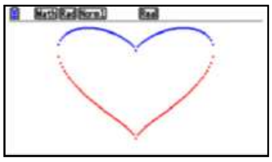


Mit den Schülern sollte die Pixeligkeit an den Rändern diskutiert werden. Ein junger, sehr verliebter, aber auch sehr schüchterner Mathematikstudent schickte seiner Angebeteten eine Karte folgenden Inhalts:

$x(t) = \pm(-3t^2 + 2t + 1) \cdot \sin(t)$

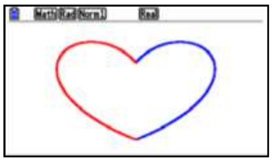
$y(t) = (-3t^2 + 2t + 1) \cdot \cos(t)$

$0 \leq t \leq 1$

Die junge Dame schaute verblüfft und griff zu ihrem grafischen Taschenrechner. Mit den passenden Einstellungen

(z.B.: $x_{min} = -1$, $x_{max} = 1$, $y_{min} = -0{,}1$, $y_{max} = 1{,}5$, $t_{min} = 0$, $t_{max} = 1$, ptch = 0,001)

zeigte er zu ihrer großen Freude:

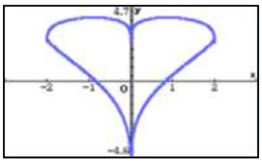


Noch mehr Herzblut legte ein portugiesischer Kollege an den Tag, als er folgenden Vorschlag unterbreitete:

$$x(t) = 2\sin^7(t)$$

$$y(t) = -4{,}5\cos(t) \cdot (1 + 1{,}2\cos(t)) + (\cos^2(t))^{\frac{1}{8}} + 2{,}5$$

Das Ergebnis ist trotz des großen Aufwands eher ein trauriges Herz, passend zu den Worten des portugiesischen Dichters Luís de Camões (1524-1580): „A tristeza no coração é como traça no pano.[1]"



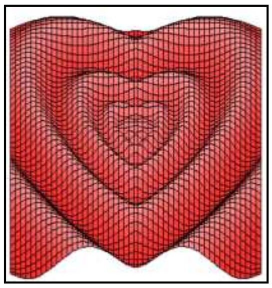
Besonders schön dagegen ist dieses Herz in 3D, das mit dem Classpad erstellt wird. Dazu wird im Main-Fenster zunächst die Funktion

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 - 1{,}2 \cdot |x| \cdot y + y^2}$$

definiert, die den Kreisradius festlegt. Anschließend wird im 3D-Menü die Funktion

$$z = (\sin(15 \cdot r(x, y)^{0{,}2}))^2 \cdot r(x, y)^{0{,}6}$$

eingetragen. Mit den Fenstereinstellungen für x und y zwischen -6 π und +6 π und einem Gitterwert von jeweils 50 sowie -10 ≤ z ≤ +10
ergibt sich das folgende Bild:



Toll, oder? Und wer es ganz einfach haben will, erinnere sich an die klassische Kardioide. Man gibt einen festen Kreis vor und rollt einen gleich großen Kreis auf ihm ab. Markiert man auf der Kreislinie des beweglichen Kreises einen Punkt und verfolgt während eines Umlaufs den Weg dieses Punktes, so beschreibt er die Kardioide. Das entstehende Herz ist aber rund und nicht wie gewohnt spitz.

Experiment mit dem ClassPad II

Das Stechheber-Experiment – Viele Möglichkeiten

Autoren: Irene Grafenhofer, Vanessa Klöckner, Universität Koblenz-Landau

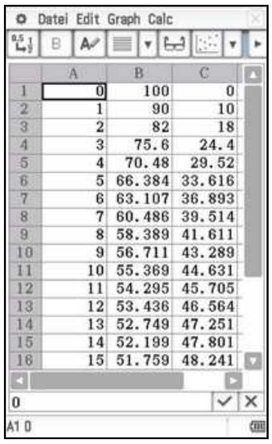
Das Experiment.

Für den Versuch werden zwei gleiche Messzylinder und Stechheber (z.B. Strohhalme) mit unterschiedlichen Durchmessern benötigt. Einer der Zylinder wird mit Wasser gefüllt, der andere bleibt zu Beginn leer. Mithilfe eines Stechhebers wird Wasser aus dem ersten Zylinder in den zweiten gefüllt und gleichzeitig Wasser aus dem zweiten in den ersten. Immer wird der Stechheber dabei bis auf den Boden des Messzylinders eingetaucht. Es werden die neuen Volumina des Wassers in den beiden Zylindern notiert. Dieser Vorgang wird mehrere Male wiederholt.

Dieses Modellexperiment wird im Chemieunterricht gezeigt, um Gleichgewichtsreaktionen zu veranschaulichen. Bei ihnen findet so lange ein dynamischer Austausch der Substanzen statt, bis sich ein Gleichgewicht einstellt. Im Fall des Modellexperiments können Bestand und Änderung einer Flüssigkeit direkt beobachtet werden, bis keine Änderungen mehr zu erkennen sind. Im Mathematikunterricht kann es ohne größeren Aufwand eingesetzt werden. Der bei jedem Schritt übertragene Wasseranteil kann gut durch einen Koeffizienten beschrieben werden, dem Übertragungskoeffizient. Er ist das Verhältnis der Grundfläche des Stechhebers zur Grundfläche des Messzylinders.

Die Möglichkeiten.

Die Änderungen der Volumina in den Messzylindern nach jeder Wasserübertragung können notiert und als rekursive Folgen dargestellt werden (vgl. Humenberger 2013). Durch das wiederholte Durchführen der Wasserübertragung kann zunächst der dynamische Aspekt des Grenzwerts deutlich gemacht werden (Greefrath et al. 2016). Der Wasserbestand in den Zylindern ändert sich bei jedem Durchgang immer weniger, er nähert sich immer weiter einem bestimmten Wert an. Das Stechheber-Experiment wird beendet, sobald keine Veränderung des Wasserbestands im Zylinder mehr erkennbar ist: Ab jetzt fallen alle weiteren Messwerte in eine bestimmte Umgebung. Damit wird auch der statische Aspekt (Greefrath et al. 2016) deutlich. Er ist die Grundlage der Umgebungsvorstellung, die wichtig ist für den verständnisorientierten Zugang zur Definition des Grenzwerts (vgl. Greefrath et al. 2016). Mit der Tabellenkalkulation können Ergebnisse ausgewertet und gut visualisiert werden. Beispielhaft wird ein „Versuch" ausgewertet mit den Startvolumina 100 ml (Zylinder a) und 0 ml (Zylinder b) und einem Übertragungskoeffizienten von 0,1 (vgl. Abb.1).



	A	B	C
1	0	100	0
2	1	90	10
3	2	82	18
4	3	75.6	24.4
5	4	70.48	29.52
6	5	66.384	33.616
7	6	63.107	36.893
8	7	60.486	39.514
9	8	58.389	41.611
10	9	56.711	43.289
11	10	55.369	44.631
12	11	54.295	45.705
13	12	53.436	46.564
14	13	52.749	47.251
15	14	52.199	47.801
16	15	51.759	48.241

Abbildung 1:
Werte der Zylinder in der Tabelle

[1] „Traurigkeit im Herzen ist wie eine Motte im Gewand."

Fortsetzung: Stechheber-Experiment

Für den hier dargestellten Vorgang lassen sich die beiden Gleichungen zur Beschreibung der jeweiligen Änderungen der Volumina zusammenfassend darstellen:

$$a_{n+1} = a_n - a_n \cdot 0{,}1 + b_n \cdot 0{,}1$$
$$b_{n+1} = b_n - b_n \cdot 0{,}1 + a_n \cdot 0{,}1$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sowohl in der Tabelle als auch in der Grafik (Abb. 1 und Abb. 2) ist erkennbar, dass sich die Volumina in den Zylindern einem Wert (in diesem Beispiel dem Wert 50 ml) nähern.

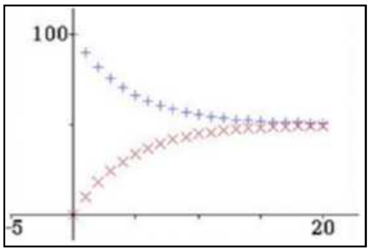


Abbildung 2: Grafische Darstellung der Ergebnisse

Um den Grenzwert beider Folgen rechnerisch zu bestimmen, können Übergangsmatrizen benutzt werden:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Mithilfe des Casio CP400 lässt sich die Matrix für große Werte von n bestimmen. Durch eine kleine Änderung der Versuchsbeobachtung wird eine weitere Eigenschaft deutlich: Die Folge hat zwei Häufungspunkte. Notiert wird dafür das Volumen in einem Zylinder jeweils nach Entnahme mit dem Stechheber und nach Auffüllen mit Wasser aus dem anderen Zylinder (Abb. 3).

Es wird deutlich, dass es zwei Werte sind, denen sich der Wasserstand annähert, je nachdem, ob gerade Wasser entnommen oder hinzugefügt wurde.

Die Folgenglieder können auch iterativ ermittelt werden:

$a_{n+1} = 0{,}9 \cdot a_n$
(Wasserstand nach Entnahme aus dem ersten Zylinder)

$b_{n+1} = b_n + 0{,}1 \cdot a_n$
(Wasserstand nach Auffüllen des zweiten Zylinders)

$b_{n+2} = 0{,}9 \cdot b_{n+1}$
(Wasserstand nach Entnahme aus dem zweiten Zylinder)

$a_{n+2} = a_{n+1} + 0{,}1 \cdot b_{n+1}$
(Wasserstand nach Auffüllen des ersten Zylinders)

Durch Einsetzen ergeben sich 4 gekoppelte Teilfolgen: die geraden sowie die ungeraden Folgeglieder von a und b. Sie beschreiben die Wasserstände in den beiden Zylindern zu gleichen Zeitpunkten des Versuchs. Die Teilfolgen $A_n=a_{2n}$ und $B_n=b_{2n}$ stellen die Wasserstände in den Zylindern nach n kompletten Durchgängen dar, wohingegen die Teilfolgen $\tilde{A}_n=a_{2n+1}$ und $\tilde{B}=b_{2n+1}$ die Wasserstände nach n kompletten Durchgängen und einem Umfüllvorgang von Zylinder A nach B darstellen.

Es gilt:

$$\tilde{A}_{n+1} = 0{,}9 \cdot \tilde{A}_n + 0{,}09 \cdot \tilde{B}_n$$
$$\tilde{B}_{n+1} = 0{,}91 \cdot \tilde{B}_n + 0{,}1 \cdot \tilde{A}_n$$

und

$$A_{n+1} = 0{,}91 \cdot A_n + 0{,}1 \cdot B_n$$
$$B_{n+1} = 0{,}9 \cdot B_n + 0{,}09 \cdot A_n$$

Angenommen, die 4 Teilfolgen konvergieren jeweils gegen die Werte a bzw. b sowie ã bzw. b̃, dann gilt:

$$\tilde{a} = 0{,}9 \cdot \tilde{a} + 0{,}09 \cdot \tilde{b}$$
$$\tilde{b} = 0{,}91 \cdot \tilde{b} + 0{,}1 \cdot \tilde{a}$$

sowie

$$a = 0{,}91 \cdot a + 0{,}1 \cdot b$$
$$b = 0{,}9 \cdot b + 0{,}09 \cdot a$$

Die Lösungen dieser Gleichungssysteme sind $a = \tilde{b} = \frac{10}{19}$ und $b = \tilde{a} = \frac{9}{19}$; der Wasserstand in den beiden Zylindern springt immer zwischen den beiden Werten hin und her. Im Versuch mit einem Startwert von 100 ml im ersten Zylinder ergeben sich die Häufungspunkte 52,643 ml und 47,368 ml. Diese Werte stimmen in guter Näherung mit Tabelle und Grafik überein. Dass es zu diesen Werten kommt, hängt mit dem Übertragungskoeffizienten von 0,1 zusammen. Wenn sich das Gleichgewicht eingestellt hat, werden jedes Mal etwa 5,275 ml von einem in den anderen Zylinder übertragen.

Abbildung 3: Wasserstände im ersten (Spalte D) und zweiten Zylinder (Spalte E) bei veränderter Versuchsauswertung

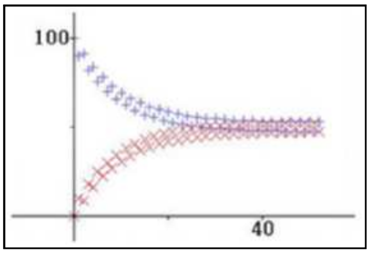


Abbildung 4: Grafische Darstellung der Veränderung im ersten (blau) und zweiten Zylinder (rot) bei veränderter Versuchsauswertung

Das Stechheber-Experiment kann auch in anderen Kontexten genutzt werden. Dabei ist zu beachten, dass aus einem diskreten Problem durch Modellieren ein stetiges wird. Digitale Werkzeuge wie der Casio ClassPad II sind auch in diesen Fällen sehr hilfreich:

- **Momentane Änderungsrate:**
  Mithilfe der Messergebnisse in einem Zylinder kann eine Funktion approximiert werden, die den Vorgang beschreibt. Nach Berechnung der mittleren Änderungsrate kann durch die Verkleinerung der Intervalle zur momentanen Änderungsrate übergegangen werden (Greefrath et al. 2016).

- **Rekonstruktion von Größen:**
  Die Änderung des Volumens in einem Zylinder wird durch eine Funktion approximiert. Durch die Berechnung des Volumens mithilfe des bestimmten Integrals in einem vorgegebenen Intervall wird die Zu- oder Abnahme des Volumens in einem gewissen Zeitraum in den Zylindern bestimmt. Ein negatives Ergebnis (bezogen auf den ersten Zylinder) kann in diesem Kontext als Abnahme des Volumens interpretiert werden; ein Beispiel dafür, was es bedeuten kann, wenn der Wert eines Integrals negativ ist (Greefrath et al. 2016).

Literatur:
Greefrath, G.; Oldenburg, R.; Siller, H.-St.; Weigand, H.-G.; Ulm, V. (2016). Didaktik der Analysis. Wiesbaden: Springer.
Humenberger, H. (2013). Einen Grenzwert erfahren – mit Glasröhrchen und Tabellen zu Gleichgewichten. In: mathematik lehren 180, 34–37.