CASIO forum

Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 2/2020

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

die Corona-Pandemie hat unser Land und nicht zuletzt die Schulen stark betroffen. Nicht nur deshalb ist es schön, Ihnen eine Konstante in all den Änderungen anzubieten – das CASIO forum mit interessanten Themenvorschlägen für Ihren Unterricht. Natürlich haben uns Beiträge erreicht, die dieses brandaktuelle Thema betreffen, darunter auch einige, die inzwischen wieder überholt sind. Angesichts der vielen Daten, Zuordnungen, logarithmischen Achsen, Änderungsraten, Hochpunkte, gleitenden Wochendurchschnitte und Verhältnisgrößen ist das wohl nicht überraschend.

Sie finden in diesem Heft zwei Artikel, die zum Rechnen im Kontext der Infektionswelle einladen. Einer befasst sich mit der Optimierung von Testverfahren, der andere beschreibt die Arbeit mit einem Padlet, einer Lernplattform, die eine Bearbeitung von zu Hause aus ermöglicht. Messen und Analysieren in der Mittelstufe ist der Fokus eines Beitrags zu Regressionen, während ein weiterer Zahlenfolgen für Kaninchen behandelt. Die Titelgeschichte befasst sich dieses Mal mit dem Sprachverstehen und der Onlineunterstützung. Unser Autor Dr. Ludwicki lädt Anfänger zum Programmieren mit Python ein, es gibt wieder ein Rätsel und einige Tipps & Tricks.

Einen Überblick über Support-Angebote finden Sie auf unserer Internetseite. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an education@casio.de.

Ihr Redaktionsteam

Aufgabenbeispiel

Der Wasserhahn – Gleichungen und Gleichungssysteme mit Bezügen zur Technik

Autorin: Hilde Kletzl, PH Salzburg

„Bestimme die Zinkmasse, die man mit 40 kg Kupfer zusammenschmelzen muss, um Messing mit 80% Kupfer zu erhalten.“ (Cf. Timischl & Kaiser. Ingenieur-Mathematik 1. Dorner, 1997. S. 250.)

Solche Textaufgaben stehen nicht gerade weit oben in der Beliebtheitsskala. Bedeutsam sind sie für Textarbeit und Vermittlung technischer Zusammenhänge über die Kernthemen der Mathematik hinaus; Hintergrundwissen über Legierungen und die Materialeigenschaften von Messing erleichtert die Arbeit mit Mischungsaufgaben. Möglichkeiten, dieses Wissen in ansprechender Form zu vermitteln, bietet der Einsatz von Lernvideos zum Thema Legierung. Das Ziel ist, den Kontext der Aufgabe erfahrbar zu machen und die sprachliche Kompetenz zum Lösen von Textgleichungen aufzubauen. Sprachdefizite und Heterogenität zeigen sich besonders deutlich bei Textaufgaben.

Fortsetzung auf Seite 2

Gängige Texteinkleidungen beschäftigen sich mit Legierungen, Mischungen von Flüssigkeiten oder auch Prozentanteilen von Salzlösungen. Alkohol mit unterschiedlichen Prozentanteilen wird in der Medizin eingesetzt, Spiritus hält Autoscheiben und die Scheibenwaschanlage im Winter eisfrei.

Der Videoclip als Brückenbauer

Textaufgaben zu Legierungen haben ihre Berechtigung, sie setzen aber Alltagserfahrungen voraus. Z. B. ist der Wasserhahn im Klassenzimmer aus Messing gefertigt und Teil des Alltags. Hersteller von Armaturen bieten Videoclips, die den Fertigungsprozess mit Messing zeigen:
https://www.youtube.com/watch?v=-6c_BmbmY30
(aufgerufen am 25.5.2020)

Dieser Mathematikunterricht ist ganzheitlich: Sprache steht nicht nur im Dienst der Mathematik, sie ist auch selbst Thema, Begriffe müssen erklärt und verankert werden. Die aktive Auseinandersetzung mit Sprache kommt nicht nur der Mathematik, sondern auch anderem Unterricht zugute.

Der Einsatz von Technologie zum Lösen von Gleichungssystemen ist Standard im modernen Mathematikunterricht. Technologie kann noch mehr, z. B. visuelle Helfer ins Klassenzimmer bringen und das Material im Lehrbuch ergänzen. Bei Videos ist die richtige Auswahl des Bildmaterials der erste Schritt zum erfolgreichen Einsatz, ebenso wichtig ist die richtige Einbettung im Unterricht. Die Phase vorher dient der Vorbereitung auf die Inhalte. Das kann ein Umreißen des Themas sein oder eine Vorentlastung hinsichtlich Inhalt und Fachbegriffen. Aber Achtung – es sollten nicht mehr als zehn Begriffe einer Erklärung bedürfen, ansonsten ist das Anforderungsniveau zu hinterfragen. Nach dem Video steht die Auseinandersetzung mit dem Gesehenen im Zentrum: Beantworten von Fragen, Zuordnen von Begriffen und Definitionen, Finden der richtigen Reihenfolge von Informationen im Film – klassische Aufgabentypen.

Internetrecherche – Schätzen und Nähern

Ein 3,92 m² großes Messingblech mit einer Stärke 1 mm hat eine Masse von 33,5 kg (Dichte: $\rho_{CU}=8{,}93\,kg\,dm^{-3}$, $\rho_{Zn}=7{,}14\,kg\,dm^{-3}$). Wie viel kg Kupfer und Zink sind in diesem Blech enthalten?
(Cf. Timischl & Kaiser. Ingenieur-Mathematik 1. Dorner, 1997. S. 266.)
Ein Blick ins Internet bietet zu diesem Beispiel mehr Hintergrund und praktische Übungen zur Überschlagsrechnung: „Messingblech 1000 mal 2000 mal 2 mm kostet 646 Euro (17,46 Euro pro kg, Cu 63 %, Zn 37 %)“
https://www.amazon.de/s?k=messing blech+STAHLOG
(aufgerufen am 25.5.2020)

Mögliche Arbeitsaufgabe:

Vergleiche die Information aus Video und Lehrbuch hinsichtlich Volumen, Masse und Preis. Der Vergleich passt – beim Online-Angebot wiegen 2 m² ca. 37 kg, sie kosten etwa 17 € pro kg, in der Textaufgabe sind es ca. 4 m² mit ca. 34 kg, das Blech hat die halbe Stärke. Die Begründung für 2 mm Stärke: Dickeres Blech ist stabiler, besser im Versand zu handhaben, auch Normen haben Einfluss. Eine Internetsuche nach Rohmaterialien, wie etwa Messingblech, entspricht dem Arbeitsalltag technischer Berufe. In der Praxis ist auch nicht immer genau das ideale Material verfügbar. Der Techniker muss eine Entscheidung treffen – nach Berechnungen.

Algorithmen verstehen mit dem ClassPad II

Gleichungssysteme sind ein guter Einstieg zum Verstehen von Algorithmen. Sie bilden die Basis des Programmierens und sind zentral bei Ausbildungsberufen mit IT-Anteilen.

Bestimme die Konstanten *a* und *b* so, dass eine eindeutige Lösung / keine Lösung / unendlich viele Lösungen vorliegen:

I) $3x + ay + 2z = 5$
II) $-6x + 3y - 2z = -9$
III) $\underline{y + 2z = b}$

(Cf. Timischl & Kaiser. Ingenieur-Mathematik 1. Dorner, 1997. S 271.)

Diese Aufgabe enthält zwei Parameter, dadurch geht die Aufgabe tiefer.

$$\begin{cases} 3x+a\cdot y+2z=5 \\ -6x+3y-2z=-9 \\ y+2z=b \end{cases} \Bigg|_{x,\,y,\,z}$$

$$\left\{x=\frac{-(a\cdot b-9\cdot a+3\cdot b-11)}{3\cdot(2\cdot a+2)},\ y=\frac{-(b-1)}{2\cdot a+2},\ z=\frac{b\cdot(2\cdot}{4}\right.$$

ans[3]

$$z=\frac{b\cdot(2\cdot a+3)-1}{4\cdot a+4}$$

solve(3·(2·a+2)=0, a)

$$\{a=-1\}$$

Diese Eingabe liefert Hinweise, bei welchen Werten von a und b das System aus dem Gleichgewicht kommt. Ist $a=-1$, kommt es zu einer Division durch null, für $a\neq-1$ zu einer eindeutigen Lösung. Der Befehl „eliminate“ lässt das schrittweise Eliminieren einer Variablen zu.
Matrizen bieten auch einen Zugang zur Lösung. Mathematiker sehen, dass D und D_y die Lösungsbringer sind. Das Suchen und Durchschauen von optimalen Lösungsschritten und Abläufen braucht Übung, ein Vergleich der möglichen Schrittfolgen mit der Funktion „eliminate“ hilft – mehrere Lösungswege führen zum Ziel.

eliminate(3x+a·y+2z=5, x, −6x+3y−2z=−9)

$$a\cdot y+\frac{3\cdot y}{2}+z+\frac{9}{2}=5$$

eliminate(ans, z, y+2z=b)

$$a\cdot y+y+\frac{b}{2}+\frac{9}{2}=5$$

solve(ans, y)

$$\left\{y=\frac{-(b-1)}{2\cdot(a+1)}\right\}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}3 & a & 2\\ -6 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$12\cdot a+12$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}5 & a & 2\\ -9 & 3 & -2\\ b & 1 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$-2\cdot a\cdot b+18\cdot a-6\cdot b+22$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}3 & 5 & 2\\ -6 & -9 & -2\\ 0 & b & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$-6\cdot b+6$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}3 & a & 5\\ -6 & 3 & -9\\ 0 & 1 & b\end{bmatrix}\right)$$

$$6\cdot a\cdot b+9\cdot b-3$$

(−2·a·b+18·a−6·b+22)/(12·a+12)

$$\frac{-(2\cdot a\cdot b-18\cdot a+6\cdot b-22)}{12\cdot a+12}$$

(−6·b+6)/(12·a+12)

$$\frac{-(6\cdot b-6)}{12\cdot a+12}$$

Rätselecke

Besondere Primzahlen:

73 ist die Lieblingszahl von Sheldon Lee Cooper aus der Serie „The Big Bang Theory“. Er begründet es in der 73. Folge „Die animalische Amy”:

Die 73 ist die 21. Primzahl, ihre Spiegelzahl, die 37, ist die 12. Primzahl. Deren Spiegelzahl wiederum die 21 ist, das Produkt der Multiplikation von 7 und 3. Es konnte gezeigt werden, dass 73 tatsächlich die einzige Zahl („Sheldon-Primzahl“) mit diesen sehr speziellen Eigenschaften ist.

Nicht ganz so starke Bedingungen haben die „Anagramm-Primzahlen“: So, wie fast jede Permutation der drei Buchstaben von ROT wieder ein Wort ergibt, soll auch die Permutation der Ziffern einer Anagramm-Primzahl wieder eine Primzahl sein; dabei dürfen auch gleiche Ziffern vorkommen.

1. Geben Sie alle Ziffern an, aus denen eine Anagramm-Primzahl bestehen kann.
2. Finden Sie unter den „Schnapszahlen“ die Anagramm-Primzahlen.
3. Finden Sie alle dreistelligen Anagramm-Primzahlen.
4. Gibt es vierstellige, fünfstellige bzw. sechsstellige Anagramm-Primzahlen?

Rekursionsformeln und Kaninchen mit aufgeschobenem Kinderwunsch[1]

Autor: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

Die Fibonacci-Folge ist rekursiv definiert durch $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 3$ mit den Anfangswerten $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$. Die Folge besteht aus den Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich dem Goldenen Schnitt Φ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339.$

Die Padovan-Folge ist nach dem britischen Architekten Richard Padovan benannt, der diese Entdeckung dem niederländischen Architekten und Benediktinermönch Hans van der Laan (1904-1991) zuschreibt. Wegen ihrer Ähnlichkeit mit der Fibonacci-Folge (die Padovan-Folge wird auch als kleine Schwester der Fibonacci-Folge bezeichnet) bietet es sich an, sie im Unterricht danach zu behandeln.

Bei der Padovan-Folge ist das 4. Folgenglied die Summe des 1. und 2. Folgengliedes, also 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, … Es gilt das rekursive Bildungsgesetz $b_{n+1} = b_{n-1} + b_{n-2}$ für $n \geq 4$ mit den Anfangswerten $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ und $b_3 = 1$. Mit dem Folgenmodul des FX-CG50 oder des ClassPad lässt sich diese Folge nicht darstellen, da hier nur auf die beiden Vorgänger eines Folgengliedes zugegriffen werden kann. Mithilfe der Tabellenkalkulation gelingt dies problemlos. Auch die Frage, ob die Folge der Quotienten aufeinanderfolgender Folgenglieder wie bei der Fibonacci-Folge konvergiert, ist schnell beantwortet: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \Psi \approx 1{,}3247.$
Ψ ist eine mathematische Konstante und wird **Plastikzahl** oder **plastische Zahl** genannt. Der Name irritiert, denn er hat nichts mit Kunststoffen zu tun: für den Architekten van der Laan war die räumliche Ausdehnung bestimmend für die Bezeichnung plastisch.

	A	B	C
1	1	1	1
2	2	1	1
3	3	2	2
4	4	3	1.5
5	5	5	1.66667
6	6	8	1.6
7	7	13	1.625
8	8	21	1.61538
9	9	34	1.61905
10	10	55	1.61765
11	11	89	1.61818
12	12	144	1.61798
13	13	233	1.61806
14	14	377	1.61803
15	15	610	1.61804
16	16	987	1.61803
17	17	1597	1.61803
18	18	2584	1.61803
19	19	4181	1.61803
20	20	6765	1.61803

=B2/B1

Abb. 1: Fibonacci-Folge

Rad Norm1 d/c Real SHEET

SHE	A	B	C	D
18	18	86	1.323	
19	19	114	1.3255	
20	20	151	1.3245	
21	21	200	1.3245	
22	22	265	1.325	

=B21÷B20

FILL SORTASC SORTDES

Abb. 2: Padovan-Folge

Die plastische Zahl Ψ ist die einzige reelle Lösung der Gleichung $x^3 - x - 1 = 0$:

```
solve(x^3-x-1=0, x)
                {x=1.324717957}
```

Abb. 3: Lösung mit dem ClassPad

An diese beiden Zahlenfolgen kann im Unterricht nun eine Erkundungsaufgabe im Sinne der Aufgabenvariation anschließen (Hans Schupp spricht von „Wackeln“): Was geschieht, wenn das rekursive Bildungsgesetz geringfügig zu $c_{n+1} = c_n + c_{n-2}$ für $n \geq 4$ mit den Anfangswerten $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ und $c_3 = 1$ verändert wird? Nähert sich auch hier die Quotientenfolge aufeinanderfolgender Folgenglieder einer „goldenen“ Zahl? Mithilfe des Rechners ergibt sich die Folge 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, … Die Quotientenfolge konvergiert ziemlich schnell gegen die Zahl $k = 1{,}46557\ldots$ Welche Bedeutung hat diese Zahl? Sind die Folgenglieder der Folge c nur groß genug, so ergeben sich vier aufeinanderfolgende Glieder der Folge praktisch durch Multiplikation mit k: G, $G \cdot k$, $G \cdot k^2$ und $G \cdot k^3$. Dabei gilt $G \cdot k^3 = G \cdot k^2 + G$ bzw. $k^3 - k^2 - 1 = 0$. Die Lösung dieser Gleichung erfolgt mit dem ClassPad oder mit dem CG50:

```
Math Rad Norm1 d/c Real
Eq:x^3-x^2-1=0
  x=1.465571232
Lft=0
Rgt=0
```

Abb. 4: Lösung mit dem CG50

In seinem Werk „Liber Abaci“ aus dem Jahr 1202 behandelt Fibonacci die bekannte Kaninchenaufgabe: Ein erwachsenes Kaninchenpaar (E) wirft vom zweiten Monat an in jedem Monat genau ein junges Kaninchenpaar (J). Dieses und alle Nachkommen verhalten sich ebenso. Wie viele Kaninchenpaare sind nach einem Jahr vorhanden, wenn kein Kaninchen stirbt oder aus dem Stall entflieht? Die Zahl der Kaninchenpaare pro Generation entspricht den Zahlen der Fibonacci-Folge, sie wächst sehr schnell sehr stark an.

Die Modellierung kann auch mit Leslie-Matrizen erfolgen: Mit der Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und dem Startvektor $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich durch Matrixmultiplikation $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} J & E \end{array} \\ \begin{array}{c} J \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Produkte $M^2 \cdot \vec{v_o}$, $M^3 \cdot \vec{v_o}$, $M^4 \cdot \vec{v_o}$ usw. liefert eine Folge von Vektoren, deren obere Komponente jeweils die Anzahl der erwachsenen Paare und deren untere Komponente die der jungen Paare angibt. In der Summe erhält man die Anzahl der Kaninchenpaare pro Generation:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \ldots$$

1 1 2 3 5 8 13

Dies sind genau die Glieder der Fibonacci-Folge!

Welche Kaninchengeschichte erzählt die oben untersuchte Folge 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, …? Nun gibt es offenbar drei Entwicklungsstufen: Babys (B), Jugendliche (J) und Erwachsene (E). Nur erwachsene Paare können sich fortpflanzen und alle Kaninchen leben ewig weiter.

Mit der zugehörigen Leslie-Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und dem Startvektor $\vec{v_o} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann nun wie oben die Entwicklung der Kaninchenpopulation mithilfe der Matrixmultiplikation untersucht werden. Es ergibt sich eine Folge von Vektoren, deren Komponenten vektorweise aufsummiert die gewünschten Folgeglieder liefern:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ldots$$

1 1 1 2 3 4 6 9 13

Der Kinderwunsch der erwachsenen Kaninchenpaare wird quasi aufgeschoben. Und eine Kaninchengeschichte für die Padovan-Folge? Hier sieht die Leslie-Matrix wie folgt aus:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b & p & v \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ p \\ v \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Offenbar bekommen bereits jugendliche Kaninchenpaare Babys und erwachsene sterben.

[1] Die Idee entstammt einem Beitrag von Simon Biesheuvel, Bussum.

Auswertung von Daten zur Corona-Pandemie im Unterricht

Autorin: Annette Achmus, Studienseminar Hildesheim

In diesem Beitrag wird ein Weg vorgestellt, Mathematikunterricht schülerzentriert, lernförderlich und motivierend umzusetzen, trotz Abwesenheit von der Schule. Voraussetzungen sind: Internetzugang, eine Lernplattform wie z.B. Moodle mit integrierten Videokonferenzen, Headset, die Mail-Adressen der Lerngruppe, ein Whiteboard hinter dem Schreibtisch. Der QR-Code in diesem Beitrag bietet die Möglichkeit, alles zu sehen und zu nutzen. Über eine Mail an die Autorin kann auch Material ergänzt werden.

Eine Folge der Corona-Pandemie ist, dass das Lehren unter Zuhilfenahme digitaler Werkzeuge kreativ weiterentwickelt wird. Die „Hannoversche Allgemeine Zeitung“ publizierte am 17.04.2020 einen umfangreich recherchierten Artikel mit einer Zusammenstellung der Daten zur Corona-Pandemie in Niedersachsen. Auf der Lernplattform wurden der Lerngruppe Materialien zur Verfügung gestellt, Aufgaben vergeben und deren Lösungen mitgeteilt. Es wurde vereinbart, dass der Unterricht als Videokonferenz stattfindet. Daran nahmen alle aus der Klasse teil. Als vorteilhaft empfanden sie die Strukturierung des Tages und die Möglichkeit, sich intensiv und persönlich austauschen zu können. Die Dokumentation dieses Unterrichts wurde in einem „Padlet“ – einer Art digitaler Pinnwand – angelegt, für das alle Leserechte hatten.

Die Frage nach dem Sinn des Lockdowns und dessen Erfolg war der Ausgangspunkt und die intrinsische Motivation zur Beschäftigung mit den vielen Zahlen, die im Zusammenhang mit der Pandemie veröffentlicht wurden. Die Anzahl der Neuinfektionen in Niedersachsen wurde zunächst genauer analysiert. Hier wird meist von einem exponentiellen Wachstum und von der Reproduktionszahl R gesprochen. Die didaktische Analyse des Themas ergibt unter anderem die in der Tabelle dargestellten sachlichen Aspekte, denen mathematische Inhalte zugeordnet sind.

Die Corona-Pandemie in Zahlen:

Zahl der Neuinfektionen
diskrete Änderungsrate, Tabellenkalkulation

Gesamtzahl der nachgewiesenen Infektionen
Summe der Änderungsrate

Gesamtzahl der Genesenen
Überlagerung von Zusammenhängen

Anzahl der benötigten Intensivbetten
Anzahl der Verstorbenen
Prozentrechnung

Übersterberate
Diagrammarten

Modellierung
Näherung, Regression, exponentielles Wachstum, Vergleich von Näherungen und Realität, Hinterfragen der Datensätze und der statistischen Grundlagen

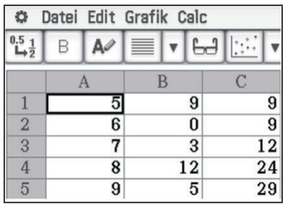
Der Blick in die Zukunft
Extrapolation, rückwirkende Analyse der Modellbildung

Anzahl, Optimierung und Sicherheit der Tests
Reproduktionszahl R
Nachweis der Infektion; Antikörpernachweis
Wahrscheinlichkeit

In einer Videokonferenz wurde das exponentielle Wachstum erarbeitet – unter Nutzung des ClassPad. Die Klasse kannte bis dahin nur ganzrationale Funktionen, die Einführung der Differentialrechnung wurde verschoben, da für die Erweiterung des Abstraktionsniveaus Präsenzunterricht sehr vorteilhaft ist.

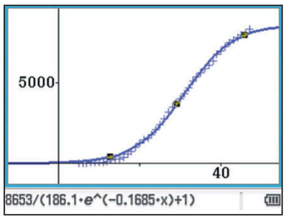
Vorgehen im Unterricht
Im Mittelpunkt der Untersuchungen stand zuerst die Auswertung der Zahl der Neuinfektionen vom 5. März bis zum 17. April. Aus ihr sollte auf die tägliche Gesamtzahl der nachgewiesenen Infizierten geschlossen werden. Die Tabellenkalkulation des ClassPad ermöglicht die grafische Darstellung der Neuinfektionen als Säulendiagramm. Anhand dieser Zahlen kann durch Summenbildung auf die Gesamtzahl der Infizierten geschlossen werden.
Im Online-Unterricht wurde auch der Einsatz des ClassPad erprobt: In einer „Stillarbeitsphase“ wurden mittels einer Anleitung die vorliegenden Daten eigenständig bearbeitet. In der Videokonferenz konnten Fragen direkt gestellt werden; Teilnehmer sehen die Lehrperson und das Whiteboard. Eine gemeinsame Schreibfläche, ein öffentlicher und ein persönlicher Chat sowie eine Dokumentationsfläche stehen zur Verfügung. Zusätzlich können Dateien durch den Blick auf den Bildschirm des Präsentierenden gezeigt werden, so auch die Arbeit mit dem ClassPad-Manager. Die Schülerinnen und Schüler konnten ihre Rechner nur über ihre Kamera zeigen. Hier gibt es noch Verbesserungspotenzial.

Nutzung der Tabellenkalkulation
Die durchnummerierten Tage werden in Spalte A eingetragen, die Zahl der Neuinfektionen in der Spalte B. Die Summe der Zuwächse kommt in die Spalte C über den Befehl „Edit, Füllen, Mit Wert füllen“.



	A	B	C
1	5	9	9
2	6	0	9
3	7	3	12
4	8	12	24
5	9	5	29

Interessant ist die Darstellung als Grafik und die mathematische Modellierung durch Regression. Die Grafik wird über die Scatter-Funktion erstellt. Durch Probieren reift die Erkenntnis, dass eine logistische Regression die Entwicklung der Gesamtzahl der Infizierten recht gut annähert.



Eine online geführte Diskussion über die Qualität von Näherungen bereicherte den Unterricht. Durch die Möglichkeit, sich mittels Chat am Gespräch zu beteiligen, fühlten sich auch Zurückhaltende zur Mitarbeit animiert.
Das Ergebnis der Regression wurde als Ausgangspunkt für die Untersuchung einer bisher unbekannten Funktionsklasse genutzt.

$$N(t) = \frac{8653}{186 \cdot e^{-0{,}1685 \cdot t} + 1}$$

Der Einstieg in das exponentielle Wachstum und die Einführung des Grenzwertbegriffes gelingt motivierend und schülernah, wenn die Teilfunktion $f(t) = e^t$ zu $f(x) = 2^x$ vereinfacht wird.
Die unterschiedlichen Modelle des Wachstums wurden verglichen, sodass alle einen Überblick über das exponentielle, das vergiftete und das logistische Wachstum bekamen. Die während der Videokonferenzen entstandenen Tafelbilder dienten als Gesprächsprotokolle.
Auch der Reproduktionsfaktor R wurde untersucht und mit dem ClassPad für alle Tage ab dem 12. März berechnet. Dies gab einen sehr guten Einblick in die Effektivität der Maßnahmen zur Einschränkung der Pandemie.

Fortsetzung: Auswertung der Daten zur Corona-Pandemie

Als weiteres Thema ist die Auswertung der Güte eines Antikörpertests geplant. Die Möglichkeit der Nutzung des Datenmaterials in anderen Schulformen zeigte sich im Präsenzunterricht einer Berufseinstiegsklasse (Ziel: Hauptschulabschluss). Die Schüler bearbeiteten das Arbeitsblatt und errechneten die Summen, weitgehend ohne Taschenrechner in Einzelarbeit (Einhalten der Abstandsregel!). Die Gruppe bemerkte im Gespräch, dass die Zahl der Infizierten sehr schnell wächst. So entwickelten sie eine Vorstellung von exponentiellem Wachstum, welches sie qualitativ darstellen konnten. Das Plakat wurde zeitgleich von je einem Schüler bearbeitet. Es zeigt die entstandene Vorstellung zu dem erwarteten Trend im Vergleich mit neueren Daten, dem tatsächlichen Verlauf. Hierdurch wurde eine Sensibilisierung für die Wichtigkeit der Einhaltung der Hygiene- und Abstandsregeln erreicht Die Bearbeitung der Daten zur aktuellen Situation, die das Leben erheblich verändert, hat sehr motiviert – unabhängig von Bildungsgrad und schulischem Niveau. Ausgehend von der eigenhändigen Berechnung des Wachstumsprozesses konnte bei allen eine Vorstellung zu exponentiellem Wachstum und die Bereitschaft, sich mit Informationen kritisch auseinanderzusetzen, weiterentwickelt werden. Der digitale Unterricht, gestützt durch die virtuelle Präsenz, motivierte die Schülerschaft, sich gemeinsam und sehr intensiv mit mathematischen, medizinischen und technischen Aspekten auseinanderzusetzen.

Ein Ersatz für den analogen Unterricht kann dies nicht sein. Die Arbeit am Rechner ist für alle Beteiligten anstrengend und häufig nicht genauso effektiv wie der Unterricht in der Schule. Arbeiten unter Einhaltung der Distanz kann lernförderlich und anregend gelingen; auch das gemeinsame Arbeiten an einem Handlungsprodukt ist möglich, erfordert jedoch mehr Zeit. Eine Verbesserungsmöglichkeit ist ein stabiles Internet mit ausreichender Bandbreite sowie W-LAN in den Klassenräumen. Dann ist auch der Einsatz von mobilen Endgeräten mit kooperativen Tools für den Unterricht möglich.

Sie sind herzlich eingeladen, das Padlet über den QR-Code anzusehen, die Dateien zu ergänzen und zu nutzen.

Online-Angebote

Einführung in die Bedienung

Online-Seminare:
Auf www.casio-schulrechner.de können Sie sich unkompliziert zu den Online-Seminaren von CASIO anmelden. Stellen Sie unseren Schulkoordinatoren dort Fragen zur Bedienung oder zur weiteren vielfältigen Nutzung unserer Rechner und Software. Diese Online-Seminare sind bestens geeignet, um sich einzeln oder in kleinen Gruppen zu informieren. Sie können sich jederzeit anmelden, um Ihre Themen bzw. Terminwünsche anzugeben.

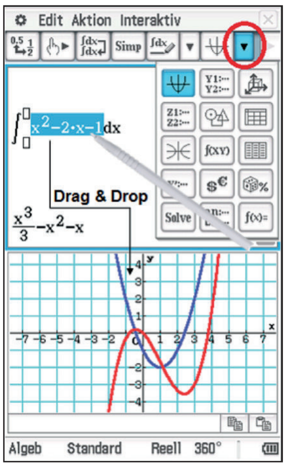
YouTube:
Auf dem YouTube-Kanal „CASIO Schulrechner" können Sie auf hilfreiche Videos und Aufgabenbeispiele zurückgreifen, in denen Sie mehr über den Funktionsumfang und die Bedienung der Rechner erfahren. Zu allen Modellen der ClassWiz-Serie und zu den Grafikrechnern finden Sie eine Vielzahl an Tutorials.

Twitter & Facebook:
Folgen Sie uns auf dem Twitterkanal @CasioSchulR und auf der Facebook-Seite @casioschulrechner, um sich über aktuelle Themen zu informieren.

Tipps & Tricks

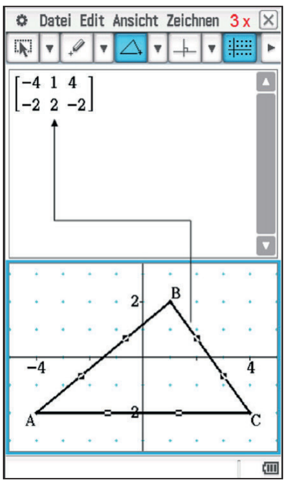
Austausch zwischen Main und Geometrie

Im Haupt-Rechenbereich „Main" des ClassPad II ist es möglich, den Bildschirm zu teilen. In der unteren Hälfte des Bildschirms erscheint dann eine der anderen Apps des ClassPad und es können Daten ausgetauscht werden: Terme werden markiert und ins 2D- oder 3D-Koordinatensystem gezogen, sodass die zugehörigen Graphen erscheinen, Matrizen werden in die Tabellenkalkulation übertragen und umgekehrt – probieren Sie es aus.

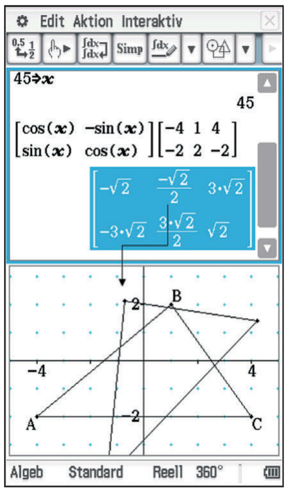


Der Austausch von Objekten aus der und in die Geometrie-App ist ebenfalls interessant.

Im unteren Bereich der Geometrie-App kann mit einem einzigen Tippen ein Dreieck gezeichnet werden. Werden die drei Seiten markiert und in den Rechenbereich hochgezogen, dann stellt der ClassPad dies als Streckenzug-Matrix dar.



Dieser Streckenzug kann so im oberen Fenster beispielsweise mittels einer weiteren Matrix gedreht und das Ergebnis unten wieder eingefügt werden.



Auch andere geometrische Objekte können so in weitere Darstellungsformen umgewandelt und berechnet werden – testen Sie es.

Regression mit elementaren Methoden in der Sekundarstufe I

Autor: Michael Bostelmann, Mons-Tabor-Gymnasium Montabaur

Bei dem vorliegenden Artikel handelt es sich um den ersten Teil einer Reihe zum Thema Regression. In diesem Teil geht es darum, eine Funktion mit elementaren Methoden der Sekundarstufe I an Messwerte anzupassen. In den folgenden Teilen analysieren wir die Regression aus verschiedenen Perspektiven der Oberstufe (Analysis, Analytische Geometrie, Lineare Algebra). Zum Abschluss werfen wir dann noch einen Blick auf die Kenngrößen, die im Zusammenhang mit einer Regression angegeben werden.

1. Messung

Um den Zusammenhang zwischen Durchmesser d und Umfang U eines Kreises zu untersuchen, werden Euro-Münzen vermessen. Die Messung des Umfangs ist gar nicht so einfach, sodass hier ein relativ großer Messfehler entsteht. Dies ist durchaus beabsichtigt, da es um die Auswertung von fehlerbehafteten Daten geht.

Das Ergebnis könnte so aussehen:

Münzen	1 ct	2 ct	5 ct	10 ct	20 ct	50 ct	1 €	2 €
d (cm)	1,7	1,8	2,1	2,0	2,2	2,4	2,3	2,5
U (cm)	5,5	6,1	7,0	6,3	7,4	7,6	7,5	8,3

2. Auswertung

Gesucht ist eine Funktion U, die den Zusammenhang zwischen Durchmesser d und Umfang U möglichst gut beschreibt. Was genau „möglichst gut“ bedeutet, wird erst im weiteren Verlauf der Reihe quantitativ betrachtet. Vorerst vertrauen wir auf ein qualitatives „Bauchgefühl“. Eine erste Modell-Vermutung legt die grafische Darstellung nahe.

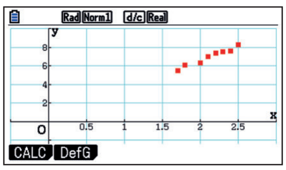


Abb. 1: Plot der Messergebnisse

Da es um „möglichst gut“ und nicht um „exakt“ geht, darf die erste Frage nicht lauten: „Liegen die Punkte auf einer Geraden?“, sondern eher: „Liegen die Punkte auf einer geraden Straße, oder macht diese eher eine Links- bzw. Rechtskurve?“. Bei der Beantwortung dieser Frage hilft der „schräge Blick“. Dabei wird etwa vom Koordinatenursprung aus flach über den Plot geblickt.

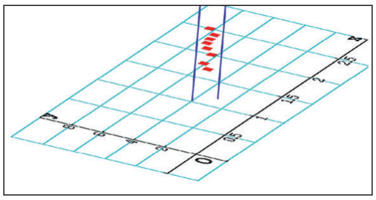


Abb. 2: Der „schräg Blick“ über den Plot

Ein lineares Modell erscheint passend. Die zweite Frage könnte dann lauten „Ist ein proportionales Modell sinnvoll?“. In diesem Fall haben die Schülerinnen und Schüler die Frage mit „Ja“ beantwortet, da eine Münze mit Durchmesser null auch den Umfang null haben sollte. Dies führt zu einem proportionalen Modell: U(d) = k·d

Damit ergibt sich als erstes Ergebnis:
Bei einem Kreis sind Umfang und Durchmesser proportional.

2.1. Regression durch Mittelwertbildung

Um den Proportionalitätsfaktor k zu bestimmen, kann die Quotientengleichheit bei der proportionalen Zuordnung genutzt werden. Da das Experiment im Unterricht nach Behandlung der proportionalen Zuordnungen durchgeführt wurde, bildeten die Schülerinnen und Schüler in den meisten Fällen für jedes Messwertpaar den Quotienten k und berechneten daraus den Mittelwert $\overline{k}$. Nur einmal wurde eine zweite Variante gewählt. Dabei wurden zuerst die Mittelwerte $\overline{d}$ der Durchmesser und $\overline{U}$ der Umfänge gebildet und daraus der Quotient berechnet.

Münzen	1 ct	2 ct	5 ct	10 ct	20 ct	50 ct	1 €	2 €	Mittelwerte
d (cm)	1,7	1,8	2,1	2,0	2,2	2,4	2,3	2,5	2,13
U (cm)	5,5	6,1	7,0	6,3	7,4	7,6	7,5	8,3	6,96
k=U/d	3,24	3,39	3,33	3,15	3,36	3,17	3,26	3,32	3,28

So ergab sich dann:

$U_1(d) = \overline{k} \cdot d \approx 3{,}28 \cdot d$

bzw.

$U_2(d) = \frac{6{,}96cm}{2{,}13cm} \cdot d \approx 3{,}27 \cdot d$

Ein Regressionsmodul liefert ebenfalls den Wert $k \approx 3{,}28$.

Der grafische Vergleich zeigt, dass sich die beiden Modelle nur unwesentlich unterscheiden.

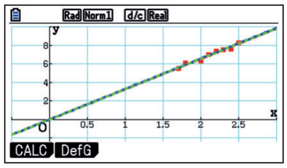


Abb. 3: Ergebnisse blau: U(d) = 3,28x
Ergebnisse grün: U(d) = 3,27x

Als Proportionalitätsfaktor erhielten wir $k \approx 3{,}28$ bzw. $k \approx 3{,}27$. Abb. 3 zeigt eine optisch gute Anpassung des Modells an die Messwerte. So ergab sich im Unterricht auch keine Notwendigkeit, ein quantitatives Gütekriterium einzuführen. Darauf wird in den weiteren Teilen dieser Reihe näher eingegangen.

Entscheidend bei diesem Experiment ist die Modellstruktur, also die Proportionalität zwischen Durchmesser und Umfang beim Kreis. Der Proportionalitätsfaktor $k = 3{,}28$ fällt quasi als „Beifang“ mit ab und wäre für die Schulpraxis durchaus brauchbar. Hier lohnt sich ein kleiner historischer Exkurs über die Geschichte der Kreiszahl Pi. Natürlich kann später der im Taschenrechner gespeicherte Wert für Pi verwendet werden.

Damit haben wir eine einfache Methode gefunden, wie rechnerisch eine proportionale Regression durchzuführen ist, die alle Messwerte mit einbezieht. Nicht berücksichtigt wurden dabei die Messfehler bei Umfang und Durchmesser sowie der Fehler des Proportionalitätsfaktors. Regressionsmodule berücksichtigen diese Fehler in der Regel nicht, eine Berechnung ist mit den Mitteln der Sekundarstufe I auch nicht möglich. Es gibt aber eine einfache geometrische Methode, mit der sich solche Fehler abschätzen lassen.

2.2. Regression mithilfe von Fehlerbalken bzw. -rechtecken

Zunächst wird der Messfehler für die beiden Größen Umfang U und Durchmesser d geschätzt. Die von den Schülerinnen und Schülern angenommenen Fehler betrugen 1 mm bei d und 3 mm bei U. Im Koordinatensystem werden an den Messwert-Punkten entsprechende Fehlerbalken eingezeichnet, die die Schwankungen darstellen. Dadurch entstehen Fehlerkreuze, die jeweils ein Fehlerrechteck aufspannen. Bei einer proportionalen Regression werden nun zwei Ursprungsgeraden s_{min} bzw. s_{max} so gezeichnet, dass sie jeweils durch alle Fehlerrechtecke gehen und minimale bzw. maximale Steigung haben.

Fortsetzung: Regression mit elementaren Methoden

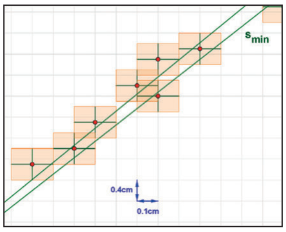


Abb. 4: Plot mit Fehlerrechtecken und Randgeraden

Mithilfe geeigneter Steigungsdreiecke lassen sich die Steigungen von s_{min} und s_{max} ermitteln. Als Schätzwert für den Proportionalitätsfaktor kann der Mittelwert daraus verwendet werden. Die Steigungen von s_{min} bzw. s_{max} bilden dann den unteren bzw. oberen Rand des Fehlerintervalls.

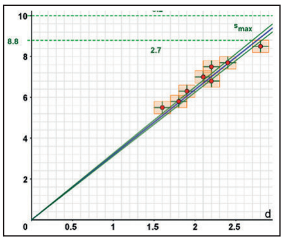


Abb. 5: Plot mit Randgeraden und Ausgleichsgerade (blau)

s_{min}: $U(d) = \frac{10}{3,2}d = 3{,}125d$

s_{max}: $U(d) = \frac{8,8}{2,7}d \approx 3{,}259d$

Mittelwert: $\frac{3,125+3,259}{2} \approx 3{,}19$

Intervallradius: $\frac{3,259-3,125}{2} \approx 0{,}07$

Also wäre das Ergebnis:
$U(d) = k \cdot d$ mit $k = 3{,}19 \pm 0{,}07$

Dieses Verfahren lässt sich auch auf eine lineare Regression erweitern, worauf allerdings hier nicht weiter eingegangen wird.

3. Fazit

Es wurden zwei Verfahren vorgestellt, mit denen bereits in der Sekundarstufe I eine proportionale Regression durchgeführt werden kann. Damit lässt sich bereits ein großer Teil der in den Naturwissenschaften vorkommenden Experimente auswerten, da hier häufig proportionale Beziehungen auftreten (Ohmsches Gesetz: $U \sim I$, Hookesches Gesetz: $F \sim s$, thermische Längenausdehnung: $\Delta l \sim \Delta\vartheta$, …). In manchen Fällen tritt die Proportionalität nicht direkt zwischen zwei Größen auf, lässt sich aber entsprechend modifizieren (Freier Fall: $h \sim t^2$, Pendelschwingung: $T \sim \sqrt{l}$). Somit haben proportionale Modelle und die damit verbundene proportionale Regression eine große Reichweite.

Lehrerspezial

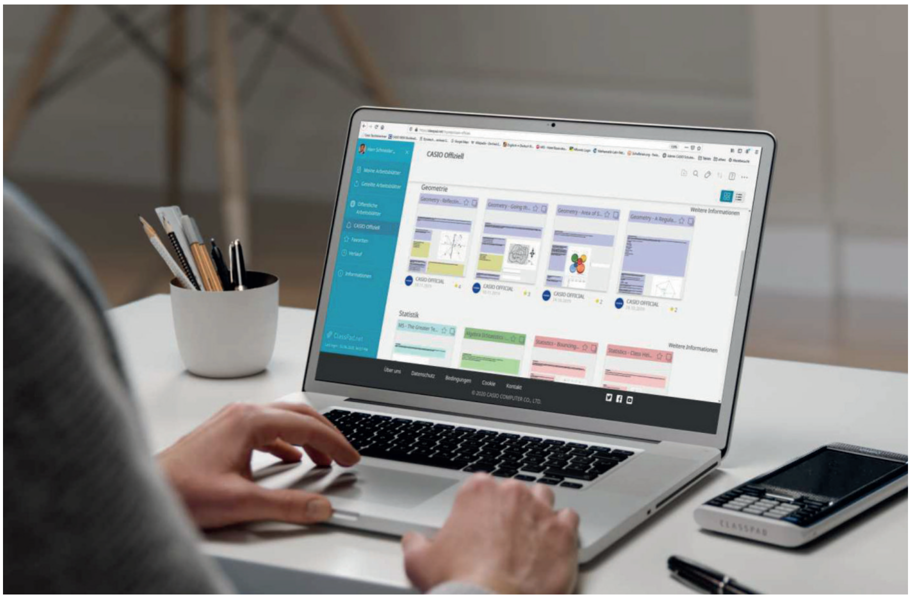
Den Klimawandel mit Mathematik besser verstehen

Klimadaten messen, Umweltstatistiken nutzen und Klimaprognosen nachvollziehen – um komplexe Sachverhalte zum hochaktuellen Thema zu verstehen, sind Mathematikkenntnisse gefragt. Im neuen „Lehrerspezial“ bekommen Mathematik- und MINT-Lehrkräfte für ihren Unterricht ab der 5. Klasse Anregungen rund um das Themenfeld Klima. Ob Messungen der Gewässerqualität und Modellierung von Wetterdaten oder Integralrechnung mit Temperaturverläufen – das Lehrerspezial bietet viele Beispiele für einen anschaulichen Matheunterricht, der an den Interessen der Jugendlichen anknüpft und dazu beiträgt, dass Schülerinnen und Schüler die große Herausforderung „Klimawandel“ besser verstehen.

Zur aktuellen Lehrerspezial-Ausgabe:
www.casio-schulrechner.de/lehrerspezial

Digitalisierung

Digitalisierung mit CASIO



Die Digitalisierung des Schulwesens ist ein präsentes Thema in Deutschland. Durch die Corona-Pandemie setzen viele Schulen aktuell ihre Ideen zur Digitalisierung schneller um. CASIO hat diesen Trend früh erkannt und Software für die Unterrichtsvorbereitung und den Unterricht entwickelt. Die Bedürfnisse von Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräften stehen klar im Vordergrund.

Digitalisierung bedeutet nicht nur, bestehende Methoden einfach zu ersetzen, sondern neue Möglichkeiten anzubieten und den Unterricht weiterzuentwickeln. Dazu arbeiten wir mit führenden Didaktikern, Lehrkräften und den Ministerien zusammen.

Mit ClassPad.net trägt CASIO dieser Entwicklung Rechnung. Seien Sie gespannt auf die geplante Übungs- und Selbstlernplattform für Mathematik. Die Ergänzung weiterer Funktionen für die MINT-Fächer ist in Planung.

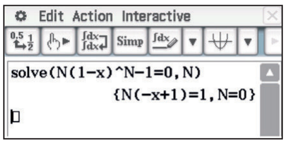
Um den Zugang so einfach wie möglich zu gestalten, ist CASIO die Integration in bestehende und zukünftige Lernplattformen besonders wichtig. Egal ob Sie mit der Schulcloud oder einer anderen Lernplattform arbeiten, CASIO-Produkte erleichtern Ihnen die tägliche Arbeit.

Gruppentests

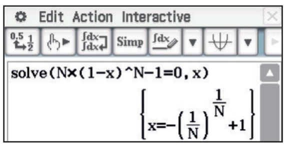
Autor: Gerhard Glas, Wöhlerschule Frankfurt

Zur Bekämpfung einer Virusepidemie wurden von vielen Personen Proben genommen, die in einem kosten- und zeitintensiven Verfahren einzeln getestet wurden. Eine günstigere und schnellere Methode kann es sein, jeweils die Hälfte des Probenmaterials von mehreren Personen zu vereinen und diese neue Probe zu testen. Dieses Verfahren wird Gruppentest genannt. Ist das Ergebnis negativ, kann davon ausgegangen werden, dass auch das Testergebnis jeder einzelnen Probe negativ gewesen wäre. Ist es hingegen positiv, müssen alle Proben einzeln getestet werden. Daraus ergibt sich die Frage, wie viele Proben in einem ersten Test gemeinsam untersucht werden sollten, damit dieses Verfahren vorteilhaft ist.
Ganz sicher hängt die Anzahl der zu einem Gruppentest zusammengefassten Proben davon ab, wie hoch die Infektionsrate in der Testgruppe a priori eingeschätzt wird. Bei einer Infektionsrate von 50% und mehr ist selbst das Zusammenfassen von zwei Proben zu einem Gruppentest nicht sinnvoll, doch bei einer sehr niedrigen Infektionsrate kann es sinnvoll sein, auch 100 Proben zuerst gesammelt zu testen.
Daher zunächst eine allgemeine Überlegung zu diesem Sachverhalt: Angenommen, die vermutete Infektionsrate sei x $(0<x<1)$ und es werden N Proben in einem ersten Test gemeinsam getestet. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein negatives Ergebnis dieser Untersuchung $(1-x)^N$. Sollte das Ergebnis positiv ausfallen (die Wahrscheinlichkeit dafür ist $1-(1-x)^N$), dann würden anschließend N Einzeltests durchgeführt. Insgesamt ist der Erwartungswert für die Anzahl der durchzuführenden Tests: $1 + N\cdot(1-(1-x)^N)$.

Die Eingangsfrage nach der sinnvollen Anzahl N der zusammengefassten Proben bedeutet, dass der gerade ermittelte Erwartungswert keinesfalls größer als N sein darf. Es ist daher die Gleichung:
$1 + N\cdot(1 - (1-x)^N) = N$ bzw.
$N\cdot(1-x)^N - 1 = 0$
nach N zu lösen.



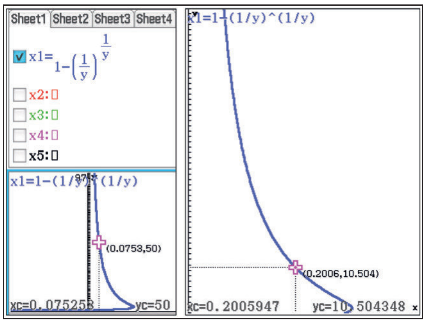
Das klappt leider nicht. Eine Lösung nach x ist hingegen leicht möglich:



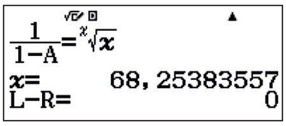
Das eröffnet die Chance, die gesuchten Zahlenpaare aus einer Grafik abzulesen.

Dafür wird der Graph der Funktion $f(y) = 1 - \frac{1}{\sqrt[y]{y}}$ gezeichnet.

Auf der horizontalen Achse ist der Umfang des Gruppentests (N) und auf der vertikalen Achse die Infektionsrate x aufgetragen.



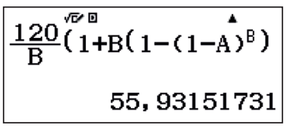
Dem Graph ist zu entnehmen, dass bei einer Infektionsrate von ca. 7,5 % das Zusammenfassen von 50 Einzelproben zu einem Gruppentest noch sinnvoll ist. Bei einer Rate von 20 % ist das gemeinsame Testen von 10 Einzelproben noch sinnvoll.
Auch mit dem FX-991DE X kann die Aufgabe gelöst werden. Wird die Infektionsrate mit A bezeichnet und die Anzahl der maximal sinnvollen Zusammenfassung zu einem Gruppentest mit x, dann lautet die Gleichung $\frac{1}{1-A} = \sqrt[x]{x}$



Mit SOLVE kann diese Gleichung für verschiedene Werte von A gelöst werden.

A	0,06	0,07	0,08	0,10	0,14	0,21	0,27	0,29	0,30
N = x	68,3	55,3	45,9	33,26	19,8	9,6	5,3	4,17	3,56

Das beantwortet aber nur die Frage, wie viele Proben sinnvollerweise maximal zusammen in einem ersten Gruppentest untersucht werden. Interessant ist hingegen der minimale Erwartungswert bei einer bekannten Infektionsrate:
Wie viele Proben sollten bei einem ersten Gruppentest gemeinsam untersucht werden, um mit möglichst wenigen Proben insgesamt auszukommen?
Angenommen, es sind 120 Proben zu untersuchen, dann ist der minimale Wert des Terms Anzahl der zu erwartenden Tests $= \frac{120}{N}(1 + N\cdot(1-(1-A)^N))$ gesucht.

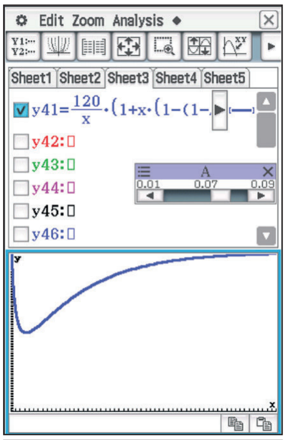


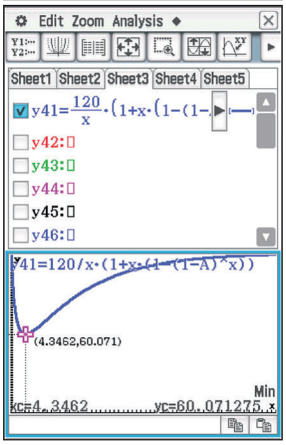
Mit dem FX-991DE X können mit der CALC-Funktion Werte ermittelt werden, z.B. für A = 0,06

N	60	40	30	20	15	10	6	5	4	3
Erwartungswert	119,1	112,9	105,3	91,2	80,6	67,4	57,2	56	56,3	60,3

Für A = 0,07 ergibt sich ein Minimum bei N = 4 mit einem Erwartungswert von 60,21. Bei einem Testumfang von 600.000 Tests bedeutet das, dass nur etwa 301.000 Tests durchgeführt werden müssten, wenn jeweils zunächst 4 Proben gemeinsam untersucht werden. Der zeitliche Aufwand wurde nahezu halbiert!
Die rechnerische Suche nach dem minimalen Wert des Terms mithilfe der Infinitesimalrechnung führt zu der Gleichung $x^2\cdot\ln(1-a)\cdot(1-a)^x + 1 = 0$. Diese ist leider höchstens numerisch lösbar, bei bekanntem Wert für a.

Sehr anschaulich ist es aber, die Funktionenschar zu untersuchen:





Anmerkung:
Im April 2020 galten sechs bis sieben Prozent der Corona-Tests in Deutschland als positiv. Pro Woche wurden bundesweit bis zu 500.000 Tests durchgeführt.

Aufgabenbeispiel

Programmieren mit Python mit dem FX-CG50

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

Die Python-Anwendung ermöglicht auf dem FX-CG50 (Version 03.40.0202) das Programmieren in der Programmiersprache Python. Es handelt sich dabei um eine Version von MicroPython, Version 1.9.4. Wenn sich schon MicroPython erheblich von dem Python auf einem Computer unterscheidet, so ist Python auf dem FX-CG50 nochmals erheblich vereinfacht.

Die Python-Version auf dem FX-CG50 bietet aber alle Vorteile dieser Programmiersprache:

- Python ist aufgrund einer einfachen Syntax leicht zu erlernen.
- Python unterstützt mehrere Programmierparadigmen (strukturiert, funktional, aspektorientiert, objektorientiert, dynamische Verwaltung der Datentypen, modular).
- Python kann auch für kommerzielle Zwecke kostenfrei genutzt werden.
- Python macht unübersichtlichen „Spaghetti-Code“ fast unmöglich, da die Blöcke in den Kontrollstrukturen Schleifen, Verzweigungen und Funktionen durch Einrückungen statt durch zusätzliche Klammern gekennzeichnet werden.
- Python ermöglicht die Erzeugung von Programmen, aber auch die interaktive Ausführung von Befehlen in der Python-Shell.
- Python-Programme laufen meist ohne Änderungen auf LINUX-, MAC OS- und Windows-Betriebssystemen.
- Python kann durch Module, die für sehr viele Anwendungsbereiche vorhanden sind, leicht erweitert werden.

Aufgrund dieser Vorteile wird Python in zunehmendem Maße an Schulen und Hochschulen als erste Programmiersprache unterrichtet, noch vor Java, C# oder C++. (Eine sehr gute Einführung für das Programmieren mit Python gibt es unter www.inf-schule.de)

Alle genannten Vorteile besitzt Python auch auf dem FX-CG50. Gegenüber der Arbeit mit dem Handheld ist die Programmeingabe mit dem FX-CG50 Manager etwas bequemer. Dabei ist zu beachten, dass auch der FX-CG50 Manager auf dem neuesten Stand sein muss.

Mit dem Beispiel „Ermittlung der n-ten Fibonacci-Zahl“ wird nun der Umgang mit Python mit dem FX-CG50 demonstriert. Die ersten beiden Glieder der Fibonacci-Folge sind jeweils 1, die weiteren Glieder ergeben sich aus der Summe der beiden Vorgänger:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Diese Definition ist rekursiv:
$a_1 = a_2 = 1; a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, wenn $n > 2$

Die Formel von Moivre-Binet

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

ist eine explizite Bildungsvorschrift für die Glieder der Fibonacci-Folge. Damit ergeben sich drei Lösungsansätze:

1. direkte Berechnung von a_n mittels der Formel von Moivre-Binet,
2. iterative Berechnung von a_n entsprechend der rekursiven Definition,
3. Berechnung von a_n mittels einer rekursiven Funktion.

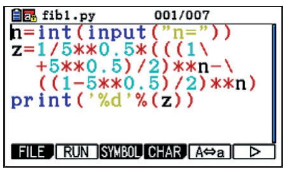
Die Eingabe der Programme erfolgt mit dem Editor. Zunächst wird im Python-Menü nach dem Aufruf des Befehls NEW der Programmname eingegeben. Nach Betätigen von EXE öffnet sich der Editor. Die Eingabe der Befehle ist möglich:

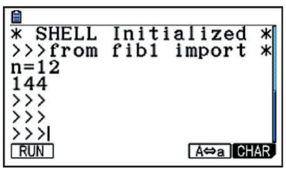
- nach Einstellen von ALPHA mittels der Tastatur,
- nach Aufrufen von CHAR (F4) aus der Liste der Zeichen oder Symbole mittels SYMBOL (F3),
- Eingeben von Pythonbefehlen aus dem Katalog mittels SHIFT 4 CAT (F6).

Nachdem das Programm eingegeben wurde, wird es über FILE (F1) SAVE gespeichert und mit RUN (F2) gestartet. Die Ausführung des Programms erfolgt automatisch in der Python-Shell.

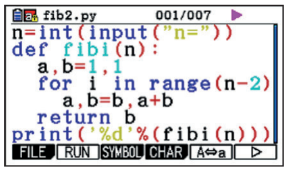
Bei allen drei Varianten erfolgt die Eingabe von n mit dem Befehl int(input(„n=“)), mit der die eingegebene Zeichenkette in eine ganze Zahl umgewandelt wird. Die Ausgabe der berechneten Fibonaccizahl erfolgt jeweils mit print('%d'%(…)). In Python darf der %-Operator zur Formatierung wie in der Sprache C verwendet werden. Ohne Verwendung dieser Formatierung würden Gleitkommazahlen ausgegeben werden.

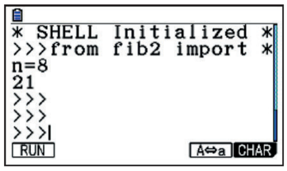
In der 1. Variante wird $\sqrt{5}$ als 5**0.5 und a^n als a**n eingegeben. Durch die Eingabe des Backslash (\) kann zugunsten der besseren Lesbarkeit die Zeile umgebrochen werden.



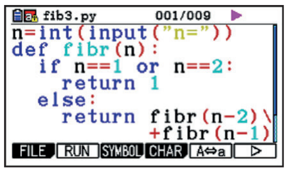


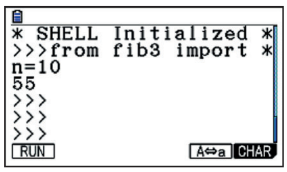
In der 2. Variante wird die Berechnung in einer Funktion fibi(n) iterativ vorgenommen. Mit der Anweisung a,b=1,1 wird den Variablen a und b jeweils der Wert 1 zugeordnet. Der Schleifenkörper der Zählschleife for i in range(n-2): wird (n-2)-mal ausgeführt; i nimmt die Werte von 0 bis n - 3 an. Nach der Ausführung des Befehls a,b=b,a+b hat a den Wert der (i+2)-ten Fibonaccizahl und b den Wert der (i+3)-ten Fibonaccizahl.





Bei der 3. Variante wird eine rekursive Funktion fibr(n) verwendet, deren Struktur völlig mit der rekursiven Definition der Fibonacci-Folge übereinstimmt. Durch den begrenzten Speicherbereich ist die Rekursionstiefe eingeschränkt. Für n = 29 wird in zumutbarer Zeit das Ergebnis $a_{29} = 514229$ ausgegeben.





Da in MicroPython alle wichtigen Datentypen und Kontrollstrukturen von Python vorhanden sind, eignet sich der FX-CG50 sehr gut zum Programmierenlernen. Die Module turtle.py und matplotl.py stehen in der Materialdatenbank von www.casio-schulrechner.de zur Verfügung. Dadurch ist auch eine anspruchsvolle Grafikprogrammierung mit den Befehlen der Module turtle und matplotlib möglich.

Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Autor: Manuel García Mateos, Gymnasium am Steinwald Neunkirchen

1. Problemstellung: Der Begriff des Konfidenzintervalls

Eine Maschine produziert Bolzen, die klar definierte Qualitätsstandards einhalten sollen. Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang $n = 50$ gezogen, um den Anteil p defekter Stücke mit einer Zuverlässigkeit von 95% abzuschätzen. Von den 50 gezogenen Stücken waren 2 bzw. 4% defekt.

Es wird als Modell angenommen, dass bei der Ziehung jedes Stück unabhängig von den anderen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit p defekt sein kann.

a) Mit welchem Anteil p defekter Bolzen muss mindestens und kann höchstens gerechnet werden?

b) Ändert sich der vorhergesagte Anteil p bei einem größeren Stichprobenumfang $n = 200$ und einem Anteil der defekten Teile bei wieder 4%, wenn also 8 defekte Teile in der Stichprobe aufgefunden wurden?

Es geht hier um die Frage der Schätzung eines Anteils p an der Gesamtheit aufgrund der Beobachtung eines konkreten Stichprobenanteils h_n. Es soll der Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit gezogen werden. Eine solche Berechnung kann nur mit einer gewissen Unsicherheit bzw. unter Vorgabe eines bestimmten Vertrauensniveaus bzw. einer bestimmten Zuverlässigkeit (Konfidenzniveau) geschehen. Die Berechnung entsprechender Anteile an der Gesamtheit führt auf die Berechnung sogenannter Konfidenzintervalle oder auch Vertrauensintervalle. Der Begriff stammt aus dem Englischen, confidence für Vertrauen, was auch Sinn macht, weil die Berechnung der Anteile an der Gesamtheit nur unter der Voraussetzung auf das Vertrauen einer vorgegebenen Zuverlässigkeit durchgeführt werden kann.

Ganz allgemein besteht ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $0 < \gamma < 1$ aus allen Anteilen p der Grundgesamtheit, bei denen das beobachtete relative Stichprobenergebnis h_n in dem entsprechenden Prognoseintervall mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit γ liegt.

Die Bestimmung von Konfidenzintervallen ist von hohem Realitätsbezug, denn es können in der Regel bestimmte Stichprobenergebnisse beobachtet werden, wodurch Rückschlüsse bzw. Vorhersagen auf den wahrscheinlichen Anteil an der Gesamtheit möglich sind. Eine Vollerhebung, die einen solchen Anteil liefern würde, ist im Allgemeinen nicht möglich.

Auf eine Diskussion und Klärung etwaiger Fehlvorstellungen im Zusammenhang mit Konfidenzintervallen soll an dieser Stelle verzichtet werden.

Viele der hier dargestellten Wege zur Bearbeitung lassen sich auch mit dem FX-CG50 umsetzen.

2. Mathematische Grundlagen

Gesucht sind bei der Fragestellung nach dem Konfidenzintervall ganz allgemein diejenigen p und die Intervallbreite („Radius") $\frac{k}{n}$, sodass $P(|h_n - p| \leq \frac{k}{n}) \approx \gamma$, wobei γ die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit darstellt. Unter der Voraussetzung einer Normalverteilung bzw. der Approximation der Binomialverteilung mithilfe der Normalverteilung lässt sich die gesuchte Intervallbreite mithilfe der σ-Regeln abschätzen:

(1) $|h_n - p| \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{n} \Leftrightarrow (h_n - p)^2 = z^2_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{n}$

Die Bestimmung eines Konfidenzintervalls zu einem relativen Stichprobenergebnis führt auf das Lösen einer quadratischen Gleichung nach der unbekannten, aber nicht zufälligen Wahrscheinlichkeit p. Diese Gleichung $(y-x)^2 = c \cdot x \cdot (1-x)$ stellt geometrisch eine Ellipse[1] dar. Daher ist der Name „Konfidenzellipse" für die grafische Darstellung der Gleichung $(h_n - p)^2 = z^2_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{p\cdot(1-p)}{n}$ durchaus gerechtfertigt, wobei der Anteil p auf der x-Achse und die relative Häufigkeit h_n auf der y-Achse abgetragen wird. Die beiden Zweige der Ellipse werden gegeben durch $h_n = p \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$. Das Vielfache $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ des Radius $\frac{\sigma}{n}$ des Konfidenzintervalls lässt sich mithilfe der inversen Normalverteilung ermitteln[2]. Es ist z. B. für das Konfidenzniveau $\gamma = 0.95$: $z_{\frac{1+0.95}{2}} = z_{0.975} \approx 1.96$. Die Berechnung des Vielfachen des Radius entspricht also der Berechnung der Vielfachen bei Prognoseintervallen.

Bei vorgegebenen relativen Häufigkeiten h_n ergibt sich das Konfidenzintervall grafisch durch Schnittpunktbestimmung einer Parallelen zur x-Achse mit dem Graphen der Konfidenzellipse bzw. rechnerisch durch Lösen einer entsprechenden (Un-)Gleichung[3].

In der folgenden Abbildung ist die Konfidenzellipse bei einem Stichprobenumfang von n=100 und einem Konfidenzniveau von γ=0.95. Es werden die Graphen von $y = x \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{x\cdot(1-x)}{100}}$ und einer beobachteten relativen Häufigkeit von h_n=0.47 sowie die rechnerische Lösung im Main-Menü des ClassPad II dargestellt.

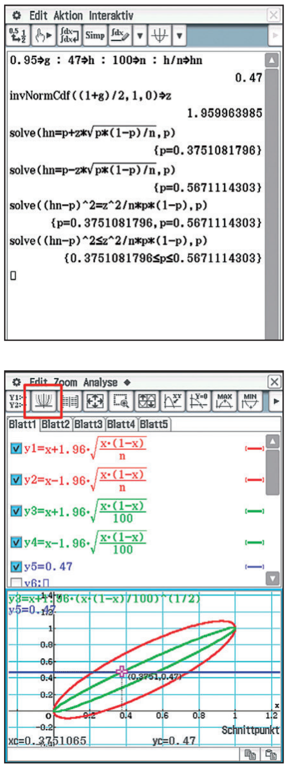


Abb. 1: Darstellung der Konfidenzellipse und rechnerische Bestimmung eines Konfidenzintervalls

Erkennbar ist, dass ein Teil der Konfidenzellipse unterhalb der x-Achse verläuft, denn für die beobachtete relative Häufigkeit h_n=0 kann die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit bzw. der Anteil p der Gesamtheit durchaus positiv sein. Außerdem fällt auf, dass mit größerem Stichprobenumfang die Ellipse schmaler wird. Hier kann ein Schieberegler zur Visualisierung n verwendet werden.

3. Umsetzung mit dem ClassPad II

Wie lassen sich solche Aufgabenstellungen mithilfe des ClassPad rechnerisch, grafisch und näherungsweise bearbeiten? Wie gut sind die Näherungen für die Anteile p an der Gesamtheit?

3.1 Exakte rechnerische Umsetzung im Main-Menü

Mit dem ClassPad II können sowohl die quadratische (Un-)Gleichung als auch die Lösungen der entsprechenden Wurzelgleichungen mithilfe des solve-Befehls ermittelt werden. Um die Auswirkungen der Veränderungen des Stichprobenumfangs auf den Anteil p zu beobachten, ist es sinnvoll, die Vorgaben der Aufgabenstellung getrennt in Variablen zu speichern (s. Abbildung 2).

[1] Auf einen Nachweis der Geometrie soll hier verzichtet werden. Werden $p - \frac{1}{2}$ und $y = h_n - \frac{1}{2}$ ersetzt, weil die Ellipse den Mittelpunkt $M\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)$ hat, so ergibt sich die Gleichung $(1+c)x^2 - 2xy + y^2 - \frac{c}{4} = 0$. Eine Hauptachsentransformation führt zum Ziel.

[2] Der CASIO ClassPad stellt zur Berechnung den Befehl `invNormCdf(area,σ,μ)` bereit. Also `invNormCdf(0.975,1,0)` für das Vielfache des Radius bei einem Konfidenzniveau von 95%.

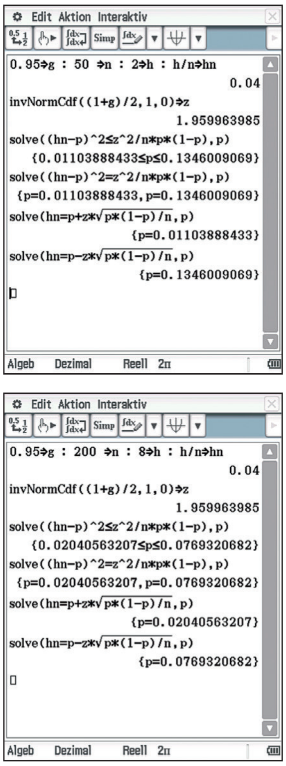
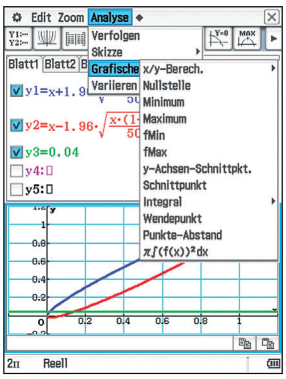


Abb. 2: Bestimmung des Konfidenzintervalls mithilfe des Main-Menüs

Es fällt auf, dass bei $n=50$ Teilen und einer relativen Häufigkeit von 4% das Konfidenzintervall $I=[0.0110;0.1346]$ beträgt, es also mit 95%iger Zuverlässigkeit einen Ausschussanteil p von mindestens 1,10% und höchstens 13,46% hat – eine sehr grobe Aussage. Bei einer Vervierfachung des Stichprobenumfangs halbiert sich das Konfidenzintervall etwa und es kann mit 95%iger Zuverlässigkeit ein Ausschussanteil zwischen 2,04% und 7,69% erwartet werden. Die Begründung für dieses Verhalten der Konfidenzintervalle liefert das $1/\sqrt{n}$-Gesetz.

3.2 Exakte grafische Umsetzung im Grafik-Menü

Grafisch lässt sich die Aufgabe im Grafik-Menü durch Einzeichnen der beiden Zweige der Konfidenzellipse und Schnittpunktberechnung bzw. Berechnung des x-Wertes über das Analyse-Menü lösen.



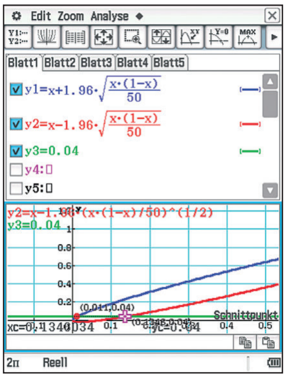


Abb. 3: Grafische Bestimmung des Konfidenzintervalls mithilfe des Grafik-Menüs und des Analyse-Werkzeugs

Für kleine relative Häufigkeiten werden die Schnittpunkte jedoch im ClassPad II nicht sehr schön dargestellt.

3.3 Verwendung statistischer Befehle

Der ClassPad II verfügt sowohl im Main- als auch im Statistik-Menü über die Möglichkeit ein Näherungskonfidenzintervall nach WALD[4] zu bestimmen. Dabei werden die Intervallgrenzen $I=[p_u,p_o]$ des Konfidenzintervalls näherungsweise durch $p_u = h_n - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h_n\cdot(1-h_n)}{n}}$ und $p_o = h_n + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{h_n\cdot(1-h_n)}{n}}$ berechnet. Dabei wird angenommen, dass relative Häufigkeiten gute Schätzer für Wahrscheinlichkeiten sind, was für große Stichprobenumfänge $(n>30)$ und $0.2 \le h_n \le 0.8$ praktikabel ist. Im Main-Menü kann über den Katalog der Befehl OnePropZInt verwendet werden. Als Parameter werden das Konfidenzniveau, das absolute Stichprobenergebnis und der Stichprobenumfang eingegeben. Die entsprechenden Werte werden dann mit DispStat aufgerufen (s. Abbildung 4).

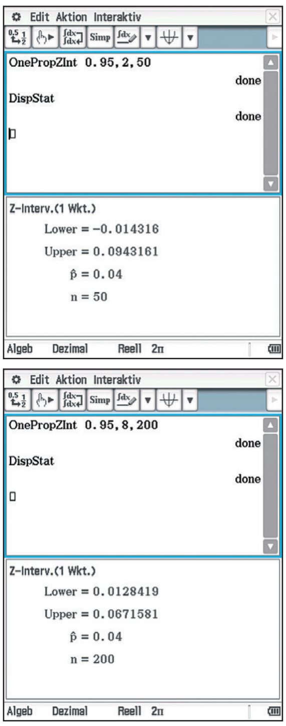


Abb. 4: Waldsches Näherungskonfidenzintervall über das Main-Menü

Im Statistik-Menü unter „Calc" befindet sich das Waldsche Näherungskonfidenzintervall (s. Abbildung 5).

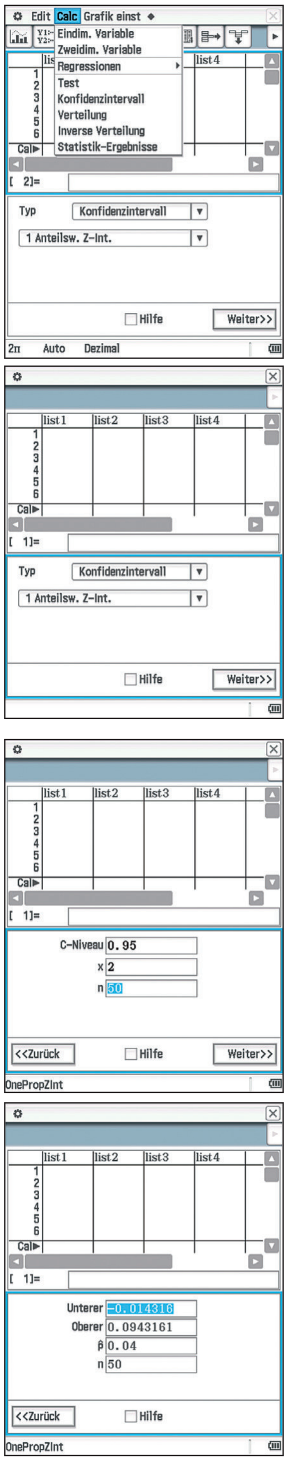


Abb. 5: Waldsches Näherungskonfidenzintervall über das Statistik-Menü

Es fällt jedoch auf, dass die Näherungen für die Lösung dieser Aufgabe nicht brauchbar sind (Näherungskonfidenzintervall $I=[-0.0143;0.0943]$ im Vergleich zum exakten Konfidenzintervall $I=[0.0110;0.1346]$). Zusätzlich ist die Verwendung eines Befehls, wie in diesem Fall des OnePropZInt-Befehls, didaktisch sehr unklug, wenn unklar ist, was genau dieser Befehl bewirkt.

[3] Die Betrachtung von Konfidenzintervallen auf Grundlage dieser Gleichung wurde 1927 durch den US-amerikanischen Statistiker Edwin B. Wilson (1897 – 1964) eingeführt, der damit die Arbeit von Jerzy Neyman vorangetrieben hat. Daher wird die Konfidenzellipse auch als Wilson-Ellipse oder im angelsächsischen Raum als Score-Ellipse bezeichnet.
[4] Nach dem Mathematiker Abraham Wald (1902 – 1950) benannt, der dieses Näherungskonfidenzintervall 1943 vorgeschlagen hat.

Lehrer-Info-Service

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen der Lehrpläne in den Bundesländern harmoniert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:

CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten,
Informationen zu regionalen Veranstaltungen,
Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien,
bundeslandspezifische Angebote,
Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht.

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

Anmeldung
Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten – dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz
www.casio-schulrechner.de/lehrerinfoservice

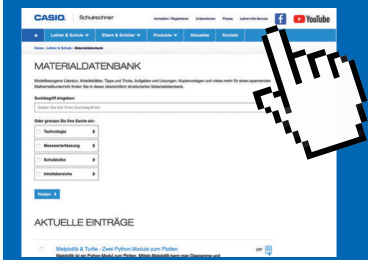
oder einfach den **QR-Code** scannen.

Materialdatenbank

Materialien für den Unterricht

Modellbezogene Literatur, Arbeitsblätter, Tipps und Tricks, Aufgaben und Lösungen, Kopiervorlagen und vieles mehr für einen spannenden Mathematikunterricht finden Sie in dieser übersichtlich strukturierten Materialdatenbank. Sie haben selbst Unterrichtsmaterial erstellt, das Sie teilen möchten? Dann kontaktieren Sie gern die Redaktion.

Im Netz
www.casio-schulrechner.de/materialdatenbank



oder einfach den **QR-Code** scannen.

Software

Aktuelle Betriebssystemversionen

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	**OS-Version**
ClassPad II	2.01.7
FX-CG20/50	3.11/3.40
FX-9860 GII/GIII	2.09/3.30
Software	
ClassPad II Manager	2.01.6001
ClassPad App	über App-Stores (Android/IOS)
FX-CG50 Manager	3.40
FX-CG20 Manager	3.10.0020
FX-Manager Plus	3.30
ClassWiz Emulator	2.01.0020
ES Plus Emulator	5.00

Updates bis Juni 2020

Kontakt

Educational Team
Telefon: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-100
E-Mail: education@casio.de
Homepage: www.casio-schulrechner.de

European Support Center
Beratung und technische Informationen
Telefon: +49 (0)40/528 65-802
Fax: +49 (0)40/528 65-888
E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen
Telefon: +49 (0)40/528 65-203
Fax: +49 (0)40/528 65-242
E-Mail: repair@casio.de

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm
- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Bildquellen:
S. 1: M. Mettin, Offenbach; www.m-momente.de

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

4 549526 610103
120SGR-FORUM28-DE