Eine spannende Entdeckung bei Polynomen 4. Grades

Autor: Arnold Zitterbart, Schwarzwald-Gymnasium Triberg

Bei einer ganzrationalen Funktion 4. Grades sind die beiden Flächen zwischen Funktionsgraph und der Geraden durch die beiden Wendepunkte, die unterhalb der Geraden liegen, zusammen so groß wie die Fläche oberhalb dieser Geraden. Dabei entstehen Geradenabschnitte, die sich im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilen (vgl. CASIO forum 1/2009). Gleichzeitig entstehen zwischen Gerade und Funktionsgraph drei Flächen, von denen die mittlere Fläche doppelt so groß ist wie jede der beiden Außenflächen.

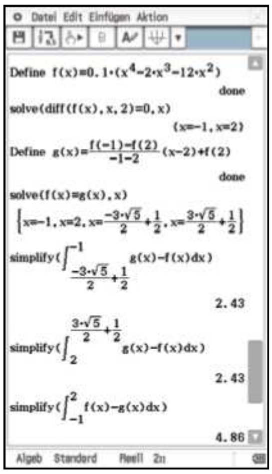


Abb. 1

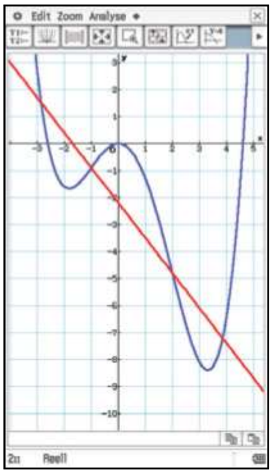
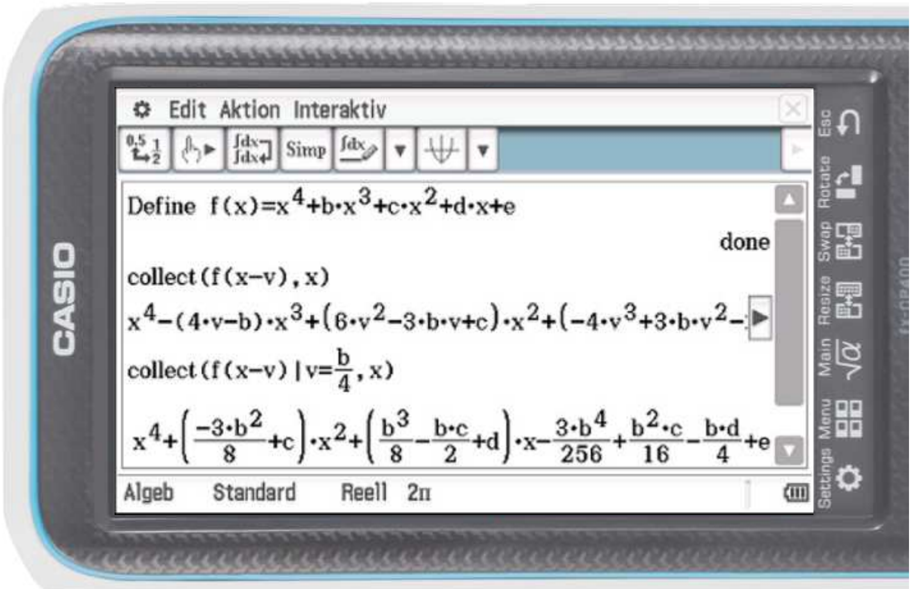


Abb. 2

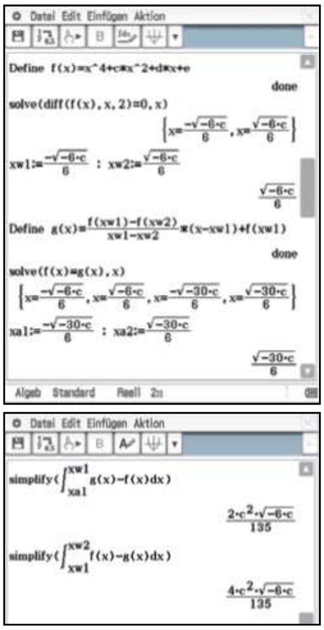
Dieser Zusammenhang für diese Flächen gilt allgemein. Wer bei der Überprüfung allerdings zu stark auf die Macht des CAS vertraut, wird sehr schnell unübersichtliche Terme erhalten[1]. Ein anderer Zugang besteht darin zu erkunden, durch welche Transformationen die allgemeine ganzrationale Funktion 4. Grades aus einfacheren Funktionen 4. Grades entsteht. Unmittelbar einsichtig ist, dass die Betrachtung auf Polynome 4. Grades der Gestalt $f(x) = x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschränkt werden kann, weil aus ihnen durch vertikale Streckung/Stauchung das allgemeine Polynom 4. Grades entsteht und sich dabei Wendestellen und die Flächenverhältnisse nicht verändern. Diese Polynome können durch eine horizontale Verschiebung aus Polynomen der Gestalt $f(x) = x^4 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ entstehen:



ClassPad II mit 4,8 Zoll Bilddiagonale

Ergänzung: Polynome der Gestalt
$f(x) = x^4 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
könnten aus Polynomen der Gestalt
$f(x) = x^4 + c \cdot x^2$
durch „additive Ergänzung um einen linearen Term“ entstehen. Dabei verändern sich die Wendestellen nicht und die Gerade durch die Wendepunkte wird durch den gleichen linearen Term ergänzt, sodass sich die Fläche zwischen Funktionsgraph und Wendepunktgerade durch diese Transformation nicht verändert.

Letztlich genügt also die Untersuchung des Zusammenhangs bei Polynomen der Gestalt
$f(x) = x^4 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$



ClassPad II Manager

Begründung: Wenn x_1 und x_2 die beiden Wendestellen sind, gilt für die Gerade durch die beiden Wendepunkte vor der Transformation:

$$g(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1)$$

Nach der Transformation:

$$g_{neu}(x) = \frac{[f(x_1) + d \cdot x_1 + e] - [f(x_2) + d \cdot x_2 + e]}{x_1 - x_2}(x - x_1) + [f(x_1) + d \cdot x_1 + e]$$

$$\Rightarrow g_{neu}(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) + d \cdot x + e$$

Es genügt also sogar, den Zusammenhang zwischen den Flächen für Polynome 4. Grades der Gestalt $f(x) = x^4 + c \cdot x^2$ zu untersuchen. Die Funktionsgraphen dieser Polynome sind aber symmetrisch zur y-Achse. Daraus folgt sofort, dass die beiden Außenflächen gleich groß sind.

[1] Die zugehörigen Screenshots finden Sie im ungekürzten Artikel in der CASIO-Materialdatenbank.