

## Lösen Linearer Gleichungssysteme mit CASIO-Grafikrechnern

Lineare Gleichungssysteme (LGS) können in Kurzform in einer **Matrix** notiert werden. Dabei werden nur die Koeffizienten und die rechten Seiten der Gleichungen (Normalform) notiert:

<p>LGS</p> $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$	<p>LGS als Matrix</p> $\left( \begin{array}{cccc c} 1 & 2 & -1 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$	<p>LGS im FX-9860G</p>	<p>LGS im FX-9750G und CFX-9850G</p>
--	---	------------------------	--------------------------------------

Zum Lösen eines linearen Gleichungssystems wird dies, z.B. mithilfe des Gauss-Verfahrens, auf **reduzierte Stufenform** gebracht.

Bei Grafikrechnern dient hierzu der Befehl **Rref** (reduced row echelon form), der eine Matrix in die reduzierte Stufenform bringt.

Dabei werden alle oberhalb der Diagonalen stehenden Einträge eliminiert und die Diagonalelemente normiert. Die Lösungsmenge kann somit direkt abgelesen werden.

Hinweis: Eindeutig lösbar lineare Gleichungssysteme können auch in der EQUA-Anwendung gelöst werden.

**FX-9860G**  
RUN-MAT-Anwendung

**FX-9750G/CFX-9850G**  
MAT-Anwendung

**PRGM-Anwendung**

$L = \{(1; 2; -1; 3)\}$

Hat die angezeigte Matrix in der letzten Zeile außer im letzten Eintrag nur Nullen, so ist das lineare Gleichungssystem nicht lösbar.

Der letzten Zeile entspricht hier die Gleichung  $0=1!$

**FX-9860G**  
RUN-MAT-Anwendung

**FX-9750G/CFX-9850G**  
MAT- und PRGM-Anwendung

$L = \{ \}$

Hat die Matrix in der letzten nicht ganz verschwindenden Zeile mehr als zwei Einträge, so ist die Lösungsmenge unendlich, denn die Gleichung  $0=0$  ist immer erfüllt. Die Lösungsmenge erhält man, indem für entsprechende Variablen Parameter eingesetzt werden.

**FX-9860G**  
RUN-MAT-Anwendung

**FX-9750G/CFX-9850G**  
MAT- und PRGM-Anwendung

Sei  $x_3 = t \Rightarrow L = \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t; t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$

**Aufgabenbeispiel:** Entscheiden Sie, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \\ 29 \end{pmatrix}$$

**Lösung mit CASIO-Grafikrechnern:**

a) Aufstellen der Vektorgleichung:  $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Diese führt auf das LGS 
$$\begin{cases} r + 3s + 2t = 0 \\ -r + 2t = 0 \\ 2r + s - t = 0 \end{cases}$$

### FX-9860G<sup>1</sup>

Öffnen der **RUN-MAT-Anwendung** (Im SETUP sollte der Input-Mode auf Math gestellt sein!).

Eingeben des Rref-Befehls:

**OPTN** **MAT** (**F2**) **▶** (**F6**) **Rref** (**F5**) **EXIT** **EXIT**

und der Matrix:

**MATH** (**F4**) **MAT** (**F1**) **mxn** (**F3**) **3** **EXE** **4** **EXE**

Die Koeffizienten mithilfe des Cursors eingeben.

Mit **EXE** wird die Berechnung ausgeführt:

$$\text{Rref} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Das LGS hat  $r=0, s=0, t=0$  als einzige Lösung; die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Hinweis: Die Ergebnis-Matrizen werden im Antwortspeicher (Mat Ans) abgelegt. Sie können auch unter einer Variablen abgespeichert werden, z.B. Mat R:

$$\text{Mat Ans} \rightarrow \text{Mat R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup> Ab Version 1.05. Das Update kann auf der CASIO-Internetseite [www.casio-schulrechner.de](http://www.casio-schulrechner.de) im Download-Bereich kostenlos heruntergeladen werden.

<sup>2</sup> Die Zusatzprogramme REF und RREF können kostenlos heruntergeladen werden, vgl. oben.

### FX-9750G/CFX-9850G + Zusatzprogramm RREF<sup>2</sup>

Öffnen der **MAT-Anwendung**.

Eingeben der Dimension mit **3** **EXE** **4** **EXE** **EXE** und der Koeffizienten. Die Eingabe der einzelnen Koeffizienten jeweils mit **EXE** bestätigen.

Öffnen der **PRGM-Anwendung**: **MENU** **log**

Mit dem Cursor das Programm RREF auswählen und mit **EXE** öffnen. Dann die Matrix, deren Stufenform bestimmt werden soll, eingeben:

**OPTN** **MAT** (**F2**) **Mat** (**F1**) **A** (**ALPHA**) **(X,θ,T)**

Mit **EXE** die Berechnung ausführen lassen:

Mit **EXE** wird das Programm beendet. Zum Berechnen der Stufenform einer weiteren Matrix: erneut **EXE**. Zurück zur RUN-Anwendung: **AC/ON**.

Die Ergebnis-Matrizen werden im Antwortspeicher (Mat Ans) und auch im Matrizenspeicher abgelegt: Mat Z enthält die zuletzt berechnete reduzierte Stufenform.

b) Zu lösendes LGS: 
$$\begin{cases} 1r + 2s + 11t = 0 \\ -2r - 3s - 18t = 0 \\ 3r + 5s + 29t = 0 \end{cases}$$

**FX-9860G****RUN-MAT-Anwendung**
**FX-9750G/CFX-9850G + Zusatzprogramm Rref****MAT-Anwendung**
**PRGM-Anwendung**

Das LGS hat unendlich viele Lösungen; d.h. die drei Vektoren sind linear abhängig.

**Alternative Eingabemethode für den FX-9860G**

Eingeben der Matrix: **MATH**(F4) **MAT**(F1) **mxn**(F3) **3** **EXE** **4** **EXE** **EXE**  
und der Koeffizienten.

Die Matrix der Variablen Mat A zuweisen: **→** **Mat**(SHIFT 2) **A**(ALPHA X,θ,T).  
Bestätigen mit **EXE**.

Eingeben des Rref-Befehls: **OPTN** **MAT**(F2) **▶** (F6) **Rref**(F5) **EXIT** **EXIT**  
und der in reduzierte Stufenform umzuwandelnden Matrix: **Mat**(SHIFT 2)  
**A**(ALPHA X,θ,T).

Diese Eingabemethode hat den Vorteil, dass die Matrix abgespeichert ist und beliebig oft aufgerufen werden kann, entweder über

Mat A:

**Mat**(SHIFT 2) **A**(ALPHA X,θ,T)

oder den Matrizeneditor:

**▶MAT**(F3) Auswahl der Matrix mithilfe des Cursors, dann **EXE**