Lösen Linearer Gleichungssysteme mit CASIO-Grafikrechnern mit CAS

Lineare Gleichungssysteme (LGS) können in Kurzform in einer **Matrix** notiert werden. Dabei werden nur die Koeffizienten und die rechten Seiten der Gleichungen (Normalform) notiert:

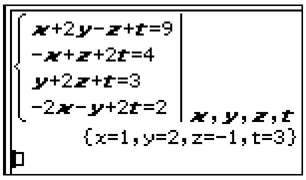
LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

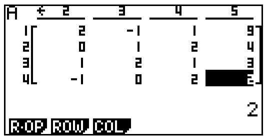
LGS als Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

LGS im ClassPad 330



LGS im Algebra FX 2.0 Plus



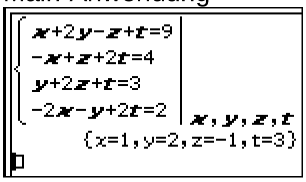
Zum Lösen eines linearen Gleichungssystems wird dies, z.B. mithilfe des Gauss-Verfahrens, auf **reduzierte Stufenform** gebracht.

Beim **ClassPad 330** wird zum Lösen von Gleichungssystemen die Taste in der 2D-Tastatur genutzt.

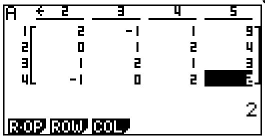
Beim **Algebra FX 2.0 Plus** dient hierzu der Befehl **RREF** (reduced row echelon form), der eine Matrix in die reduzierte Stufenform bringt. Dabei werden alle oberhalb der Diagonalen stehenden Einträge eliminiert und die Diagonalelemente normiert. Die Lösungsmenge kann somit direkt abgelesen werden.

Hinweis zum
- Algebra FX 2.0 Plus: Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme können auch in der EQUA-Anwendung gelöst werden.
- ClassPad 330: Lineare Gleichungssysteme können auch mit dem rref-Befehl gelöst werden.

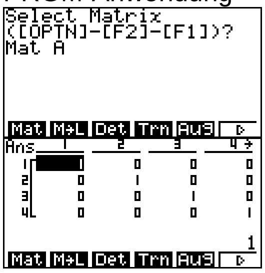
ClassPad 330
Main-Anwendung



Algebra FX 2.0 Plus
RUN-MAT-Anwendung



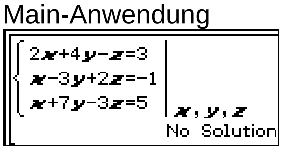
PRGM-Anwendung



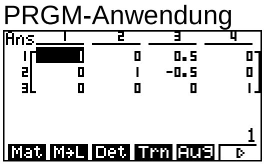
L={(1;2;-1;3)}

Algebra FX 2.0 Plus:
Hat die angezeigte Matrix in der letzten Zeile außer im letzten Eintrag nur Nullen, so ist das lineare Gleichungssystem nicht lösbar. Der letzten Zeile der Matrix entspricht hier die Gleichung 0=1!

ClassPad 330
Main-Anwendung



Algebra FX 2.0 Plus
RUN-MAT- und PRGM-Anwendung

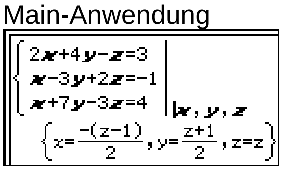


L={ }

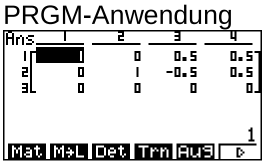
Algebra FX 2.0 Plus:
Hat die Matrix in der letzten nicht ganz verschwindenden Zeile mehr als zwei Einträge, so ist die Lösungsmenge unendlich, denn die Gleichung 0=0 ist immer erfüllt.

Die Lösungsmenge erhält man, indem für entsprechende Variablen Parameter einsetzt werden.

ClassPad
Main-Anwendung



Algebra FX 2.0 Plus
RUN-MAT- und PRGM-Anwendung



Sei $z = t \Rightarrow$ L=$\{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t; t) | t \in \Re\}$

Aufgabenbeispiel: Entscheiden Sie, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}11\\-18\\29\end{pmatrix}$

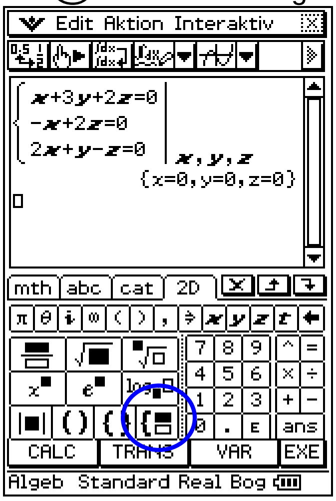
Lösung mit CASIO-Grafikrechnern mit CAS:

a) Aufstellen der Vektorgleichung: $r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Diese führt auf das LGS $\begin{cases} r+3s+2t=0\\ -r+2t=0\\ 2r+s-t=0\end{cases}$

ClassPad 330[1]

Öffnen der Main-Anwendung und der virtuellen Tastatur mit [Keyboard]. Eingeben des linearen Gleichungssystems mithilfe zweimaligem Klickens auf die {▪|-Taste.

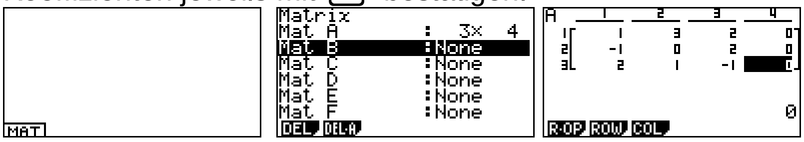
Mit [EXE] die Berechnung ausführen.



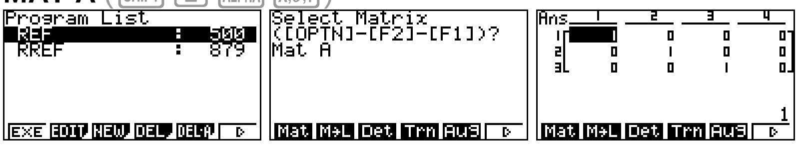
Algebra FX 2.0 Plus + Zusatzprogramm RREF[2]

Öffnen der **RUN-MAT-Anwendung** und des Matrizeneditors mit [F1].

Auswählen einer Matrix mit dem Cursor, anschließend mit [EXE] die Auswahl bestätigen und die Dimension mit [3] [EXE] [4] [EXE] [EXE] und die Koeffizienten eingeben. Die Eingabe der einzelnen Koeffizienten jeweils mit [EXE] bestätigen.



Öffnen der **PRGM-Anwendung**: [MENU] [8]. Mit dem Cursor das Programm RREF auswählen und mit [EXE] öffnen.
Dann die Matrix, deren Stufenform bestimmt werden soll, eingeben und mit [EXE] die Berechung ausführen lassen:
MAT A ([SHIFT] [2] [ALPHA] [X,θ,T])



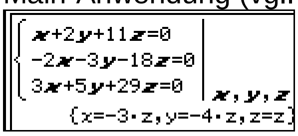
Mit [EXE] wird das Programm beendet.
Zum Berechnen der Stufenform einer weiteren Matrix: erneut [EXE].
Zurück zur RUN-MAT-Anwendung: [MENU] [1].

Das LGS hat r=0, s=0, t=0 als einzige Lösung; die drei Vektoren sind linear unabhängig.

b) Zu lösendes LGS: $\begin{cases} 1r+2s+11t=0\\ -2r-3s-18t=0\\ 3r+5s+29t=0\end{cases}$

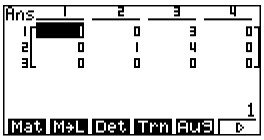
ClassPad 330

Main-Anwendung (vgl. oben)



Algebra FX 2.0 Plus + Zusatzprogramm RREF

RUN-MAT- und PRGM-Anwendung (vgl. oben)



Das LGS hat unendlich viele Lösungen; d.h. die drei Vektoren sind linear abhängig.

[1] Ebenso mit dem ClassPad 300 (Plus) ab Version 3.0.
[2] Die Zusatzprogramme REF und RREF können auf der CASIO-Internetseite www.casio-schulrechner.de im Download-Bereich kostenlos heruntergeladen werden.

Alternative Eingabemethode für den Algebra FX 2.0 Plus

Die Lösung linearer Gleichungssysteme ohne Zusatzprogramme ist auch in der CAS-Anwendung möglich (vgl. auch Handbuch, S. 7-1-33).

7-1-33
Nutzung des CAS- (Computer-Algebra-System) Menüs

- **Rref**

Funktion: Bestimmt die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix. (Darstellung in diagonalisierter Form)

Syntax: Rref Mat

Beispiel **Zu bestimmen ist die reduzierte Zeilenstufenform folgender Matrix:**

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 9 & -9 \\ -5 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Eingabe im CAS Menü

OPTN F2 (MAT) 1 (CALC) 6 (Rref) SHIFT + ([ ) SHIFT + ([ )
(-) 2 , (-) 2 , 0 , (-) 6 SHIFT − ( ]) SHIFT + ([ )
1 , (-) 1 , 9 , (-) 9 SHIFT − ( ])
SHIFT + ([ ) (-) 5 , 2 , 4 , (-) 4
SHIFT − ( ]) SHIFT − ( ]) EXE

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{66}{71} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{147}{71} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{62}{71} \end{bmatrix}$$

- **Ref**

Funktion: Bestimmt die Zeilenstufenform einer Matrix.(Darstellung als obere Dreiecksmatrix)

Syntax: Ref Mat

Beispiel **Zu bestimmen ist die Zeilenstufenform der folgenden Matrix:**

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 9 & -9 \\ -5 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Eingabe im CAS Menü

OPTN F2 (MAT) 1 (CALC) 7 (Ref) SHIFT + ([ ) SHIFT + ([ )
(-) 2 , (-) 2 , 0 , (-) 6 SHIFT − ( ]) SHIFT + ([ )
1 , (-) 1 , 9 , (-) 9 SHIFT − ( ])
SHIFT + ([ ) (-) 5 , 2 , 4 , (-) 4
SHIFT − ( ]) SHIFT − ( ]) EXE

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{62}{71} \end{bmatrix}$$

Hinweis:
Das Gaußsche Eliminierungsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme erzeugt die Zeilenstufenform, wenn man das umgeformte Gleichungssystem formal als erweiterte Matrix darstellt. Damit gestattet der **Rref**-Befehl sofort eine Aussage zur Lösung des Gleichungssystems.

20010901