü:

Es besteht durch Wahl von MAT (F1) die Möglichkeit Matrizen einzugeben. Nach Definition der Dimension können die Einträge nach Bestätigung (EXE) direkt eingegeben werden.

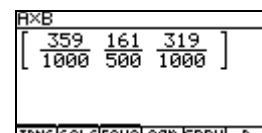


Nach Eingabe der Koeffizienten sollte die ursprüngliche Eingabemaske ($2 \times \text{ESC}$) wieder aufgerufen werden, um folgendes einzugeben ($\text{Mat} = \text{SHIFT} + 2$) bzw. anschließend zu bestätigen:

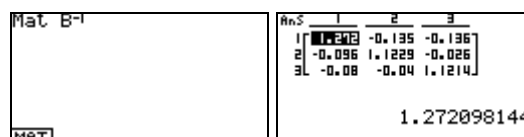
Das Ergebnis sind die Marktanteile im nächsten Kalenderjahr; sie ergeben sich aus der Multiplikation mit dem Vektor der Marktanteile und der Übergangsmatrix.

CAS- Menü:

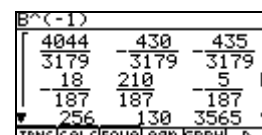
Der Vektor der Marktanteile ist eine $n \times 1$ -Matrix, die entsprechend eingegeben werden kann (vgl. (1)). Nach geeigneter Abspeicherung können Matrix und Spaltenvektor multipliziert werden (also ohne **Mat** voranzustellen).

Potenzen von Matrizen bzw. die Inverse zu einer Matrix

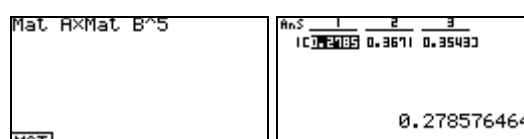
Die Inverse einer Matrix kann durch nebenstehende Eingabe im RUN- Menü bestimmt werden ($\text{Shift} + \text{I}$).



Durch die Eingabe „B^(-1)“ bestimmt man im CAS- Menü die Inverse einer Matrix. (Die Eingabe wie im RUN- Menü ist auch möglich).



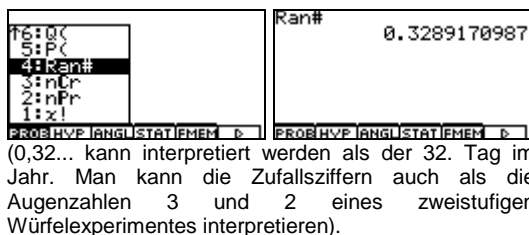
Um das Käuferverhalten nach 5 Jahren zu bestimmen, wird die Übergangsmatrix wie nebenstehend potenziert. Analog nur ohne den Befehl **Mat** erfolgt die Eingabe im CAS- Menü.



4. Stochastik

(1) Zufallszahlen erzeugen

Es besteht die Möglichkeit Zufallsexperimente mit dem FX 2.0 zu generieren. Dazu nimmt man sich z.B. die ersten drei Ziffern einer Zufallszahl; die ist über das CAS- Menü durch **OPTN** und **F1** zu erhalten.

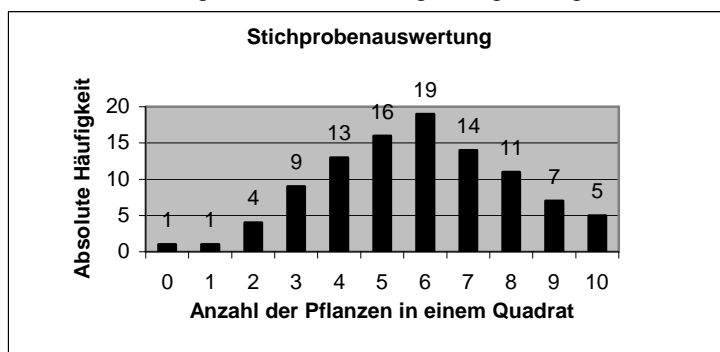


(2) Arbeiten mit Daten

Eine besondere Pflanzenart bewuchert eine Wiesenfläche zu ca. 6% der Gesamtfläche. Mehrere Wissenschaftler mussten zur Sicherheit die Bewucherung bestätigen und führten deshalb stichprobenartige Messungen in Quadraten durch, die bis zu 100 Pflanzen fassen können. Die Reihenfolge der Auswertungen ist für die Ergebnisse entscheidend (Verwelken der Pflanzen etc.), so dass in einer Versuchsreihe (10 Messungen) besonders auf den chronologischen Verlauf zu achten ist.

(Angelehnt an J. Peters: „Stochastik: von null bis eins“, Freiburger Verlag)

Die Auswertung von 100 Messungen ergab folgendes Bild:



(mehr als 10 Pflanzen waren in keinem Quadrat)

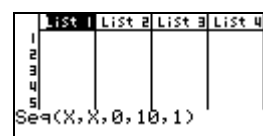
Darstellen von Punkten durch Datenplots

Daten können im STAT- Menü in Listen eingetragen werden. Zahlen von 1 bis n können vereinfacht über den Befehl 3:Seq ausgegeben werden. Den Befehl erhält man über die **OPTN**-Taste.

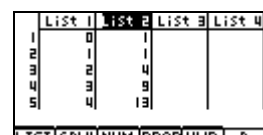


Der erste Term gibt die Zahlenfolge an, der zweite Term die Variable; Null ist der Startwert, 10 der Endwert und die Schrittweite ist 1.

Die Anzahl der Pflanzen werden im Beispiel in Liste 1 übertragen.



Die anderen fehlenden Werte, im Beispiel ist dies die Anzahl der Pflanzen in einem Quadrat, können direkt in Liste 2 eingegeben werden.

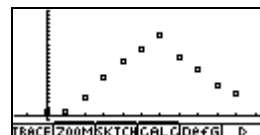


Wichtig: Für Listenberechnungen muss der Cursor in der Kopfzeile der Ergebnisliste sein!

Für die Darstellung der Daten wählt man zunächst über GRPH (F1) den Befehl 5:Set. Anschließend trägt man die geforderten Werte in die Eingabemaske. Es stehen über Graph Type weitere Darstellungsmöglichkeiten zur Verfügung (Histogramm, xy-Line, ...). Die Eingabemasken ändern sich entsprechend!



Über GRPH (F1) und weiter mit 1:S-Gph1 erhält man die Darstellung in der Abbildung zur Anzahl der Pflanzen in einem Quadrat.

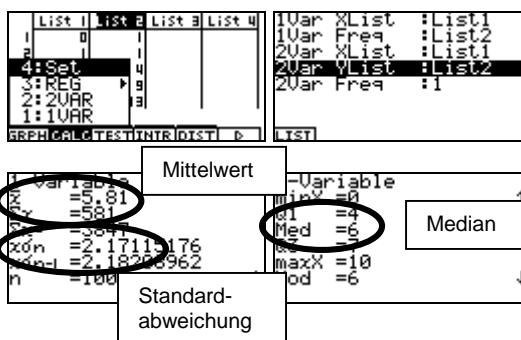


Statistische Auswertung von Daten – Mittelwert, Median

Für die Auswertung der eingegebenen Daten sollte man wie in den zwei Abbildungen rechts vorgehen.

(hier ist 1Var XList die Liste der Merkmalsausprägungen, 1Var Freq ist die Liste der absoluten Häufigkeiten).

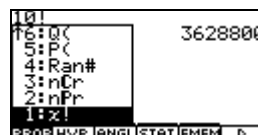
Nachdem die Angaben bestätigt wurden, kann man über das Untermenü CALC (F2) durch 1:1Var rechtsstehende Werte erhalten (siehe Abbildungen). Durchschnittlich sind 5,81 Pflanzen in einem Quadrat gefunden worden. Die Standardabweichung ist ca. 2,17, der Median, der Wert, der nach Größensortierung in der Mitte steht, beträgt 6.



Berechnung von Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Über die OPTN- Taste im RUN- Menü und anschließend einmaligen Blättern (F6) erhält man das Untermenü von PROB (siehe Abbildung).

Die Auswertung einer Versuchsreihe kann bei Verwechslung auf $10! = 3628800$ Möglichkeiten erfolgen.



Mit dem Untermenü kann Folgendes berechnet werden:

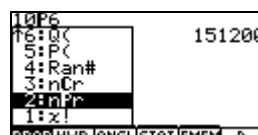
1: $x!$ = Fakultät einer Zahl

$$2: nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$3: nCr = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

, n über r'

Von den 10 Tests sollen nur die ersten 6 der Reihe nach geprüft werden. Bei Verwechslung kann dies auf $\frac{10!}{(10-6)!} = 151200$ Möglichkeiten erfolgen.



(3) Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung und der Normalverteilung

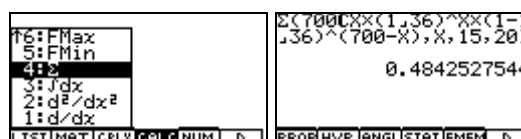
Zwei Würfel werden geworfen. Das Ereignis E bestehe darin, beim 700-maligen Werfen mit zwei Würfeln mindestens 15- und höchstens 20- mal zwei Sechsen zu erhalten. Das Ereignis H ist die Anzahl zweier Sechsen, die mit einer 50-%igen Mindestwahrscheinlichkeit gewürfelt werden.

(Angelehnt an: Niedersachsen Mathematik, Zentralabitur 2007, CAS Block 2a)

Binomialverteilung:

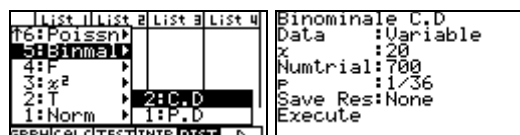
Über die OPTN- Taste erhält man im RUN- Menü rechtsstehendes Untermenü (siehe Abbildung). Danach gibt man wie in der rechtsstehenden Abbildung den entsprechenden Befehl ein.

(Der erste (komplexe) Ausdruck ist die Zahlenfolge, nach dem Komma folgt die Variable x. Der dritte Eintrag ist die Unter-, der vierte Eintrag die Obergrenze).

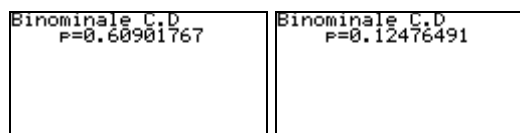


Eine andere Möglichkeit zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten besteht über das STAT- Menü. Nach Aufrufen des Untermenüs 2:CD (siehe Abbildung links) erhält man eine Eingabemaske (siehe Abbildung rechts). Über Save Res können die Ergebnisse in eine Liste abgelegt werden.

Nach Eingabe und Bestätigung durch $\boxed{\text{EXE}}$ erhält man die Zwischenergebnisse zur Aufgabe (links $P(X \leq 20)$, rechts $P(X \leq 14)$). Nach Subtraktion erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit 0,4843.



(P.D. = Einzelwahrscheinlichkeiten
C.D.= kumulierte Wahrscheinlichkeiten).

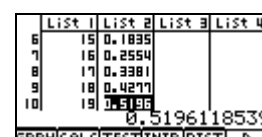


Um das Ereignis H zu erhalten, sollten zur Vorbereitung in die Liste 1 (STAT- Menü) mit dem Befehl **Seq** die Werte 10 bis 30 (grobe Abschätzung) ausgegeben werden (siehe (2)).

Die Wahrscheinlichkeiten können wie in (3) über DIST ($\boxed{\text{F4}}$) berechnet werden. Für die Eingabemaske ist folgende Eingabe zu tätigen:

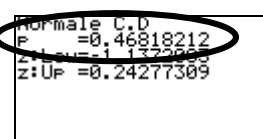
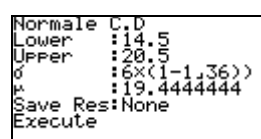


Nach der Berechnung erhält man durch 2x $\boxed{\text{ESC}}$ die Binomialverteilung, ausgegeben in Liste 2. Für das Ereignis H gilt: man kann von einer Mindestwahrscheinlichkeit von 50% ausgehen, wenn mindestens 19 mal zwei Sechsen gewürfelt wird.



Normalverteilung:

Man geht für die Bestimmung des Ereignisses E ohne eine Liste vorzubereiten analog wie bei der Binomialverteilung vor:



(vgl. (3))

Die Standardabweichung als auch der Erwartungswert können als *Rechnung* (vgl. σ in der mittleren Abbildung) eingegeben werden!

(4) Regression

In einer Messreihe, bei denen fünf Erwachsene teilnahmen, wurden die Körpergröße und das Körpergewicht auf Abhängigkeit untersucht. Das Ergebnis ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

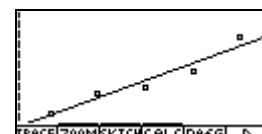
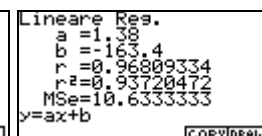
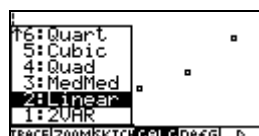
Körpergröße in cm	170	175	180	185	190
Körpergewicht in kg	72	80	82	89	102

Für die Darstellung der Messdaten geht man wie in (2) vor.

Damit die Abhängigkeit nachgewiesen werden kann, berechnet man über CALC ($\boxed{\text{F4}}$) die Lineare Regression (2: Linear).

Die Abhängigkeit zwischen den Messwerten (Größe zu Gewicht) ist relativ groß (der Korrelationskoeffizient r ist nahe der 1).

Zur Darstellung bestätigt man in der Ergebnismaske mit $\boxed{\text{F6}}$ (Draw) und erhält die rechtsstehende Abbildung.

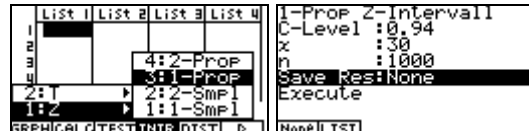


(5) Konfidenzintervalle

Ein Hersteller von Platinen ist stolz auf eine 2-%ige Ausschussquote seiner Produkte. Um zusätzliche Sicherheit zu erhalten, wurde eine großangelegte Kontrolle von 1.000 Platinen durchgeführt. Dabei stellte man fest, dass 30 Platinen nicht in Ordnung waren.

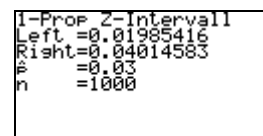
Beurteilen Sie mit einem Sicherheitsniveau von 94 %, ob das Qualitätsmanagement wirklich zufrieden sein kann.

Um mit der im Rechner hinterlegten angenäherten Formel zu arbeiten, ruft man im STAT- Menü entsprechende Untermenüs auf (siehe Abbildungen). Nach Bestätigung erhält man die rechtsstehende Eingabemaske.



C- Level ist das Sicherheitsniveau, x ist die Anzahl der tatsächlich gefundenen defekten Platinen und n ist der Stichprobenumfang.

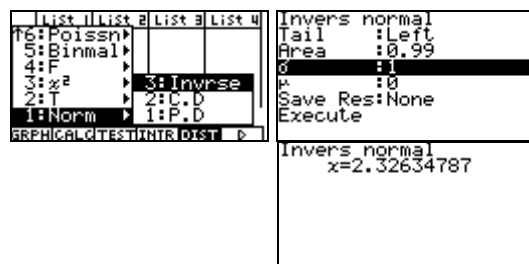
Die Ausschussquote liegt somit mit einer 94-%igen Wahrscheinlichkeit im Intervall [0,0199;0,0401]. Das Unternehmen sollte die Produktionsanlage nochmals überprüfen.



Beschreiben Sie die Auswirkungen auf das Vertrauensintervall, wenn die Sicherheitswahrscheinlichkeit auf 99 % ansteigt.

Tatsächlich ist die „genauere“ Berechnung über $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq c \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx \gamma$ (*) möglich. Es gilt die Beziehung $\Phi(c) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Das c erhält man durch das Invertieren der Normalverteilung: $\Phi^{-1}(\Phi(c)) = c = \Phi^{-1}\left(\frac{1+0,99}{2}\right)$,



bzw. über das STAT- Menü wie in den drei Abbildungen.

Im Falle der Standard- Normalverteilung ($\sigma=1$, $\mu=0$) ist Area das Sicherheitsniveau.

Anschließend gibt man die linke Seite der Ungleichung (*) mit den Betragszeichen im RUN- Menü ein (OPTN+F2+1). Die zweite Funktionsgleichung ist die rechte Seite der Ungleichung (*) mit $c=2,33$.



Das Ergebnis erhält man als Schnittpunktproblem (vgl. 1.Grundlagen (5)).

Die Ausschussquote liegt somit mit einer 99-%igen Wahrscheinlichkeit im Intervall [0,0197;0,0453]. Auch hier gilt, dass das Unternehmen die Produktionsanlage nochmals überprüfen sollte.

