Rätselecke
Japanische Denkaufgaben

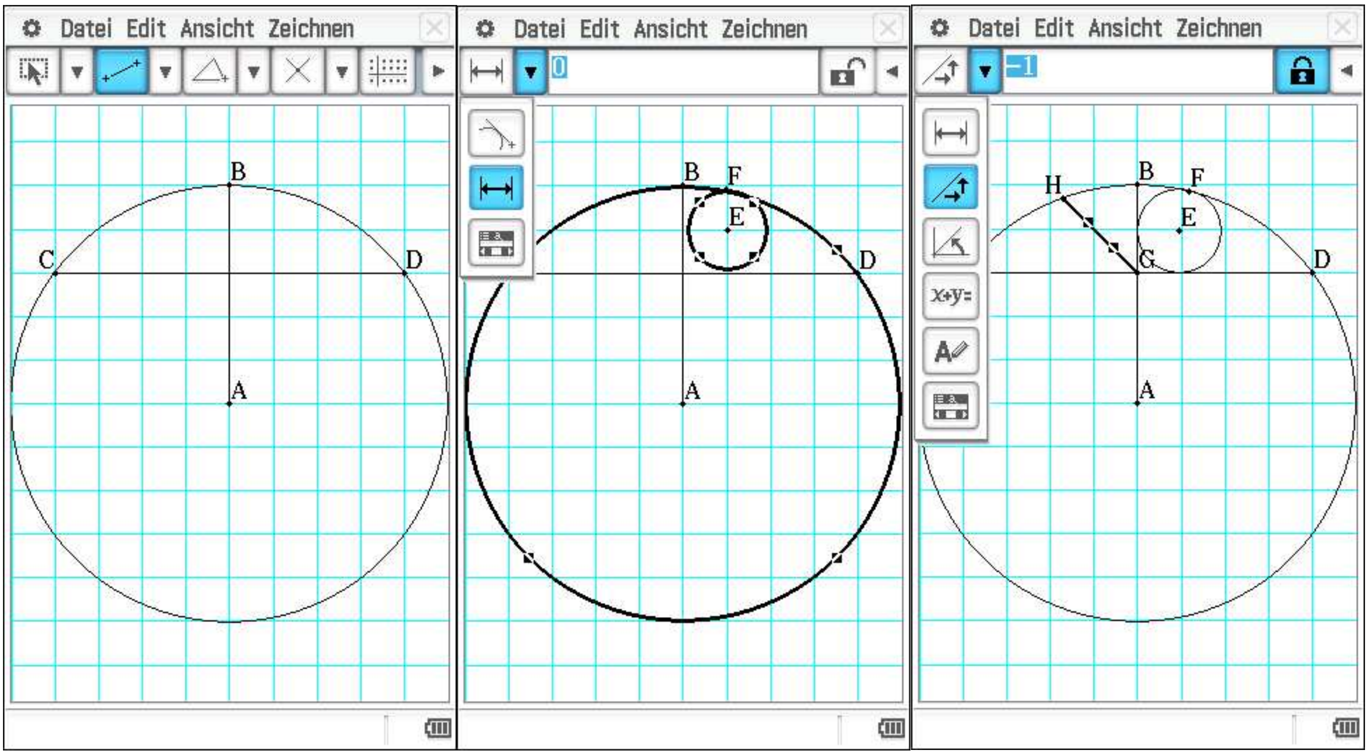
In der Zeit von 1603–1867 wurden in japanischen Schreinen und Tempeln handgemalte geometrische Rätsel als Opfergaben und als intellektuelle Herausforderung angeschlagen, sogenannte Sangaku. Hier ist eines von ihnen:

Gegeben sei ein Kreis K mit Radius R = 5, dem Mittelpunkt A und einer Sehne der Länge 8. Die Sehne werde vom Radius mittig geteilt. Dem rechten Teil zwischen Sehne und Kreisbogen werde der größtmögliche Kreis k einbeschrieben. Im linken Teil befinde sich das größtmögliche Quadrat repräsentiert durch seine Diagonale.

1. **Bestimme den Radius r des einbeschriebenen Kreises und die Seitenlänge a des Quadrates.**

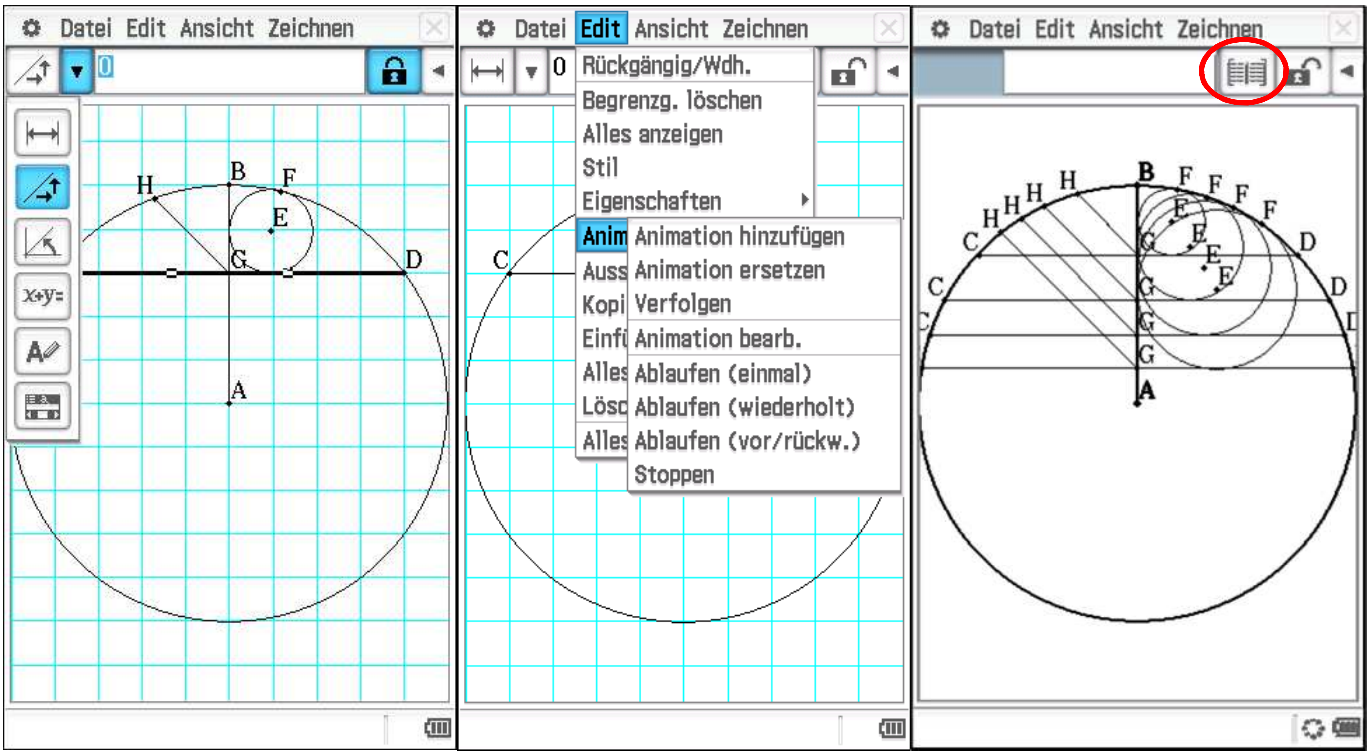
Konstruktions- und Lösungshinweise: Im Menü „Geometrie" den Kreis K, seinen Radius $\overline{AB}$, die Sehne $\overline{CD}$ und k zeichnen.

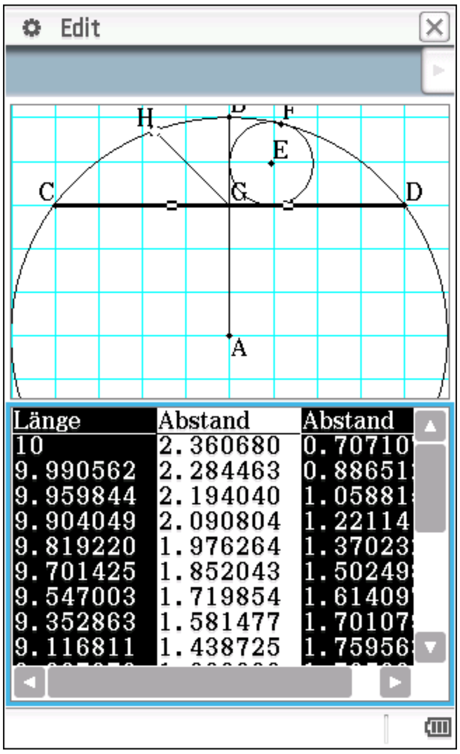
K und k auswählen und Abstand auf 0 setzen. An freie Stelle tippen. $\overline{CD}$ und k auswählen und Abstand auf 0 setzen. An freie Stelle tippen. $\overline{AB}$ und k auswählen und Abstand auf 0 setzen. An freie Stelle tippen. Diagonale zeichnen und Steigung auf –1 setzen.



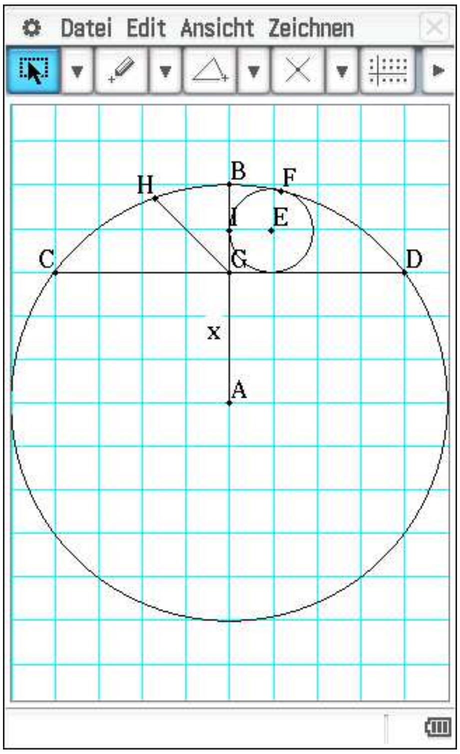
2. Bestimmen Sie Größe von Kreis und Quadrat in Abhängigkeit von der Sehnenlänge.

Unterschiedliche Längen der Sehne animieren: Verhindern Sie zunächst eine Änderung der Neigung der Sehne. Jetzt können Sie die die Veränderungen bei unterschiedlicher Sehnenlänge beobachten: G und $\overline{AB}$ auswählen, Edit, Animieren, Animation hinzufügen, Edit, Animieren, Ablaufen.





Die Abstände $\overline{EF}$ und H zur Sehne können für jeden einzelnen Animationsschritt gemessen und in die Tabellenkalkulation zur weiteren Untersuchung übertragen werden: Spalten markieren, Edit, Kopieren.



Algebraischer Ansatz:
Der Kreismittelpunkt E liegt auf einem Radius von K. Das gilt, weil die Kreise in ihrem Berührpunkt F eine gemeinsame Tangente haben, auf der die dort endenden Radien beider Kreise senkrecht stehen. Damit liegt E auf dem längeren Radius und es gilt $\overline{AE} + \overline{EF} = R$.

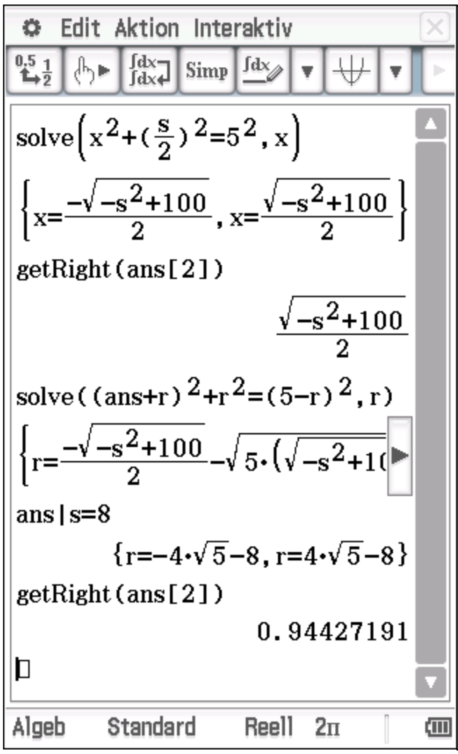
Mit Pytagoras und AG = x gilt dann:

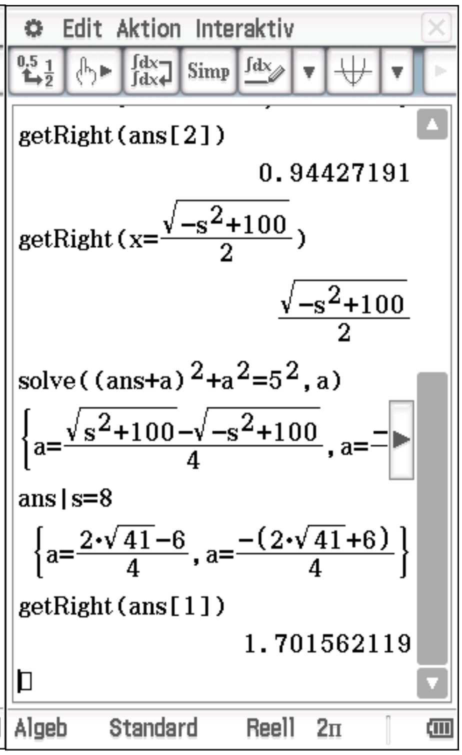
(1) $(\overline{AG} + \overline{GI})^2 + \overline{IE}^2 = (\overline{AF} - \overline{EF})^2$
(2) $\overline{AG}^2 + \overline{GD}^2 = \overline{AD}^2$

bzw.

(1) $(x + r)^2 + r^2 = (R - r)^2$
(2) $x^2 + (s/2)^2 = R^2$

(2) kann nach x aufgelöst und in (1) eingesetzt werden. Mit R = 5 ergibt sich:





Für die Seitenlänge a des Quadrates ergibt sich die Lösung aus den Gleichungen

(3) $(x + a)^2 + a^2 = R^2$
(4) $x^2 + (s/2)^2 = R^2$