education@casio.de
www.casio-schulrechner.at

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

Mathematik (AHS)
Probeklausur Mai 2013

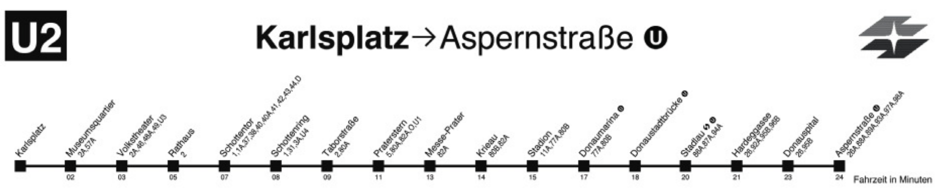
Teil-2-Aufgaben mit dem ClassPad II

Mathematik (AHS)
Probeklausur Mai 2013[1]

Teil-2-Aufgaben mit dem ClassPad II

Aufgabe 1: Wiener U-Bahn

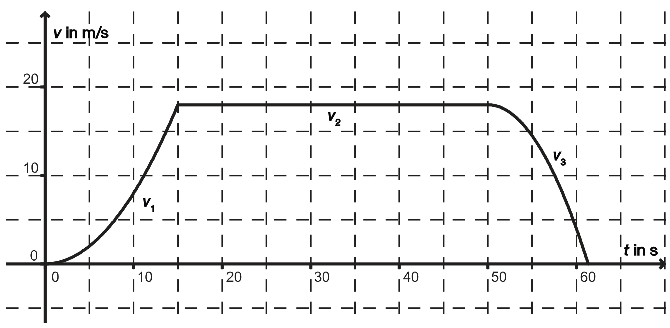
Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Aspernstraße*. Die Gesamtstrecke der U2 beträgt 12,531 km (Stand 2012).



Quelle: http://www.wienerlinien.at/media/download/2012/Linie_U2_68801.pdf

Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* fährt die U-Bahn nahezu geradlinig und benötigt für diese 855 m lange Strecke ca. eine Minute.
Betrachtet man die Geschwindigkeit eines Zuges zwischen diesen beiden Stationen, so lässt sie sich näherungsweise durch drei Funktionen beschreiben. Diese Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dargestellt. Die Zeit t ist in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben.

$v_1(t) = 0{,}08t^2$	$[0; 15)$
$v_2(t) = 18$	$[15; 50)$
$v_3(t) = -0{,}14(t-50)^2 + 18$	$[50; 61{,}34]$

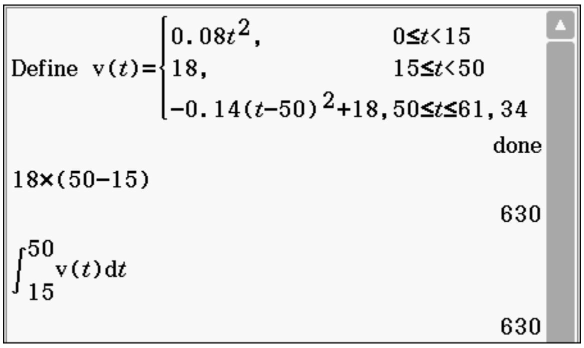


[1] Quelle: Bundesinstitut bifie, „Probeklausur 2013 – Mathematik (AHS)“, www.bifie.at/node/2231.

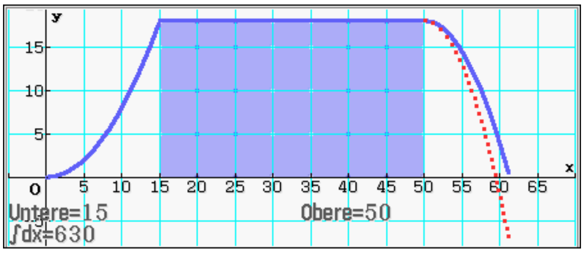
a) [A] Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den die U-Bahn im Zeitintervall [15; 50] zurücklegt!

Um den Bremsvorgang zu modellieren, wurde die Funktion $v_3(t) = -0{,}14(t - 50)^2 + 18$ verwendet.
Erläutern Sie, in welcher Weise eine Veränderung des Parameters von –0,14 auf –0,2 den Bremsvorgang beeinflusst!

Die abschnittsweise definierte Geschwindigkeitsfunktion `v(t)` kann im ClassPad II direkt definiert werden. Um die Länge des zurückgelegten Weges im Zeitintervall `[15;50]` zu bestimmen, kann entweder `18×(50-15)=630` gerechnet oder das Integral nach der Zeit bestimmt werden. In beiden Fällen ergibt sich ein Weg von `630m`.



Mehr Anschauung liefert der Graph. Auch hier lässt sich das Integral bestimmen. Die rote Linie zeigt den Bremsverlauf für den veränderten Parameter. Aufgrund des veränderten Parameters würde ein mit dieser Funktion modellierter Zug stärker bremsen, weil die negative Beschleunigung größer würde. Der Zug käme schneller zum Stillstand und der Bremsweg würde sich verkürzen.

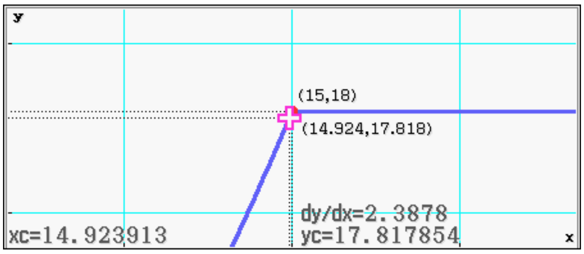


b) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung des Zuges vom Anfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit!

Erklären Sie, wieso der Verlauf des Graphen des *v*-*t*-Diagramms im Intervall [14; 16] nicht exakt der Realität entsprechen kann!

Um die mittlere Beschleunigung berechnen zu können, muss mit den Werten der Geschwindigkeitsfunktion gerechnet werden. Dies lässt sich mit dem ClassPad II komfortabel realisieren.

Der Graph der Geschwindigkeitsfunktion hat im Intervall `[14;16]` einen Knick, den die Fahrgäste als starken Ruck wahrnehmen würden, wenn das Modell der Realität entsprechen würde. Im Graphen lässt sich dies durch einfaches Zoomen leicht erkennen. Verfolgt man den Funktionsgraphen mit den Cursortasten, so fällt außerdem die unstetige Änderung der Steigung `dy/dx` auf.

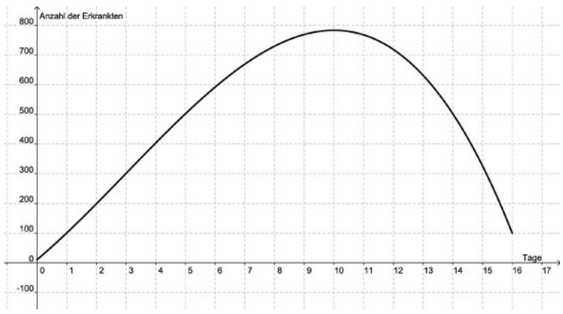


Aufgabe 2: Grippeepidemie

Betrachtet man den Verlauf einer Grippewelle in einer Stadt mit 5 000 Einwohnern, so lässt sich die Anzahl an Erkrankten *E* in Abhängigkeit von der Zeit *t* (in Tagen) annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit der Gleichung $E(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ beschreiben.

Folgende Informationen liegen vor:

1) Zu Beginn der Beobachtungen sind 10 Personen mit dem Grippevirus infiziert.
2) Nach einem Tag sind bereits 100 Personen an Grippe erkrankt.
3) Am 3. Tag nimmt die Anzahl an Erkrankten am stärksten zu.
4) Am 8. Tag sind bereits 730 Personen erkrankt.
5) Am 10. Tag erreicht die Grippewelle (d. h. die Anzahl an Erkrankten) ihr Maximum.



a) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks $\frac{E(8) - E(0)}{8}$!
Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, die eine korrekte Interpretation des Ausdrucks $\frac{E(8) - E(0)}{8}$ ist/sind!

Der Ausdruck gibt die prozentuelle Änderung der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage an.	☐
Der Ausdruck gibt die Zunahme der Anzahl an Erkrankten in den ersten 8 Tagen an.	☐
Der Ausdruck gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Grippewelle am 8. Tag an.	☐
Der Ausdruck beschreibt, wie viele Neuerkrankte es am 8. Tag gibt.	☐
Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl an Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage.	☐

Mit Hilfe der Informationen 1) und 4) lässt sich der angegebene Bruch im ClassPad II schnell vereinfachen und ausrechnen. Der Ausdruck beschreibt die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Erkrankten innerhalb der ersten 8 Tage, was bedeutet, dass pro Tag durchschnittlich 90 Erkrankte hinzukommen.

b) Zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und d werden folgende Gleichungen aufgestellt:

1) $d = 10$
2) $a + b + c + d = 100$
3) $18a + 2b = 0$
4) $300a + 20b + c = 0$

Geben Sie an, welche der angegebenen Informationen durch die vierte Gleichung modelliert werden kann, und erklären Sie den Zusammenhang zwischen Information und Gleichung!

Der eigentlich erste Schritt, um diese Aufgabe mit dem ClassPad II zu lösen, wäre die Definition der allgemeinen Polynomfunktion dritten Grades.

In diesem Aufgabenteil lässt sich dann einfach mit dieser Funktion weiterrechnen, in dem man die Informationen 1) bis 5) in die Mathematik übersetzt. Der ClassPad II berechnet aus den Informationen 1) bis 5) direkt die Gleichungen 1) bis 3), eine zusätzliche Gleichung und Gleichung 4), so dass die Zuordnung für die Gleichung 4) sehr leicht fällt: Information 5) ergibt Gleichung 4) aus Aufgabenteil b).

Define $E(t)=at^3+bt^2+ct+d$
done

$E(0)=10$
$d=10$

$E(1)=100$
$a+b+c+d=100$

$\left(\frac{d^2}{dt^2}(E(t))\,|\,t=3\right)=0$
$18\cdot a+2\cdot b=0$

$E(8)=730$
$512\cdot a+64\cdot b+8\cdot c+d=730$

$\left(\frac{d}{dt}(E(t))\,|\,t=10\right)=0$
$300\cdot a+20\cdot b+c=0$

c) Geben Sie an, an welchem Tag die progressive Zunahme der Anzahl an Erkrankten (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten wird von Tag zu Tag größer) in eine degressive Zunahme (das heißt: der Zuwachs an Erkrankten nimmt pro Tag wieder ab) übergeht!

Kreuzen Sie diejenige(n) Aussage(n) an, mit der/denen man eine progressive Zunahme bestimmen kann!

$E'(t) > 0$	☐
$E(t) \geq 0$	☐
$E(t_1) < E(t_2)$ für alle $t_1 > t_2$	☐
$E''(t) > 0$	☐
$E'(t) = E''(t) = 0$	☐

Wie Information 3) vorgibt, nimmt die Anzahl der Erkrankten am dritten Tag am stärksten zu. Das bedeutet, dass danach der Zuwachs an Erkrankten wieder abnimmt. Die Funktion `E(t)` beschreibt die Anzahl der Erkrankten in Abhängigkeit von der Zeit `t`, während ihre Ableitungsfunktion `E'(t)` den Zuwachs an Erkrankten beschreibt. Die zweite Ableitung gibt an, ob der Zuwachs an Erkrankten von Tag zu Tag größer oder kleiner wird, bzw. progressiv oder degressiv ist. Die Ungleichung `E"(t)>0` beschreibt also die Zeitspanne, in der es eine progressive Zunahme gibt. Es gilt `t<3`, der Übergang erfolgt also am dritten Tag.

Randbemerkung: Der ClassPad II kann mit Hilfe eines Gleichungssystems die Parameter `a`, `b`, `c` und `d` bestimmen. Man schreibt dazu entweder die vier Gleichungen oder vier der fünf Informationen als Gleichungssystem auf und löst nach den Parametern auf. Der Lösungsvektor wird anschließend in die allgemeine Form der Polynomfunktion eingesetzt. Mit Hilfe der ermittelten Funktion kann die Ungleichung `E"(t)>0` gelöst werden. Natürlich können auch Graphen der Funktion und ihrer Ableitungen gezeichnet werden.

$\left\{\begin{array}{l} E(0)=10 \\ E(1)=100 \\ E(8)=730 \\ \left(\frac{d}{dt}(E(t))\,|\,t=10\right)=0 \end{array}\right|_{a,b,c,d} \Rightarrow abcd$

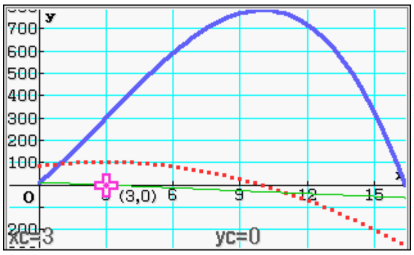
$\left\{a=-\frac{45}{64},\ b=\frac{405}{64},\ c=\frac{675}{8},\ d=10\right\}$

$E(t)\,|\,abcd$

$\frac{-45\cdot t^3}{64}+\frac{405\cdot t^2}{64}+\frac{675\cdot t}{8}+10$

solve$\left(\frac{d^2}{dt^2}(E(t)\,|\,abcd)>0,\ t\right)$

$\{t<3\}$



Herzlichen Dank an das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (`bifie.at`), das die hier eingebundenen Aufgaben zur Verfügung gestellt hat.

Anregungen, Korrekturen oder Verbesserungsvorschläge schicken Sie gern an uns auf einem der nebenstehenden Wege. Wir nehmen diese auf, so dass die vorgestellten Bearbeitungen Ihnen die bestmögliche Unterstützung bieten.

Casio Europe GmbH

Marketing – Educational Projects
Casio-Platz 1
D-22848 Norderstedt

Tel. +49 40 528 65 0
Fax +49 40 528 65 535

`education@casio.de`
`www.casio-schulrechner.at`