CASIO forum
Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 2/2018
Österreich Special

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

im CASIO forum zeigen Kolleginnen und Kollegen Anregungen und Beispiele für den gewinnbringenden Unterrichtseinsatz unserer Rechner.

Wir informieren Sie in dieser Ausgabe über einige neue Möglichkeiten, die durch die Weiterentwicklung unserer Rechner entstehen. Als Erstes erwartet Sie ein mathematisch interessantes Phänomen aus der Alltagswelt. Sodann erwartet Sie eine Diskussion, wie die Schüler ihre digitale Arbeit in Klausuren aufschreiben sollen und – im Artikel danach –, wie digitale Hilfsmittel optimal im Unterricht eingesetzt werden können. Schreiben Sie auch einmal einen Leserbrief, wie z.B. den auf der nächsten Seite! Es folgen Vernetzungen von Stochastik und Analysis sowie von Codierung und Graphen. Zwischendurch finden Sie eine Prüfungsaufgabe der heurigen Matura, Hinweise zu Gleichungslösen mit dem FX-87DE X und die diesmalige Knobelaufgabe.

Zum Ausprobieren der Beispielaufgaben im Unterricht können Sie unsere Grafikrechner im Klassensatz einschließlich Zubehör kostenlos für vier Wochen ausleihen. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrersupport. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an **education@casio.de**.

Ihr Redaktionsteam

i.A. CASIO

Handy und Navi

GPS-Positionsbestimmung mithilfe des CASIO Classpad II

Autor: Dr. Kinga Szűcs, Jena

Ortungsdienste im Handy, Routenplanung oder Navigationssysteme, all diese Applikationen verwenden das GPS-Satellitensystem für die Bestimmung der eigenen Position. Wie dies passiert, kann mathematisch in der Sekundarstufe II thematisiert werden, auch wenn die dahinterstehenden Berechnungen aufwendig sind. Dieses Thema ist geeignet, den Schülern eine echte mathematische Modellierung zu bieten und um CAS sinnvoll im Mathematikunterricht einzusetzen.

Das Global Positioning System (GPS)

Das für militärische Zwecke entwickelte System besteht aus 24 Satelliten, die auf sechs Kreisbahnen in einer Höhe von ca. 20.000 km mit gleicher Geschwindigkeit die Erde umkreisen. Die Anordnung der Satelliten gewährleistet, dass jeder Punkt auf der Erde immer durch mindestens vier Satelliten angepeilt werden kann. Sie sind mit Atomuhren ausgestattet, so können sie ihre eigene Uhrzeit sehr genau senden. Stationen auf der Erde überwachen die Satelliten und die von ihnen gefunkten Daten. Jeder sendet ständig drei aktuelle Informationen: Name, Position und Uhrzeit. Aus diesen Daten ermitteln dann die Endgeräte die Position des Empfängers.

Was machen die Endgeräte?

Die Satelliten senden ihre eigene Position nicht in geografischen Koordinaten, sondern in einem kartesischen Koordinatensystem, dem World Geodetic System (WGS). Der Ursprung des WGS liegt im Massenschwerpunkt der Erde, ihre

Fortsetzung auf Seite 2

Rotationsachse ist die z-Achse des WGS. Die x-Achse geht durch den Schnittpunkt des Nullmeridians mit dem Äquator und die y-Achse ergänzt diese Achsen zu einem orthogonalen Rechtssystem (Abb. 1). Die Endgeräte berechnen aus der Differenz der eigenen und der empfangenen Uhrzeit, wie lange das Signal mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs war und daraus die Entfernung zum Satelliten. Alle Punkte im Raum, die von einem festen Punkt (=Satellit) einen festen Abstand haben, liegen auf einer Kugeloberfläche; Mittelpunkt ist der Satellit, der berechnete Abstand der Radius: eine erste Kugelgleichung für die eigene Position. Da nicht nur ein Signal, sondern mindestens vier gleichzeitig empfangen werden, gibt es ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten und mindestens vier quadratischen Gleichungen, die Lösung ist die Position des Empfängers – geometrisch gesehen der Schnittpunkt der Kugeloberflächen. Diese Lösung wird in geografische Koordinaten umgerechnet (Abb. 1).

Da die Position des Empfängers auf der Erdoberfläche liegt, kann noch eine Gleichung dem System hinzugefügt werden. Deswegen könnten die Signale dreier Satelliten für die Positionsbestimmung ausreichen. Wegen des sogenannten Uhrenfehlers sind aber die Daten von vier Satelliten nötig.

Bestimmung der eigenen Position aus empfangenen GPS-Daten

Die folgende Aufgabe wurde in Anlehnung an Rascher-Friesenhausen, 2004 formuliert, auch die verwendeten Daten entstammen dieser Quelle.

Ein GPS-Gerät empfängt die Signale der vier Satelliten: F3(II 06), C4(II A20), A4(II 04), D1(II A11). Bestimmen Sie die Position des Empfängers. (Die Lichtgeschwindigkeit beträgt 299.792,458 km/s)

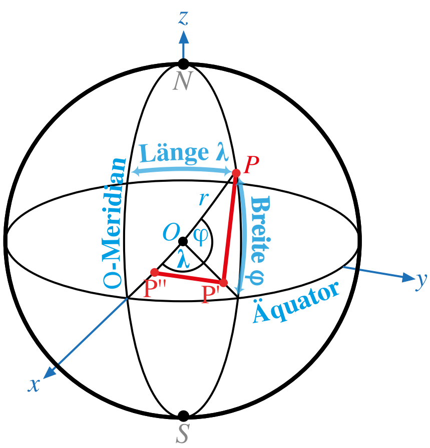
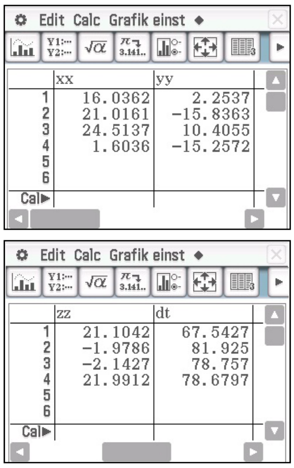


Abb. 1: Das kartesische WGS-84 Koordinatensystem und die Umrechnung der geografischen Koordinaten in WGS-Koordinaten



	xx	yy
1	16.0362	2.2537
2	21.0161	−15.8363
3	24.5137	10.4055
4	1.6036	−15.2572
5		
6		

	zz	dt
1	21.1042	67.5427
2	−1.9786	81.925
3	−2.1427	78.757
4	21.9912	78.6797
5		
6		

Abb. 2: Empfangene GPS-Daten: xx, yy, und zz in 1000 km, dt in msec

```
1000·xx⇒xx:1000·yy⇒yy:1000·zz⇒zz
              {21104.2,−1978.6,−2142.7,21991.2}
Seq((x−xx[n])²+(y−yy[n])²+(z−zz[n])²,n,1,4)⇒xyz
{(x−16036.2)²+(y−2253.7)²+(z−21104.2)²,(x−21
Seq((dt[n]/1000×299792.458)²,n,1,4)⇒d
{410013579.6,603218018.9,557467733.5,5563739
```

Abb. 3: Linke und rechte Seite des Gleichungssystems vorbereiten

In einem ersten Schritt werden die Quadrate der Entfernungen der Satelliten zum Empfänger aus der Zeit bestimmt und die Position der Satelliten quadratisch auf die Empfängerposition bezogen (Abb. 3). Dann wird damit das Gleichungssystem aufgestellt:

```
xyz[1]=d[1]
xyz[2]=d[2]
xyz[3]=d[3]
xyz[4]=d[4] |x,y,z
                   No Solution
```

Abb. 4: System der Kugelgleichungen

Da ein System von vier quadratischen Gleichungen vorliegt, wird das CAS entweder „No solution" ausgeben oder „ewig" an einer Lösung arbeiten. Das System muss auf jeden Fall eine Lösung haben! Ein möglicher Trick ist die Linearisierung des Systems: Wird die Differenz von je zwei verschiedenen Gleichungen gebildet, so entfallen die quadratischen Terme und die Anzahl der Gleichungen reduziert sich auf drei! Dieses Gleichungssystem wird wie gewohnt rasch gelöst (Abb. 5).

```
(xyz[1]=d[1])−(xyz[2]=d[2])
(xyz[2]=d[2])−(xyz[3]=d[3])
(xyz[3]=d[3])−(xyz[4]=d[4]) |x,y,z
{x=4146.0413,y=680.7311,z=4789.6215}
```

Abb. 5: Lösung des linearen Gleichungssystems

Nun ist die Position des Empfängers im kartesischen WGS-System bestimmt, sie wird noch in geografische Koordinaten umgerechnet.

Umrechnung von WGS-Koordinaten in geografische Koordinaten

Jeder Punkt P auf der Erde kann durch die Daten φ, λ und r eindeutig angegeben werden, wobei φ die geografische Breite, λ die geografische Länge und r die Entfernung des Punktes vom Erdmassenschwerpunkt O angibt (Abb. 1). Letztere entspricht meistens dem Erdradius, in einem Flugzeug können sich messbare Abweichungen ergeben.

Sei P´ die orthogonale Projektion des Punktes P auf die x-y-Ebene und r = OP´ sowie P´´ die orthogonale Projektion des Punktes P´ auf die x-Achse. Dann gilt für den Punkt P, dass seine x-Koordinate der Strecke OP´´, die y-Koordinate der Strecke P´P´´ und die z-Koordinate der Strecke PP´ entspricht. Es gilt im rechtwinkligen Dreieck OP´´P´ $x = r´ \cdot \cos(\lambda)$ und $y = r´ \cdot \sin(\lambda)$. Im ebenfalls rechtwinkligen Dreieck OP´P gilt $z = r \cdot \sin(\varphi)$ und $r´ = r \cdot \cos(\varphi)$.

Zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \\ \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichungen sind hilfreich, wenn die geografischen Koordinaten bekannt sind und daraus die WGS-Koordinaten ermittelt werden sollen. Für die Umkehrung ist wichtig, dass $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\sin(\varphi) = \frac{z}{r}$ sowie $\frac{y}{x} = \tan(\lambda)$.

Damit können die geografischen Koordinaten des Empfängers ermittelt werden. Zuerst wird die Entfernung vom Erdmassenmittelpunkt O mihilfe der zuvor ermittelten Lösung (ans) bestimmt (Abb. 6). Das Ergebnis entspricht ungefähr dem Erdradius.

```
√(x²+y²+z²) |ans
                 6371.304989
```

Abb. 6: Bestimmung der Entfernung des Empfängers von O

Nun werden die geografische Breite φ und die geografische Länge λ bestimmt (Abb. 7) [Rechner auf das Gradmaß umstellen].

```
sin⁻¹(4789.621461/6371.304989)
                     48.74210019
tan⁻¹(680.73107/4146.041333)
                      9.32409932
```

Abb. 7: Bestimmung der geografischen Breite und Länge der Empfängerposition

Der Ort mit der nördlichen Breite 48,74° und der östlichen Länge 9,32° ist **Esslingen.**

Literatur

Rascher-Friesenhausen, R. (2004): Orientieren mit Mathematik. In: Mathematik lehren 124, S. 58-62.

Dokumentation von Schülerlösungen mit CAS – ein Diskussionsbeitrag

Autor: C. Stauch, Gymnasium Coswig

(vollständiger Artikel erschienen in: Computeralgebra-Rundbrief Vol 58, Berlin 2016 der Gesellschaft für Informatik)

Einleitung

Bezogen auf den Mathematikunterricht wird kaum ein anderes Thema so kontrovers diskutiert wie der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) in der Schule. Während die Befürworter den Einsatz solcher Werkzeuge als unverzichtbar für modernen Mathematikunterricht und als Chance ansehen, befürchten Kritiker die Abkehr von der reinen Lehre der „richtigen Mathematik".

Nicht minder umstritten ist selbst unter den CAS-Befürwortern, wie eine angemessene Dokumentation von Schülerlösungen erfolgen sollte. Einige Diskussionspunkte sind: Dürfen werkzeugspezifische Befehle zur Dokumentation verwendet werden? Oder sind sie vielmehr komplett zu vermeiden? Ist es notwendig, jede Rechnerausgabe vom Display abzuschreiben?

Eine zu starke Komprimierung der Lösungsdokumentation birgt ebenfalls Gefahren: Ein Fehler bei der Dateneingabe in das CAS-Werkzeug ist dann nicht mehr nachvollziehbar und führt unter Umständen zu einer Bewertung mit 0 Punkten – obwohl der Schüler die Problematik vollständig durchdrungen hat.
Folgendes Beispiel soll die große Divergenz der Auffassungen anhand einer typischen Rechenaufgabe illustrieren:

Aufgabe

Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit $f(x)=x^2$, der x-Achse und den beiden Geraden $x=3$ und $x=6$ eingeschlossen wird.
Aus verschiedenen Diskussionsrunden mit Fachkollegen kenne ich die folgenden Varianten, wie Lösungswege zu dokumentieren sind:

(1) $\int_3^6 x^2 dx = 63; mit\ TR; A = 63\ FE$

(2) $\int_3^6 x^2 dx = 63; mit\ TR$ kbd[1]

$\rightarrow$Integral, Eingabe f, Grenzen

$A = 63\ FE$

(3) $\int(x^2, x, 3{,}6) = 63$ FE

(4) $\int_3^6 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 72 - 9$

$= 63;\ A = 63\ FE$

Die Varianten **(3)** und **(4)** sind dabei Extremfälle: **(3)** verzichtet auf die mathematische Notation, der Lösungsweg wird auf die Angabe eines rechnerspezifischen Befehls reduziert, darüber hinaus ist das Integral eine reelle Zahl, keine Fläche; in **(4)** wird die Rechnerbenutzung ad absurdum geführt.

Die eigentliche Frage ist aber an dieser Stelle nicht, welche Variante die richtige ist, sondern warum einem Schüler, der ein CAS benutzt, diese Aufgabe überhaupt gestellt wird. CAS-Kritiker, die in diesem Zusammenhang gern von „Push-Button-Mathematik" sprechen, haben recht, wenn sich Lernende nur mit Aufgaben auf diesem formalen Niveau auseinandersetzen müss(t)en.

Über den Nutzen von CAS und einer angemessenen Aufgabenkultur muss demnach Klarheit geschaffen werden, ehe die Diskussion der Lösungsdokumentation fortgeführt wird.

CAS im Unterricht

In den Bildungsstandards für das Fach Mathematik werden drei unverzichtbare Grunderfahrungen, die dem Schüler durch den Mathematikunterricht vermittelt werden sollen, genannt. Eine davon begreift „Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten".

Mathematikunterricht hat also die Aufgabe, nicht nur reine Rechenfähigkeiten, sondern auch heuristische Fähigkeiten wie die Schulung logischen Denkens, der Problemlösefähigkeit und das Arbeiten mit Modellen zu entwickeln und zu schulen. Und viele Literaturbeiträge zeigen: CAS-Systeme ermöglichen dies an vielen Stellen des Mathematikunterrichtes.

Ein Blick auf die KMK-Bildungsstandards für das Fach Mathematik zeigt deutlich, dass der Schwerpunkt der Schülertätigkeit nicht mehr nur im reinen Rechnen oder in händischer Arbeit mit den mathematischen Objekten liegen soll, sondern auch in der mathematischen Modellierung von realen oder zumindest realitätsnahen Sachverhalten, deren Umsetzung mit einem Werkzeug sowie der Interpretation der Ergebnisse des CAS.

CAS-Prüfungsaufgaben sollten deshalb nicht rein formal sein, sie müssen zusätzliche Denkleistungen erfordern wie Modellbildung, Transformation des Ansatzes in eine geeignete Syntax oder die Interpretation der Ausgaben des Werkzeugs. Aufgaben, die entdeckendes Lernen fördern, sind meist offener gestaltet. In Prüfungssituationen sind Erwartungshorizonte deutlich schwieriger zu operationalisieren. Deshalb finden sie bei den folgenden Betrachtungen keinen Raum.

Anforderungen an die Dokumentation

Verbindliche Vorgaben für die Dokumentation von Schülerlösungen findet sich wieder in den Bildungsstandards:

Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. Die Beurteilung schließt mit einer Bewertung der von den Prüflingen erbrachten Leistung ab.[2]

Mathematisches Verständnis muss demnach zum Ausdruck gebracht werden; Fehler in der Fachsprache sind als Fehler zu werten. Damit ist die Verwendung mathematischer Notation verpflichtend. Eine Kette von Rechnerbefehlen allein kann aus diesem Grund nicht als vollständige Dokumentation angesehen werden. Es lässt sich aber kein Verbot von Rechnerbefehlen aus den Bildungsstandards ableiten. Zusätzlich zum mathematischen Ansatz können sie durchaus sinnvoll den Lösungsweg des Schülers illustrieren.

Eine logische Gliederung von Argumenten ist unverzichtbar. Je komplexer die Aufgabenstellung, desto wichtiger ist die übersichtliche Struktur des Lösungsweges. Nur dadurch wird gewährleistet, dass die Darstellung der Lösung nachvollziehbar und eindeutig ist. Nachvollziehbarkeit und Eindeutigkeit erfordern insbesondere bei komplexen Aufgaben oder Aufgaben in Sachzusammenhängen eine Strukturierung des Lösungsweges inklusive begleitender Textstellen.

Aus der Dokumentation muss auch der Hilfsmitteleinsatz abzuleiten sein. An welchen Stellen der Problemlösung wurde ein

[1] kbd = Keyboard | [2] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, KMK 18.10.2012

Werkzeug eingesetzt? Welche Werkzeuge wurden genutzt? In vielen Fällen ist dies sehr eindeutig: Wird zum Beispiel der solve-Befehl zum Lösen einer Gleichung genutzt, bedarf dies nur einer kurzen Erwähnung.

Zusammengefasst ergeben sich drei Anforderungskriterien

- Verwendung der mathematischen Notation (Einhaltung der Fachsprache)
- Nachvollziehbarkeit (Gliederung, Kommentierung)
- Eindeutigkeit (logische Struktur)

Aufgabenbeispiel 1

Diskutieren Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $2x^2+4ax+64 = 0$, $a \in R$ in Abhängigkeit von a.

Lösungsvorschlag

$2x^2 + 4ax + 64 = 0;$ *Lösen der Gleichung*

$x_{1;2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 32}$

Untersuchung der Diskriminante

Zwei Lösungen:

$a^2 - 32 > 0 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{32} \Leftrightarrow a < -\sqrt{32} \vee a > \sqrt{32}$

Eine Lösung:

$a^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{32} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{32}$

Keine Lösung:

$a^2 - 32 < 0 \Leftrightarrow |a| < \sqrt{32} \Leftrightarrow -\sqrt{32} < a < \sqrt{32}$

Einordnung

Die Aufgabe ist auch ohne jedes Hilfsmittel lösbar, sinnvoll wäre sie für Schüler, die den Umgang mit einem CAS erlernen.

Kommentar

Der dargestellte Lösungsweg erfüllt die drei angegebenen Kriterien; ein CAS-Werkzeug liefert lediglich die Lösungen der (Un-)Gleichungen. Die Angabe des dazugehörigen Befehls ist nicht notwendig.

Der Schüler muss die Reihenfolge seiner Überlegungen darlegen und die Ergebnisse des CAS interpretieren.

Aufgabenbeispiel 2

Zeigen Sie, dass jede ganzrationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt ist.

Lösungsvorschlag

Jede ganzrationale Funktion 3. Grades besitzt einen Wendepunkt.

Einordnung

Die Aufgabe ist im Anforderungsbereich III der Sekundarstufe II einzuordnen. Sie erfordert einen sicheren Umgang mit Funktionseigenschaften sowie deren Vernetzung und Abstraktion.

Kommentar

In diesem Beispiel wird die CAS-Fähigkeit genutzt, symbolisch mit Funktionen zu arbeiten. In der dargestellten Lösung wird deshalb die Definition der Funktion angegeben; dies ist die Grundlage für die weiteren Operationen des CAS. Dagegen wird auf die Angabe der konkreten Terme verzichtet – sie bringen keine weitere Steigerung der Nachvollziehbarkeit. Die für den Nachweis notwendigen Schritte sind angegeben, das Werkzeug führt lediglich die Termumformungen durch. Durch Vergleich der beiden Terme findet der Schüler den geforderten Nachweis.

Fazit und Ausblick

Neben der inhaltlichen Richtigkeit der Schülerlösung liegt der Schwerpunkt bei der Dokumentation auf Nachvollziehbarkeit und Eindeutigkeit. Da ein CAS-Werkzeug dem Schüler große Teile der formalen Rechnung abnimmt, verschiebt sich der Fokus auf die Strukturierung und Interpretation der Ergebnisse. Bei komplexen Aufgaben sollte die Lösungsdokumentation nicht zu einer „Abschreibeübung“ degenerieren, sondern vielmehr die gedankliche Durchdringung des Sachverhaltes und seine mathematische Modellierung in den Vordergrund setzen. Insbesondere Gültigkeitsbedingungen gehören zu einer vollständigen Lösungsdarstellung. Aus diesem Grunde erachte ich das Primat der mathematischen Notation gegenüber werkzeugspezifischen Befehlen als unabdingbar.

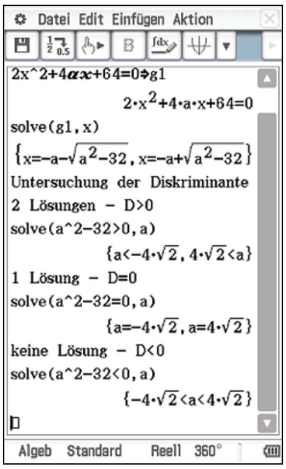


Abb. 1: Eine Lösung mit eActivity

Eine Alternative zu herkömmlichen „Papier-und-Stift“-Varianten für die Lösungsdokumentation könnten perspektivisch die von Casio für die Classpad-Serie eingeführten eActivities oder gleichwertige Systeme darstellen. Abb. 1 zeigt eine mögliche Lösung zu Aufgabenbeispiel 1 mithilfe von eActivities. Damit können der mathematische Ansatz, die Umsetzung mit dem Rechner und begleitender Text sehr übersichtlich und strukturiert kombiniert werden. Es wird deutlich, welche Komponenten des Werkzeugs genutzt wurden. Darüber hinaus sind eventuelle Fehleingaben des Schülers nachvollziehbar. Natürlich hat auch diese Variante Nachteile: angefangen bei der Übermittlung der eActivities vom Schüler an den Lehrer – sie ist aber unter den Bedingungen des Schulalltags vergleichsweise effektiv und sicher.

Ich bin überzeugt, dass die Entwicklung und Stärkung der Fähigkeit zum logischen Denken eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichtes ist. Dies kann mit und ohne CAS-Werkzeug erreicht werden. Aber wenn CAS im Unterricht eingesetzt wird, dann müssen seine spezifischen Vorzüge genutzt werden, dann sollte der Schwerpunkt auf den mathematischen Zusammenhängen liegen, auch und gerade bei der Dokumentation von Lösungswegen.

ClassPad-Neuheit

ClassPad.net – Das neue Mathematik-Lernwerkzeug für den Unterricht

- Lauffähig auf allen gängigen Tablets, Computern und Browsern (Chrome, Safari, Edge, Firefox …)
- Webapplikation mit Cloudspeicher (Integration in Schulclouds geplant)
- Fortschrittliches Computer-Algebra-System (kostenpflichtig)
- Handschriftenkennung (kostenpflichtig)

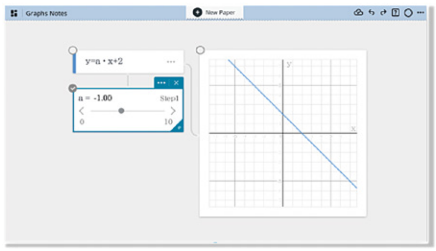


Abb.1: Graphen

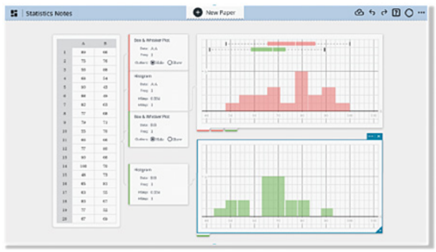


Abb. 2: Statistik

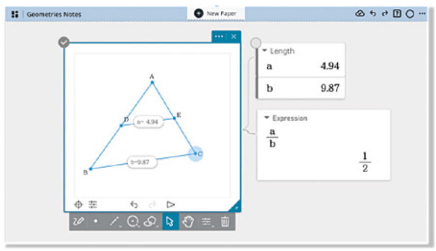
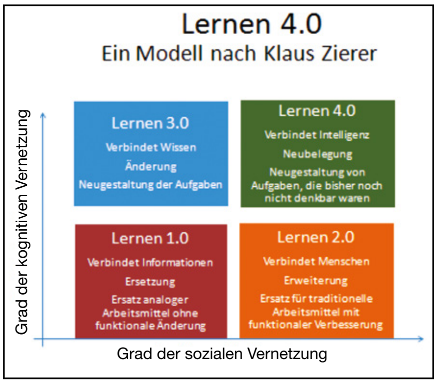


Abb. 3: Geometrie

Testen Sie ClassPad.net:
https://classpad.net
oder besuchen Sie uns auf YouTube

Lernen 4.0 im Mathematikunterricht

Autor: Annette Achmus



Vergl.: Klaus Zierer, Lernen 4.0
Schneider Verlag, Hohengehren, 2017

Obwohl das Thema Lernen 4.0 für die Unterrichtsentwicklung immer wichtiger wird, fehlt oft eine Vorstellung, was darunter zu verstehen ist. K. Zierer formuliert in seinem Buch „Lernen 4.0 – Pädagogik vor Technik“ einen leider nicht für den Mathematikunterricht konkretisierten Ansatz. Ich möchte zu dieser Thematik eine Diskussionsgrundlage schaffen und dabei auch die Vorstufen beleuchten, um die nötigen Veränderungen deutlich zu machen.

Lernen 1.0 bedeutet, durch den Einsatz von Technologie von Hand durchgeführte Tätigkeiten (z.B. Radizieren) durch andere zu ersetzen. Statt Kreide und Tafel werden die elektronische Tafel, Taschenrechner und Tablets verwandt, eine Veränderung der Aufgabenstellungen unterbleibt jedoch. Einige vorher entwickelte Kompetenzen gehen zurück, es bleibt die Frage, ob sie durch andere, neue kompensiert werden.

Lernen 2.0: Durch Technologieeinsatz wird die soziale Vernetzung gestärkt. Der Wegfall von Rechenroutinen sowie die schnelle Verfügbarkeit von grafischen Darstellungen (GTR) ermöglichen es, über die Graphen und Sachzusammenhänge ins Gespräch zu kommen. Kompetenzen wie „eigenständige Berechnung“ gehen zurück. Steigt der Lernzuwachs durch die Technologie? Laut Hattie-Studie ist dies weder für Lernen 1.0 noch 2.0 der Fall.

Lernen 3.0 ermöglicht eine Erhöhung der Effektstärke auf das Lernen, weil umfangreiches Wissen durch das Internet verfügbar wird. Voraussetzung: Aufgaben werden neu gestaltet. Eine Veränderung kann auch durch CAS-fähige Rechner erreicht werden: Funktionale Zusammenhänge werden nicht als Zusammenfassung endlich vieler Punkte aufgefasst, sondern als über den reellen Zahlen definiert. Die Algorithmen dazu können im Unterricht thematisiert werden. Dies herauszuarbeiten und mathematische Konzepte zu entwickeln, um Neues zu entdecken, erfordert neuartige Aufgabenstellungen.

Lernen 4.0 nutzt völlig neue Wege der Arbeit, Lösung und Kommunikation. Ein Konzept für den Mathematikunterricht wird entwickelt, das dem analogen Lernen Rechnung trägt, alle Sinne anspricht. Schreiben, Zeichnen, Begreifen, Denken, Diskutieren, Mitteilen, kritisches Hinterfragen, Folgern, Entdecken und Begründen werden unterstützt, das Gehirn kann sich weiterentwickeln. Die schon fast alltägliche Nutzung von Internet und Kommunikationswegen wird sinnstiftend einbezogen. Lehrer müssen eine kritische, zielgerechte und zeiteffiziente Technologienutzung entwickeln.

Klassische Unterrichtsmethoden sind in so ein didaktisch-methodisches Konzept eingebunden. Erfassen und Begreifen mathematischer Zusammenhänge wird durch intensiven Austausch zwischen den Lehrenden und Lernenden gefördert. Im Oberstufenunterricht gelingt eine gute Kompetenzentwicklung, wenn die angesprochenen Probleme möglichst oft auf echten Alltagssituationen beruhen. Deren Komplexität erfordert die Nutzung digitaler Medien im beruflichen Alltag ist es Standard. Informationen aus dem Netz zu entnehmen und Nachfragen bei Fachleuten werden selbstverständlich. Die direkte Kommunikation kann und darf nicht ersetzt werden. Der zwischenmenschliche Kontakt ist auch im Berufsleben essentiell, „Softskills“ werden noch wichtiger. Lernen 4.0 bedeutet, die für schülerzentrierten Mathematikunterricht entwickelten didaktisch-methodischen Konzepte auszuschöpfen. Durch Technologieeinsatz werden sie so erweitert, dass alle Schüler die Sinnhaftigkeit des Lernens erfassen können. Sie sind bestrebt, ihre fachlichen und zwischenmenschlichen Kompetenzen zu erweitern.

Lehrer lernen selber, wenn sie gezielt Erfahrungen und Ideen nutzen, die Schüler in den Unterricht einbringen. Sie leben den kritischen Umgang mit Informationen und Technologien vor und reflektieren dies mit den Schülern. So wird Eigenverantwortung, Selbstbewusstsein und der Lernwille der Schüler gefördert, die intrinsische Motivation gesteigert, die Effektstärke erhöht. Die Abstufungen werden durch die Begriffe Ersetzung, Erweiterung, Änderung, Neubelegung deutlich. Jeder Schritt bringt eine Verbesserung, Änderung und Neubelegung erfordern ein Umdenken bezüglich Aufgabenstellungen und Unterrichtskonzepten. Unterstützt wird dieser Gedanke durch die Forderung nach Ko-Konstruktion und handlungsorientiertem, schülerzentriertem Unterricht mit ganzheitlichem und berufsnahem Ansatz. Zwei Beispiele dafür werden im Folgenden vorgestellt.

Die Erdbeerernte

Technikeinsatz ermöglicht die Erstellung neuartiger Aufgaben und die Schüler entwickeln einen kompetenten Umgang mit der Mathematik; die Bearbeitung berufsbezogener, weitgehend realistischer Problemstellungen wird möglich. Alle Schüler sind angesprochen, weil sie Fragen bezüglich der beruflichen Situation oder innermathematischer Sachverhalte angstfrei angehen können. Wer „nicht rechnen kann“, verliert durch die Nutzung der Hilfsmittel die Angst vor Zahlen, der Knoten im Kopf wird gelöst. Neue, manchmal unerwartete Erkenntnisse sind durch die Entwicklung einer Frage- und Fehlerkultur möglich.

Aufgabe

Landwirt Friedhelm Hilbers verwendet Dünger um eine hohe Erntemenge zu erzielen. Jährlich sammelt er Daten, um den Zusammenhang zwischen Erntemenge und eingesetzter Düngermenge angeben zu können:

Düngermenge x in Kilogramm	Erntemenge p(x) in Tonnen
0	18,4
360	39,5
450	38,4
390	39,7
120	23,8
280	35,6
360	38,2
180	29,1
210	33,1
350	39,5
170	28,2
600	12,2

Nach der letzten Ernte berät er sich mit seiner Familie.
Sein Sohn rät, keinen Dünger zu verwenden. Immerhin liefere der Verzicht auf Dünger etwa 20 Tonnen Erdbeeren pro Hektar.
Seine Tochter erinnert sich, dass bei 390 Kilogramm Düngemittel die Erntemenge auf rund das Doppelte im Vergleich zum ungedüngten Feld gestiegen war und dadurch bisher die höchste Erntemenge (Produktion) erzielt wurde. Seine Frau meint,

dass für eine kleine Änderung der Düngermenge bei etwa 180 kg die Produktionssteigerung am größten war.

Herr Hilbers will bei der Genossenschaft Rat holen und bittet sie um Unterstützung.

Die Lehrkraft begleitet die Strukturierung, achtet auf die Zeitvorgabe, gleicht die erforderliche Kompetenzentwicklung mit der erreichten ab, hält die curricularen Vorgaben ein. Sie unterstützt die Schüler darin, die erforderlichen Inhalte zu erarbeiten und sich der neuen Erkenntnisse bewusst zu werden. Im durchgeführten Unterricht stellten die Schüler die folgenden Fragen:

- Wie kommt es dazu, dass bei 600 kg Dünger die Produktion nur bei 12,2 t liegt und bei 0 kg Dünger die Produktion bei 18,4 t?
- Wieso ist bei 180 kg die Produktionssteigerung am größten und bei 390 kg Düngemittel die höchste Produktion?
- Bei wie viel Kilogramm Düngermenge entsteht der größte Gewinn?
- Bei welcher Düngermenge in Kilogramm entsteht die größte Produktion in Tonnen?
- Ab welcher Düngermenge sinkt die Produktion, bei welcher steigt sie – und warum?
- Lohnt sich der Einsatz von Dünger?
- Decken sich die Aussagen der Familie mit seinen Notizen?
- Wie funktioniert das mit dem Taschenrechner, die Daten einzutragen? (Man muss doch Regression machen?)
- Was bedeutet Produktionssteigerung?
- Was wäre das für eine Funktion?
- Wie teuer ist das Düngemittel?
- Wieso wird das Düngemittel überhaupt eingesetzt?
- Wie kommt der Landwirt Hilbers auf die Auswahl der Düngermenge?
- Wie viel Dünger würde eine Tonne Erdbeeren bringen?
- Wie viele Erdbeeren wird der Bauer los?
- Fallen Fixkosten an?
- Ist es der beste Dünger?
- Wie viele Mitarbeiter hat Friedhelm Hilbers?

Damit ist die Grundlage für die intrinsisch motivierte, wirtschaftliche Modellierung und die anschließende Erarbeitung von mathematischen Fragen z.B. aus dem Themenbereich Funktionssynthese, Regression und Funktionsanalyse gelegt.

Mit dem ClassPad II ist es gut möglich, die Regression mit den Ergebnissen der Funktionssynthese zu vergleichen, ihren Einsatz gegeneinander abzugrenzen. Die Abhängigkeit des Ertrags von den Ausgaben für Dünger kann damit funktional beschrieben werden sowie die Kostenfunktion ermittelt und untersucht werden.

Nachhaltige Nutzung von Plastiktüten (Klaus Gebken)

Überall werden Menschen in Zukunft Plastik vorfinden, es verrottet nicht! Schätzungsweise 300 Millionen Tonnen Kunststoff sind jedes Jahr im Umlauf, nur etwa 15 % davon werden recycelt. Seit 2002 werden in Neu-Delhi von Plastiksammlern (Ragpicker) aufgehobene Tüten durch das indische Non-Profit-Unternehmens Conserve zu modischen Taschen weiterverarbeitet. Die gewaschenen und getrockneten Tüten werden unter Druck und Hitze in ein neuartiges Material verwandelt. Ebenso werden Jeansreste für die Produktion der Taschen verwandt. Ziele von Conserve sind auch faire Arbeitsbedingungen und eine gerechte Bezahlung.

Die Absatzproblematik dieser Umhängetaschen hat das Non-Profit-Unternehmen veranlasst, den deutschen Markt genauer zu betrachten. Befragungen ergaben, dass 200 Upcycling-Taschen pro Monat für einen Preis von 80,00 € pro Tasche verkauft werden können, bei 55,00 € pro Tasche steigt der Absatz auf 300 Taschen; die Kaufbereitschaft sinkt mit steigendem Preis. Aufgrund der steigenden Konkurrenz wurde auch das Angebot der Mitbewerber genauer untersucht: Kein Anbieter kann unter einem Preis von 20,00 € pro Tasche produzieren, bei einem Verkaufspreis von 80,00 € pro Tasche werden 400 dieser Taschen auf dem deutschen Markt von unterschiedlichen Unternehmen angeboten.

Aufgabe

Unterstützen Sie Conserve! Ermitteln Sie alle erforderlichen wirtschaftlichen Kennzahlen für den optimalen Absatz und legen Sie den geeigneten Preis für die Taschen fest.

Leserbrief

Lieber Herr Gageur, zu Ihrem Artikel „Vielfältige Lösungsansätze“ cafo 1/2018 habe ich einige Bemerkungen. Zunächst finde ich die Aufgabenstellung und die Diskussion verschiedener Lösungsansätze sehr gut.

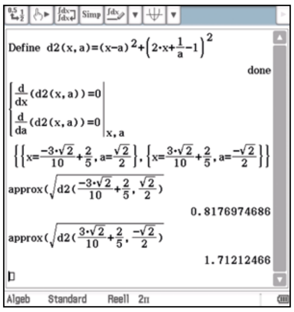
Zum 1. Ansatz:

Die Funktion

$$d^2(x,a) = (x-a)^2 + \left(2x - \left(1 - \frac{1}{a}\right)\right)^2$$

ist eine Funktion von zwei Veränderlichen. Eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extremwertes von $d^2(x)$ an der Stelle (x_0, a_0) ist das Nullwerden der beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung. Sie machen es nun so, dass Sie erst nach x ableiten, diese Ableitung null setzen, dann nach x umstellen und diesen Wert in die Funktion d^2 einsetzen. Diese Funktion $d^2(a)$ leiten Sie nach a ab und ermitteln die Nullstellen dieser Ableitung. Das sind dann die möglichen Extremstellen.

Mit dem ClassPad kann man die partiellen Ableitungen von d^2 gut bilden und das entstehende Gleichungssystem bequem lösen. Es ergibt sich die von Ihnen angegebene Lösung:



Zum 2. Ansatz:

Zunächst habe ich mich gefragt, wozu braucht er die Tangente? Ich vermute, um die Animation starten zu können. Wenn das so ist, dann sollte man das dem Leser auch mitteilen. Insgesamt ist es eine sehr interessante Lösung. [Anm. d. Red.: Gute Frage – ein Punkt auf der Kurve hätte auch genügt.]

Zum 3. Ansatz:

Die Berechnungsformel $A = \frac{m \cdot a - b + n}{\sqrt{m^2+1}}$ für den Abstand ergibt sich aus der Hesse'schen Normalform der Geradengleichung $y = m \cdot x + n$. Daraus ergibt sich ein 4. Ansatz:

4. Ansatz:

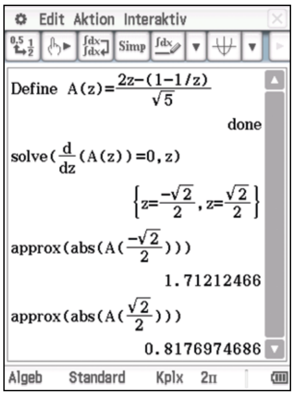
Es sei $Q(z, g(z))$ ein Punkt auf dem Graphen von g, also $Q\left(z, 1 - \frac{1}{z}\right)$.

Die Hesse'sche Normalform der Geraden $y = 2x$ lautet $\frac{2x-y}{\sqrt{5}} = 0$.

Der Abstand des Punktes Q von dieser Geraden ist

$$A(z) = \left|\frac{2z - \left(1 - \frac{1}{z}\right)}{\sqrt{5}}\right|.$$

Ein Extremum kann A nur haben, wenn $A'(z) = 0$. Folgende Rechnung auf dem ClassPad liefert das Ergebnis für den Fall $0 < \frac{2z - \left(1 - \frac{1}{z}\right)}{\sqrt{5}}$ betrachtet.



Meine Bemerkungen sollen eine Ergänzung zu Ihrem guten Artikel sein.
Mit herzlichem Gruß, Wolfgang Ludwicki

Prüfungsaufgabe: Hopfen

Die AHS-Matura in Mathematik im Mai[1] enthielt erstmals Typ-2-Aufgaben mit besonderen Technologiekomponenten, z.B. im nachfolgend bearbeiteten Auszug.

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1+b\cdot e^{k\cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t=0$) zusammengefasst.

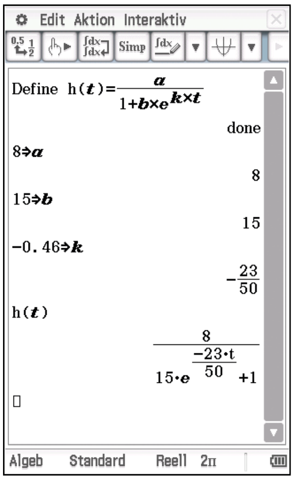
Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a=8$, $b=15$ und $k=-0{,}46$ ermittelt.

Aufgabe

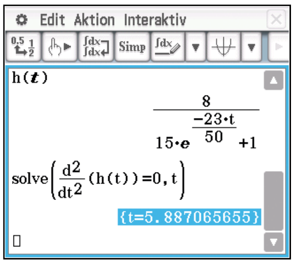
Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2, zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Zunächst wird die Modellfunktion $h(t)$ in allgemeiner Form definiert und dann werden den Parametern Werte zugewiesen.



Dieses bietet gute Kontrollmöglichkeiten insbesondere mit der letzten Zeile.

Gesucht wird die Nullstelle der zweiten Ableitung von $h(t)$. Die entsprechende Gleichung wird eingegeben und anschließend ausgewählt. Der Assistent unter Interaktiv → (Un-)Gleichungen → solve gibt mit dem Eingabefeld für „Variable“ einen Hinweis, dass nicht nach x, sondern nach t gelöst werden muss. Über die Symbolleiste lässt sich nach Markieren zwischen exaktem Ergebnis und Dezimaldarstellung wechseln.

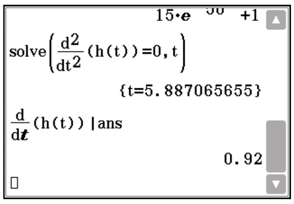


Die Pflanze wächst nach etwa 5,9 Wochen am schnellsten.

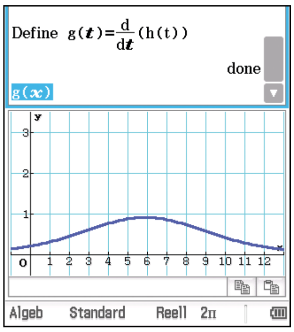
Aufgabe

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g, die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von t beschreibt!

Das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe muss in die erste Ableitung der Funktion h eingesetzt werden. Der senkrechte Strich für „an der Stelle“ findet sich z.B. unter Shift ,.



Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt also etwa 0,92 Meter pro Sekunde. Die Grafikanwendung benötigt ein x als Funktionsvariable. Nach Definition der Wachstumsgeschwindigkeit g, die durch die erste Ableitung von h gegeben ist, kann sie elegant durch Herunterziehen von $g(x)$ gezeichnet werden. Der benötigte Ausschnitt des Koordinatensystems wird über das Symbol in der Symbolleiste eingestellt, z.B. $-1<x<13$ und $-0{,}5<y<3{,}5$.



Weitere Lösungen von Typ-1- und Typ-2-Übungsaufgaben mit dem ClassPad II finden Sie in der Materialdatenbank unter **www.casio-schulrechner.at**

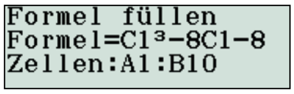
Gleichungen lösen mit dem Sekantenverfahren

Der FX-87DE X beherrscht von Haus aus kein Gleichungslösen. Im CASIO forum, Ausgabe 2/2015, wurde vorgestellt, wie mithilfe des Newton'schen Tangentenverfahrens dennoch Gleichungslösungen bestimmt werden können. Beim Sekantenverfahren wird anstelle der Ableitung der Differenzenquotient eingesetzt. Näherungsschritt ist dann jeweils

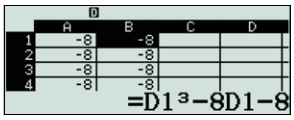
$$x - \frac{f(x)}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

mit einer Differenz der beiden Funktionsargumente von z.B. $h = \frac{1}{100}$

Als Beispiel mag hier die Gleichung $x^3 = 8x + 8$ dienen. Der Funktionsterm linke Seite - rechte Seite führt zu $f(x) = x^3 - 8x - 8$. Eingetragen wird er gleichzeitig in die Spalten A und B der Tabellenkalkulation mittels OPTN, Formel füllen, wobei x durch „C1“ zu ersetzen ist und die Einträge von A1 bis B10 heruntergezogen werden:

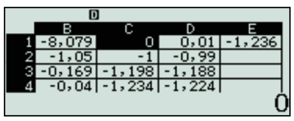


Die Argumente für Spalte A werden später in Spalte C, die Argumente für Spalte B in Spalte D zu finden sein:



Mit einer Differenz von h zwischen den Spalten C und D ist so die Berechnung von f(x) und f(x+h) in Spalte A und B erledigt.

Sie werden sich passenderweise um den Wert h unterscheiden. **In C1** wird der Startwert eingetragen, z.B. **5,** und **ab C2** das Sekantenverfahren heruntergezogen, wobei der Doppelbruch erst naheliegend vereinfacht wird: **OPTN**, **Formel füllen „=C1-A1÷100(B1-A1)“ von C2 bis C11. Spalte D** wird um h größer: OPTN, Formel füllen **„=C1+1÷100“** von **D1 bis D10**. Um das Ergebnis zu sehen, wird der letzte Wert des Sekantenverfahrens in **E1** eingetragen: **„=C11“**. Die Lösung wird z.B. mit STO (−) in A gespeichert und mit SHIFT STO angesehen. Weitere Lösungen können leicht durch Ändern des Startwertes gefunden



und in weitere Variablen gespeichert werden. Sie stehen dann in allen Bereichen zur weiteren Nutzung bereit.

[1] Quelle: https://www.srdp.at/downloads/dl/haupttermin-201718-mathematik-ahs/

Denken in Funktionen bei Verteilungen in der Stochastik

Autor: Manuel Garcia Mateos, Landesinstitut für Pädagogik und Medien Saarland

1. Einleitung

In der Stochastik scheinen Probleme vieler Schüler darin zu liegen, dass Ansätze und (Denk-)Modelle zur Lösung von Aufgaben, etwa der Weg über das Gegenereignis, vom Lehrer vorgegeben werden und für Schüler nicht selbstverständlich erscheinen. Zudem wird die Lösung der Aufgaben oder Probleme häufig auf der formal-symbolischen Ebene, also rein rechnerisch oder algebraisch, durchgeführt und die Texte sind sprachlich anspruchsvoll.

Aus den Texten ergeben sich häufig Interpretationsprobleme der mathematischen Ergebnisse, etwa im Zusammenhang mit sogenannten Mindestens-Aufgaben und entsprechend Höchstens-Aufgaben („Müssen es mindestens 100 Versuche oder höchstens 100 Versuche sein?“, „Muss die Erfolgswahrscheinlichkeit p mindestens oder höchstens 0.2 betragen?“, „Muss die Streuung mindestens oder höchstens 3 ml betragen?“).

Mithilfe des GTR können Aufgabenstellungen in der Stochastik analog zur Analysis bearbeitet werden, indem man das zugrunde liegende mathematische Modell als Funktion der gesuchten Größe betrachtet. Dadurch wird eine gedankliche und methodische „Brücke“ zu bekannten Arbeitstechniken aus der Analysis geschlagen, denn der Schüler hat erfahren, dass Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit Funktionen sich nicht nur formal-symbolisch, sondern auch grafisch-visuell, etwa durch Schnittpunktbestimmungen, numerisch-tabellarisch mithilfe von Wertetabellen oder sprachlich-situativ durch Argumentationen von Veränderungen und Zusammenhängen bearbeiten lassen, also durch Darstellungswechsel, die der Denkpräferenz der Schüler entgegenkommen.

H.-J. VOLLRATH bezeichnet eine solche methodologische Vorgehensweise als „Funktionales Denken“ (Journal für Mathematikdidaktik 10, 1989, S. 3-37). Die Stochastik wird durch ein Funktionales Denken mit anderen Teilgebieten der Mathematik vernetzt und die Schüler erfahren, dass sich die oben genannten Bearbeitungsmethoden zur Lösung von Aufgaben durch alle Gebiete der Mathematik ziehen. Der GTR bzw. CAS bietet also dem Schüler je nach (Denk-)Präferenz individuelle Bearbeitungswege an und ist somit ein Hilfsmittel der Individualisierung. Das (methodologische) Vorwissen der Schüler wird genutzt.

Im Folgenden wird das Funktionale Denken an zwei Beispielen im Zusammenhang mit Verteilungen in der Stochastik dargestellt.

2. Kumulierte Binomialverteilung als Funktion des Stichprobenumfangs *n* (3-Mindestens-Aufgabe)

Beispiel 1

Die Werbung eines namhaften Herstellers verspricht, dass in jedem 7. Ei ein tolles Geschenk enthalten ist.

a) Wie viele dieser Überraschungseier musst du (mindestens) kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von (mindestens) 95% mindestens ein Geschenk zu erhalten?

b) Wie viele Überraschungseier musst du kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens 10 tolle Geschenke zu erhalten?

Diese Aufgabe wird häufig als Anwendung der Binomialverteilung gestellt. Es handelt sich um eine sog. 3-Mindestens-Aufgabe.

Rein formal lässt sich der Aufgabenteil a) über das Gegenereignis „kein Geschenk“ lösen.

Das zugrunde liegende mathematische Denkmodell über das Gegenereignis ist jedoch für Schüler in der Regel schwer zugänglich. Hinzu kommen Probleme mit der rechnerischen Lösung (aufgrund des Logarithmus) und der Interpretation des Ergebnisses (Umkehrung des Relationszeichens bei der Rechnung).
Aufgabenteil b) lässt sich formal-symbolisch nicht lösen. Es lässt sich aber klären, dass man für mindestens 10 Erfolge nicht 10-mal so viele Geschenke kaufen muss wie bei mindestens einem Erfolg.

Eine schülernahe, direkte Bearbeitung der Aufgabenstellung ist mithilfe des GTR (CASIO fx-CG50) oder CAS (ClassPad II) leicht möglich. Dabei wird die kumulierte Binomialverteilung $P_{n,p}$ $(X \leq k)$ als Funktion der gesuchten Größe, hier des Stichprobenumfangs *n*, betrachtet und die Aufgabe grafisch, numerisch oder wenn möglich symbolisch gelöst.
Es ist hier der Stichprobenumfang *n* gesucht, bei dem die Wahrscheinlichkeit der Binomialverteilung $P_{n,\frac{1}{7}}$ $(1 \leq X) \leq 0{,}95$ ist. Es werden also Methoden verwendet, die der Schüler im Zusammenhang mit der Lösung von Aufgaben aus der Analysis schon kennt. Eine Verbindung der Leitideen L5: *Daten und Zufall* und L4: *Funktionaler Zusammenhang* mit eigentlich allen allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K1–K6) ist im Verlauf des Unterrichts und der Bearbeitung möglich.

Die Eingabe der kumulierten Binomialverteilung erfolgt in der Tabellenanwendung mithilfe des BinomialCD-Befehls BinomialCD(1,x,x,1/7) (sprachlich: „Ermittle den Wert der kumulierten Binomialverteilung von 1 bis *x* bei einem unbekannten Stichprobenumfang *x* und der Erfolgswahrscheinlichkeit 1/7.“) durch MENU > 7(Tabelle) > OPTN > F6 > F3(STAT) > F1(DIST) > F5(BINOMIAL) > F2(Bcd).
Gesucht ist der Schnittpunkt der Funktion mit der Funktion $g(x) = 0.95$ bzw. die Stelle, an der der Wert 0.95 überschritten wird (s. Abbildung 1).

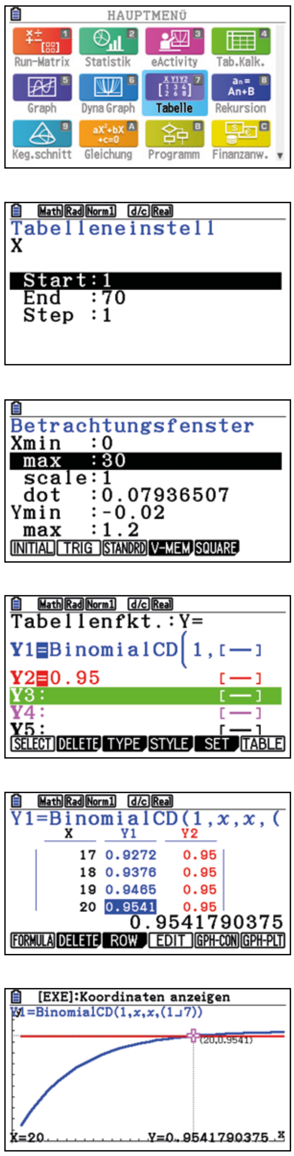


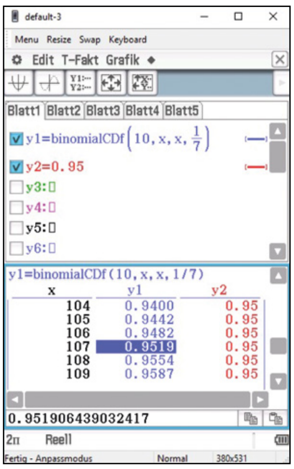
Abb. 1: Bearbeitung des Aufgabenteils a) mit dem CASIO fx-CG50

[1] Sollte in einer anderen Aufgabenstellung z. B. die Erfolgswahrscheinlichkeit p gesucht sein, dann lässt sich der SolveN-Befehl im Run-Matrix-Menü anwenden, weil p keine diskrete Größe ist. So ergibt sich für die Fragestellung nach der Erfolgswahrscheinlichkeit p für höchstens 20 Treffer einer Binomialverteilung mit n=30 und der Wahrscheinlichkeit $P_{30,p}(0 \leq X \leq 20) \approx 0.95$ der Wert p = 0.535 (SolveN(BinomialCD(0,20,30,x) = 0.95).

Mithilfe der (näherungsweisen) Wahrscheinlichkeit der kumulierten Binomialverteilung am Erwartungswert kann argumentiert werden, dass eine Wertetabelle vom Umfang $n=70$ ausreichend ist. Nach Anpassung der Tabelleneinstellungen kann eine Wertetabelle in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „mindestens einen Erfolg“ erstellt und grafisch dargestellt werden. Der Spurmodus (F1 Trace) kann verwendet werden, um in der grafischen Darstellung die Lösung abzulesen (hier mindestens 20 Versuche). Ungeachtet der dargestellten Bearbeitungsmöglichkeiten hat im Unterricht natürlich noch die formal-symbolische, exakte Bearbeitung der Aufgabe über das Gegenereignis ihre Berechtigung und Notwendigkeit, die hier jedoch nicht ausgeführt wird.

Der direkte rechnerische Zugang über SolveN ist bei diskreten Variablen, etwa dem Stichprobenumfang, nicht möglich. Daher versagt der Befehl SolveN(BinomialCD(1,x,x,1/7) = 0.95) in der Run-Matrix-Anwendung[1]. Weiterhin lässt sich anschaulich mithilfe der Monotonie des Graphen der kumulierten Binomialverteilung und der Wertetabelle begründen, dass es mindestens 20 Versuche sein müssen. Die grafische und numerische Darstellung erlaubt es daher, sprachlichen und gedanklichen Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Wort „mindestens“ entgegenzuwirken.

Analog lässt sich der Aufgabenteil b) bearbeiten. Der GTR oder das CAS können genutzt werden, um zu argumentieren, dass eine Wertetabelle bis maximal 140 Versuchen erstellt werden muss, da man bei 140 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 0.5 mindestens 20 Geschenke erwartet und die Streuung sehr viel kleiner als 10 ist. Beim Classpad wird für die Bearbeitung der binomialCDf-Befehl verwendet (s. Abbildung 2).



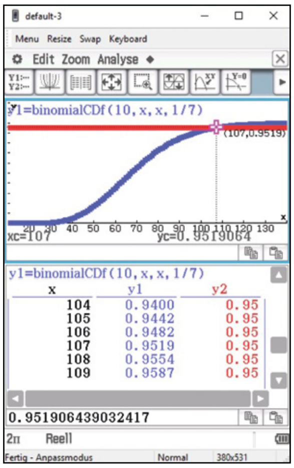


Abb. 2: Bearbeitung des Aufgabenteils b) aus Beispiel 1 mit dem ClassPad II

3. Kumulierte Normalverteilung $P_{\sigma,\mu}(X \leq k)$ als Funktion des Erwartungswertes

Aufgaben im Zusammenhang mit stetigen Verteilungen, etwa der Normalverteilung $N(\sigma,\mu)$, können anders als bei diskreten Verteilungen sowohl numerisch über das Lösen einer Gleichung mithilfe des SolveN-Befehls als auch in der Grafik-Anwendung bearbeitet werden. In einigen Fällen ist auch eine exakte formal-symbolische, exakte Lösung möglich. Das folgende Beispiel zeigt die Bestimmung eines Mittelwertes bei einer normalverteilten Zufallsgröße. Es wird daher die kumulierte Normalverteilung als Funktion des Erwartungswertes betrachtet.

Beispiel 2

Eine EU-Richtlinie für Abfüllmaschinen besagt: Die tatsächliche Abfüllmenge darf im Durchschnitt nicht niedriger sein als die Nennfüllmenge. Bei Literflaschen beträgt die Nennfüllmenge 1000 ml. Ein Abfüllbetrieb hat seine Maschinen auf einen Mittelwert von μ = 1005 ml eingestellt. Die unvermeidliche Streuung beträgt σ = 3 ml.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Kunde eine unterfüllte Flasche erhält.

b) Eine neue Maschine hat eine Streuung von nur noch σ = 1 ml. Berechne den Mittelwert, damit die Wahrscheinlichkeit für eine Unterfüllung genauso groß ist wie bei den alten Maschinen.

(aus: Bigalke/Köhler, Mathematik – Leistungsfach, Band 2, Gymnasiale Oberstufe, S. 406)

In Aufgabenteil a) wird mithilfe des Befehls NormCD im Run-Matrix-Menü die entsprechende Wahrscheinlichkeit für eine Unterfüllung bestimmt und in der Variablen A gespeichert (s. Abbildung 3). Im Anschluss wird Aufgabenteil b) grafisch in der Grafik-Anwendung als Schnittpunktproblem mithilfe von G-Solv (INTSECT) gelöst (Fenster-Einstellung: $995 \leq x \leq 1005$; $-0.2 \leq y \leq 1.2$). Am Verlauf des Graphen ist zu erkennen, dass der gesuchte Mittelwert mindestens 1001,7 ml betragen muss, um die Wahrscheinlichkeit für eine Unterfüllung nicht zu überschreiten. In der Tabellen-Anwendung lässt sich dieses numerisch bestätigen. Rechnerisch kann der SolveN-Befehl verwendet werden. Es werden zwei Lösungen angezeigt, die interpretiert werden müssen und können[2]. Eine rein rechnerische Bestimmung der Lösung ist aber nicht verständnisfördernd.

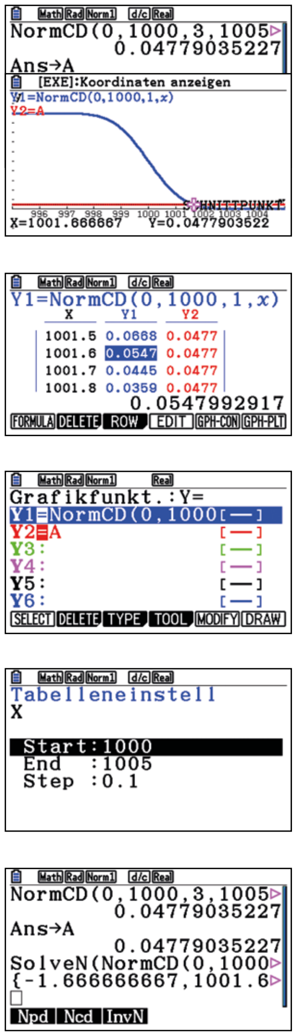


Abb. 3: Bearbeitung des Beispiels 2 mithilfe des CASIO fx-CG50

Fazit

Die Betrachtung von stochastischen Verteilungen als Funktion der gesuchten Größe erlaubt eine Vernetzung mit bekannten Problemlösemethoden aus der Analysis und vernetzt die Stochastik mit der Analysis. Der Schüler hat die Möglichkeit eigene, seinen Denkstrukturen und „Vorlieben“ angepasste (schematische) Lösungswege zu gehen und erlaubt es dem Lehrer verschiedene Darstellungen zu thematisieren und für seinen Unterricht zu nutzen. Der GTR wird somit zu einem idealen Werkzeug der Individualisierung und kann seine Stärken ausspielen.

[2] Für N(1,1001.7) als auch für N(1,–1.67) ist P(0≤X≤1000)≈0.048. Allerdings ist bei der ersten Verteilung die entsprechende Fläche links vom Mittelwert, während bei der zweiten Verteilung die Fläche rechts vom Mittelwert ist. Daraus ergeben sich entsprechende Interpretationen der Ergebnisse für den Mittelwert (mindestens und höchstens), damit die Wahrscheinlichkeit für eine Unterfüllung nicht überschritten wird. Der Mittelwert -1.67 macht in diesem Kontext keinen Sinn!

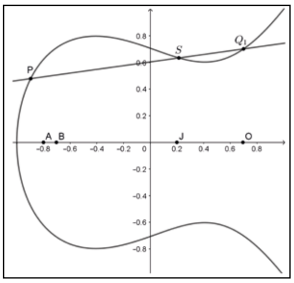
Worte in der Sprache von Kurven

Autor: Hannes Stoppel und Benjamin Rott

Funktionen sind ein zentraler Bestandteil der (Schul-)Mathematik, mit denen man Zusammenhänge und Abhängigkeiten von Größen darstellen kann. Eine spannende Ergänzung bzw. eine Verallgemeinerung zum Begriff der Funktion stellen Kurven dar, die mit Schulmitteln erfasst und verstanden werden können (vgl. Baeger, 2016). Im Folgenden führen wir elliptische Kurven im Zusammenhang mit der Codierung von (Geheim-)Nachrichten aus der Sicht des Mathematikunterrichts ein. Hierdurch zeigt sich zugleich eine Verbindung zwischen geometrischen Objekten der Mathematik und der Praxis der Verschlüsselungstheorie.

Hinter elliptischen Kurven verbergen sich die Punkte (x|y) in der Ebene, deren Koordinaten bestimmte Gleichungen erfüllen, wie beispielsweise die Weierstraß-Gleichung $y^2 = x^3 - a \cdot x + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Eine Möglichkeit für ein Verfahren der Codierung, das sich grafisch vorstellen lässt, funktioniert wie folgt: Stellen auf der x-Achse, die unter der Kurve liegen, ordnet man die Buchstaben des Alphabets zu. Dann wählt man eine elliptische Kurve und hält einen bestimmten Punkt *P* auf ihr fest. Zu jedem Buchstaben wählt man einen anderen Punkt Q_1 auf der Kurve und legt dann durch *P* und Q_1 eine Gerade. Diese Gerade schneidet die Kurve in einem dritten Schnittpunkt *S*. Diesen dritten Schnittpunkt *S* nutzt man, um den Geheimtext-Buchstaben zu wählen. Im Bild wird aus dem Klartext-Buchstaben „O" der Geheimtext-Buchstabe „J".



Der FX-CG50 und der ClassPad II bieten gute Möglichkeiten, sich mit der Kryptographie mithilfe von Weierstraß-Kurven zu befassen. Hierbei zeigen sich Eigenschaften von Polynomen dritten Grades und der Wurzelfunktion. Nicht zuletzt der maximale Definitionsbereich der Wurzelfunktion und der Wertebereich einer ganzrationalen Funktion zeigen sich hier. Hier beschreiben wir die Aufgaben für den CG50, die auch für den ClassPad geeignet sind.

Codierung mit Funktionsgraphen

Wir beschränken uns zunächst auf die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^3 - 0{,}5x + 0{,}5}$, definieren sie in Y1 und nehmen dazu den Punkt *P*(-0,90|*f*(-0,90)). Die *x*-Koordinaten der Buchstaben gehen von -0,8 für „A" und -0,7 für „B" bis 1,8 für „Z" und 1,9 für das Leerzeichen in Schritten von 0,1 von einem zum nächsten Buchstaben bzw. Zeichen. (Bei „0" ist eine Lücke, d.h. „-0,10" gehört zu „H", und „0,10" gehört zu „I".) Ein Teil der Zuordnungen der Buchstaben zu bestimmten Punkten Q_1 (q_1|$f(q_1)$) für die ersten Buchstaben des Alphabets ist in der dritten Spalte von Tabelle 1 zu sehen.

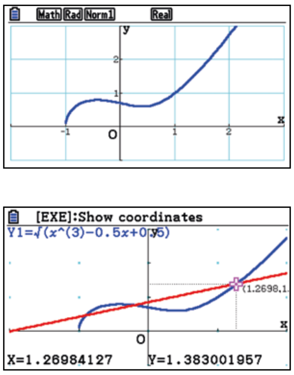


Abbildung 1

Der dritte Schnittpunkt *S* einer Geraden *R* durch den Punkt *P* und den Punkt Q_1 eines Buchstabens lässt sich beispielsweise grafisch bestimmen, siehe Abbildung 1, unten.

Alphabet	Zugehörige Zahl q_1	$q_2 = f(q_1)$	S	m
„A"	-0,8	0,62	(4,03|-8,01)	1,53
„B"	-0,7	0,71	(3,06|-5,26)	1,21
„C"	-0,6	0,76	(2,46|-3,76)	0,98
„D"	-0,5	0,79	(2,04|-2,83)	0,80
„E"	-0,4	0,80	(1,73|-2,19)	0,65

Tabelle 1

Der FX-CG50 bietet jedoch auch die Möglichkeit, die Gleichung der Gerade durch $P(p_1,p_1)$ und $Q(q_1,q_1)$ sowie ihre dritten Schnittpunkte mit dem Graphen von f zu berechnen, denn für die Geradengleichung gilt

$$y = m \cdot x + c$$
$$= m \cdot (x - p_1) + p_2 \ \ mit \ \ m = \frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}.$$

Die Berechnung der Steigung der Gerade ist auf der oberen Hälfte von Abbildung 2 für den Buchstaben „G" sichtbar. Hierbei wurden die *x*-Koordinaten für *P* und *Q* eingegeben; die *y*-Koordinaten wurden mithilfe der Funktion f berechnet. Der *y*-Achsenabschnitt c der Gerade lässt sich, wie in der ersten Zeile der unteren Hälfte von Abbildung 2 sichtbar berechnen. Definiert man die Geradengleichung in Y2, so lassen sich wie in der unteren Zeile der rechten Seite von Abbildung 2 sichtbar, mit SolveN die Schnittpunkte der Gerade durch *P* und *Q* mit dem Funktionsgraphen von f berechnen.

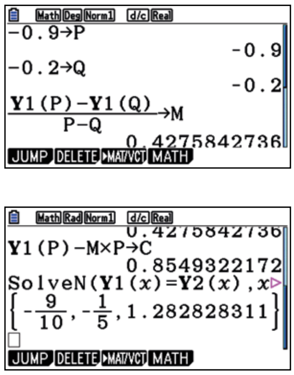


Abbildung 2

Codiert man den Text so, dass man den Punkt *S* zur Verschlüsselung wählt, so lässt sich an den relativen Häufigkeiten bestimmter Buchstaben unter Umständen die Nachricht „knacken".

Um nicht unmittelbar an der relativen Häufigkeit der Punkte den Code knacken zu können, wird für die Nachricht die *x*-Koordinate der Differenz der Punkte *S* zweier aufeinander folgender Buchstaben genommen. Folgt also der Buchstabe „A" auf den Buchstaben „M", so wird (4,03|-8,01)-(0,41|-0,60)=(3,62|-7,41) berechnet und anschließend die 3,62 gesendet.

Vom Funktionsgraphen zur Kurve

Wie an obigem Beispiel der Buchstaben „A" und „M" sichtbar ist, kann es bei der Codierung passieren, dass eine Gerade keinen dritten Schnittpunkt mit dem Funktionsgraphen der Funktion f besitzt. Daher nehmen wir noch die Funktion g mit $g(x) = -f(x) = -\sqrt{x^3 - 0{,}5x + 0{,}5}$ hinzu. Die Lösungsmenge der Weierstraß-Gleichung $y^2 = x^3 - 0{,}5x + 0{,}5$ ist dann genau die Menge der (x|y) $\in \mathbb{R}^2$ mit
$y = \pm\sqrt{x^3 - 0{,}5x + 0{,}5}$ bzw.
$y^2 = x^3 - 0{,}5x + 0{,}5$,
um die Wurzel zu vermeiden; daher ergeben die Graphen der Funktionen f und g gemeinsam diese Kurve, und wir haben

das Problem des dritten Schnittpunkts der Gerade zu zwei aufeinander folgenden Buchstaben mit dem Graphen von f beseitigt.

Codiert man die Nachricht MATHE IST SUPER mithilfe der Weierstraß-Kurve
$y^2 = x^3 - 0{,}5x + 0{,}5$,
so ergibt sich mithilfe des fest gewählten Punktes *P*(-0,90|f(-0,90)) bei der Codierung von MATHE IST SUPER mit „PM“ am Anfang:
0,41; 4,03; -0,15; 1,11; 1,73; -0,46; 0,84; -0,09; -0,15; -0,46; -0,09; -0,21; 0,13; 1,73; -0,02

Gesendet wird dann:
PM: 1,31; MA: 3,62; AT: -4,18; TH: 1,26; HE: 0,62; E_: -2,19; _I: 1,3; IS: -0,93; ST: -0,06; T_: -0,31; _S: 0,37; SU: -0,12; UP: 0,34; PE: 1,60; ER: -1,75

Treten Punkte mehrfach hintereinander auf, so ist die Tangente an den Graphen zu legen. Hierbei lässt sich beispielsweise auf die Ableitung der Funktionen f und g zurückgreifen.

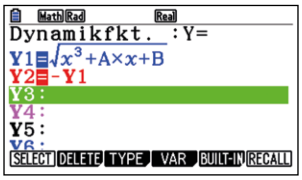
Decodierung

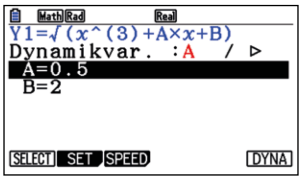
Die Decodierung beginnt von vorne. Zunächst werden die erste Koordinate von P und die erste Komponente $r_x = 1{,}31$ der gesendeten Liste addiert:
-0,9 + 1,31 = 0,41 – Das ergibt „M“.
Als Nächstes werden dieser r_x-Wert von „M“ und die zweite Komponente der Liste addiert:
0,41 + 3,62 = 4,03 – Dies führt zu „A“.

Dieses Verfahren wird fortgesetzt und führt zum Ausgangstext, wie an den nächsten Ergebnissen sichtbar ist: 4,03 – 4,18 = -0,15 ergibt „T“, -0,15 + 1,26 = 1,11 ergibt „H“, 1,11 + 0,62 = 1,73 ergibt „E“. Analog werden die restlichen Rechnungen durchgeführt.

Statt „Funktionenscharen“ einfach „Kurvenscharen“

Wir können auch Kurven verschiedener Werte *a* und *b* untersuchen. Wir definieren uns unter mit Y1 die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{x^3 + a \cdot x + b}$ und mit Y2 die Funktion g mit $g(x) = -f(x)$. Sieht man sich für verschiedene Werte *a* und *b* die Kurven zu den Weierstraß-Gleichungen an, so zeigen sich beispielsweise Kurven wie in Abbildung 3. Hier wird sichtbar, dass Weierstraß-Kurven nicht unbedingt zusammenhängend sein müssen.





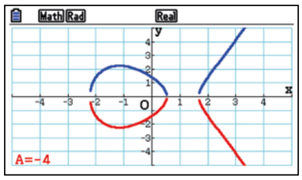


Abbildung 3: Einstellungen für A und B über VAR (F4) und SET (F2)

Die Untersuchung der Funktionenscharen, der Kurven und die Kryptographie mit den Kurven lässt sich in viele Richtungen fortsetzen. Man kann einerseits andere Kurven für verschiedene a und b verwenden, oder aber die Alphabete anders auf der Kurve verteilen, oder die Geraden durch andere Punkte legen, und, und, und. In der Praxis verwendet man die Rechnung in Restklassen: modulo. Für Ideen siehe auch Lang (1989) oder Willems (2008).

Literatur

Baeger, A. (2016). Kurven mit Herz. Casio Forum 2/2016, 1-2.

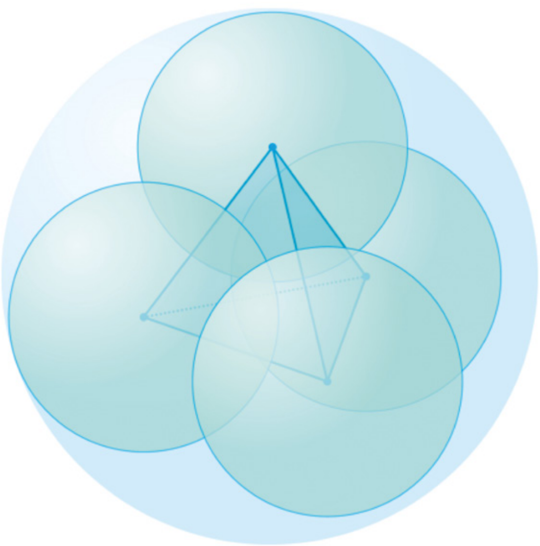
Lang, S. (1989). Faszination Mathematik: Ein Wissenschaftler stellt sich der Öffentlichkeit. Mathematische Schülerbücherei. No. 138. Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 50-61.

Willems, W. (2008). Codierungstheorie und Kryptographie. Basel: Birkhäuser

Rätselecke

Kugeln über Kugeln

Autor: Matthias Emde, Frankfurt



Quelle: http://www.emde-grafik.de/

In einer Kugel von 100 mm Durchmesser befinden sich vier jeweils gleich große kleinere Kugeln mit maximalem Durchmesser. Jede dieser Kugeln berührt einmal die Innenwand der großen Kugel und jede der drei restlichen Kugeln in einem Punkt der Oberfläche.

Bestimmen Sie die Form, in der die inneren Kugeln angeordnet sind, und deren Durchmesser.

Buchvorstellung

FX-991DE X: Bedienung und Aufgabenbeispiele

Es gibt ein neues Buch für den FX-991DE X, das verschiedenste Einsatzmöglichkeiten an Beispielen vorstellt und so in die Bedienung aller Bereiche einführt. Sie finden es auch digital in der Materialdatenbank unter **www.casio-schulrechner.de.**

Lehrer-Info-Service

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

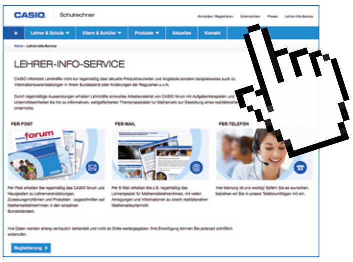
Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen in österreichischen Lehrplänen harmoniert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:
- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten
- Informationen zu regionalen Veranstaltungen
- Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

Anmeldung
Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten. Dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz
Unter dieser Web-Adresse können Sie unsere Informationen abonnieren:
www.casio-schulrechner.at/lehrer-info-service



Anmeldung per QR-Code
Scannen Sie einfach den **QR-Code**.

Kontakt

Educational Team
Unsere Spezialisten rund um das Thema Schulrechner von CASIO und deren Einsatz im Mathematikunterricht stehen Ihnen bei Fragen jederzeit zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-100
E-Mail: education-austria@casio.de
Homepage: www.casio-schulrechner.at

CASIO European Support Center
Für Beratung und technische Informationen wenden Sie sich an das CASIO European Support Center:
Telefon: +49 (0)40/528 65-802
Fax: +49 (0)40/528 65-888
E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen
Bei Fragen rund um das Thema Reparatur stehen Ihnen Experten unter folgenden Kontaktdaten zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-203
Fax: +49 (0)40/528 65-242
E-Mail: repair@casio.de

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.5000
FX-CG20/50	3.20
FX-9860GII	2.09
Software	
ClassPad II Manager Subscription (Android/IOS)	2.01.5000
ClassPad Manager	3.06.6000
FX-CG20/50 Manager	3.20
FX-Manager Plus	2.09
ClassWiz Emulator Subscription	2.00

Updates bis November 2018

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm
- Kooperationsschulen
- Lehrer-Fortbildungen und Webinare
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-535

Bildquellen:
S. 1: M. Mettin

Vertriebspartner Österreich:
Ivo Haas GmbH
Saalachstraße 36 • 5020 Salzburg
Tel.: 0662/430 567-0 • Fax: 0662/430 567-83
E-Mail: casio@ivohaas.com

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

4 549526 606489
118SGR-FORUM24-AT