

# Kurvenuntersuchungen mithilfe von Wertetafeln für $f$ , $f'$ und $f''$

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicky, Tangermünde, Hochschule Magdeburg-Stendal

Um den Verlauf einer Funktion zu erkennen, ist es hilfreich und übersichtlich, die  $x$ -Werte, die zugehörigen Funktionswerte und die Werte für die erste und zweite Ableitung in derselben Tabelle darzustellen. Das wird am Beispiel

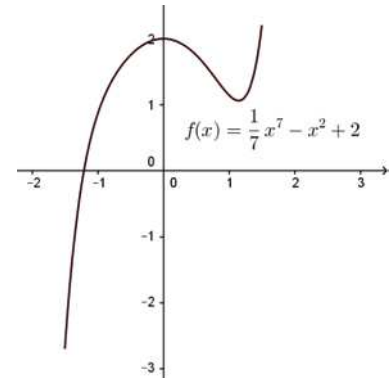
$$f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^2 + 2$$

im Intervall  $-1,5 \leq x \leq 1,5$  gezeigt. Dazu wird die unten gezeigte Tabelle betrachtet.

Dieser Tabelle ist zu entnehmen:

- Die Funktion  $f$  hat im Intervall  $-1,25 \leq x \leq -1$  eine **Nullstelle**.

- Der Graph der Funktion  $f$  schneidet die  $y$ -Achse im **Punkt H(0|2)**, dieser Punkt ist ein **lokaler Hochpunkt**, weil dort die erste Ableitung  $f'$  den Wert null hat und die zweite Ableitung  $f''$  dort negativ ist.
- Der Graph der Funktion  $f$  hat im Intervall  $1 \leq x \leq 1,25$  einen **lokalen Tiefpunkt**, weil in diesem Intervall die Werte von  $f'$  das Vorzeichen wechseln.
- Der Graph der Funktion  $f$  hat im Intervall  $0,75 \leq x \leq 1$  einen **Rechts-Links-Wendepunkt**, weil in diesem Intervall das Vorzeichen der zweiten Ableitung  $f''$  wechselt.



x	-1,5	-1,25	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,50	0,75	1	1,25	1,5
f(x)	-2,69	-0,24	0,86	1,42	1,74	1,93	2	1,94	1,75	1,46	1,14	1,12	2,19
f'(x)	14,39	6,31	3	1,68	1,02	0,50	0	-0,50	-0,98	-1,32	-1	1,31	8,39
f''(x)	-47,56	-20,31	-8	-3,42	-2,19	-2,01	-2	-1,99	-1,81	-0,58	4	16,31	43,56

Mit dem CASIO FX-991DE X lässt sich solch eine Tabelle günstig entweder im Modus „9: Tabellen“ oder im Modus „8: Tabellenk.“ erzeugen. Zur Berechnung der Funktionswerte der Ableitungen kann entweder die Zweitbelegung der  $\frac{d}{dx}$ -Taste, mit der

$$\frac{d}{dx}(\square) \Big|_{x=\square}$$

aufgerufen wird, oder die Ableitungsfunktion  $f'$  verwendet werden, die mithilfe der Differentiationsregeln berechnet wird. Mit „9: Tabellen“ gelingt die Berechnung der ersten drei Zeilen der Tabelle, indem zunächst mit  $\text{SHIFT}$   $\text{MENU}$  das Setup-Menü aufgerufen und mittels  $\downarrow \downarrow$  das Menü angesteuert wird.

1:Gleichung/Funkt  
2:Tabellen  
3:Period. Darst.  
4:1000er-Trennung

1:f(x)  
2:f(x), g(x)

Mit  $\text{2}$   $\text{2}$  wird die gleichzeitige Berechnung zweier Funktionswertetabellen möglich. Nachdem durch  $\text{MENU}$   $\text{9}$  das Menü für die Funktionswertetabellen geöffnet wurde, kann die Eingabe der Funktionsgleichung von  $f$  erfolgen:

$$f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^2 + 2$$

Für  $g(x)$  kann die Ableitung von  $f$  mithilfe der Zweitbelegung der  $\frac{d}{dx}$ -Taste eingegeben werden, dabei wird für die Differentiationsstelle  $x = x$  geschrieben.

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^7}{7} - x^2 + 2 \right) \Big|_{x=x}$$

$$g(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^7}{7} - x^2 + 2 \right) \Big|_{x=x}$$

Zum Schluss werden noch die Argumentwerte festgelegt:

Tabellenbereich  
Start:-1,5  
Ende:1,5  
Inkre:0,25

Es erscheint eine Tabelle mit den Argumentwerten, den Funktionswerten und den Werten der ersten Ableitung  $f'$ :

x	f(x)	g(x)
-1,5	-2,69	14,39
-1,25	-0,24	6,31
-1	0,86	3
-0,75	1,42	1,68

Zur Berechnung der Werte der zweiten Ableitung  $f''$  werden mithilfe der Zweitbelegung der  $\frac{d}{dx}$ -Taste die Werte der ersten Ableitung der Funktion  $f'(x) = x^6 - 2x$  berechnet:

$$g(x) = \frac{d}{dx} (x^6 - 2x) \Big|_{x=x}$$

x	f(x)	g(x)
-1,5	-2,69	-47,56
-1,25	-0,24	-20,31
-1	0,86	-8
-0,75	1,42	-3,42

Um die Nullstelle, den Wendepunkt und den Tiefpunkt genauer zu bestimmen, kann jetzt die Schrittweite nach und nach verkleinert werden.

Die Tabelle kann auch mithilfe der Tabellenkalkulation erzeugt werden. Zuerst wird in die Zelle A1 der Wert -1,5 eingetragen und in E1 die anfängliche Schrittweite 0,25. In Zelle A2 wird mittels  $\text{OPTN}$   $\text{1}$  die Formel  $A1+E\$1$  für den Bereich A2:A13 eingetragen. (Beim Herunterziehen der Formel  $A1+E\$1$  in die Zellen A2 bis A13 verändert sich die Formel:  $A1+E\$1$ ,  $A2+E\$1$ ,  $A3+E\$1$ , ..., wobei das  $\$$ -Zeichen die Zelle E1 festhält.) Damit stehen in der Spalte A die Argumentwerte von -1,5 bis 1,5 mit der Schrittweite 0,25. In die Zelle B1 wird die Formel  $1/7 \times A1^7 - A1^2 + 2$  für den Bereich B1:B13 eingetragen. In die Zelle C1 wird die Formel  $A1^6 - 2A1$  für den Bereich C1:C13 eingetragen. In die Zelle D1 wird schließlich die Formel  $6 \times A1^5 - 2$  für den Bereich D1:D13 eingetragen. Damit ist die gewünschte Tabelle hergestellt.

A	B	C	D
-1,5	-2,69	14,39	-47,56
-1,25	-0,24	6,31	-20,31
-1	0,86	3	-8
-0,75	1,42	1,68	-3,42

Die Werte der Ableitungen hätten auch in der Tabellenkalkulation mithilfe der Zweitbelegung der  $\frac{d}{dx}$ -Taste berechnet werden können. So hätte in der Zelle C1 die Formel in der Form  $d/dx(1/7 \cdot x^7 - x^2 + 2)$ ; A1 eingegeben werden können. Durch eine Änderung in den Feldern E1 und A1 können die Schrittweite und der Startwert nach Bedarf angepasst werden.