


Zufällige Flächenberechnung

Oft wird die Stochastik stark von den Bereichen der Analysis und der Geometrie getrennt. Es lassen sich jedoch Zusammenhänge zwischen ihr und anderen Bereichen der Mathematik finden, wie die folgenden Aufgaben zeigen.

Hinweise. 1. Die Ergebnisse der Berechnungen zeigen sich deutlicher mithilfe eines größeren Stichprobenumfangs. Beachten Sie, dass in diesem Fall die Zeiten der Berechnungen stark ansteigen.
2. Durch mehrfaches Runden werden die Ergebnisse ungenauer. Führt man mehrere Rechenschritte gleichzeitig durch, werden die Ergebnisse genauer.

- Aufgabe 1** a) In  Statistik sollen drei Listen benutzt werden, bei denen in `list 1` ein Zähler, in `list 2` und `list 3` jeweils 20 Zufallszahlen im Intervall $[0; 1]$ notiert werden. Aus den Zufallszahlen der Listen `list 2` und `list 3` werden durch $P(\text{list2}|\text{list3})$ Punkte im Koordinatensystem definiert. Lassen Sie sie vom ClassPad gemeinsam mit einem Viertelkreis des Radius 1 und dem Mittelpunkt im Ursprung in ein Koordinatensystem zeichnen. Begründen Sie, warum die Punkte genau dann innerhalb des Vierteleinheitskreises mit Mittelpunkt im Ursprung des ersten Quadranten liegen, wenn $\sqrt{(\text{list2})^2 + (\text{list3})^2} < 1$ gilt.
- b) Tragen Sie in `list 4` die Werte $\sqrt{(\text{list2})^2 + (\text{list3})^2}$ ein.
- c) Die Zahlen aus `list 4` sollen abgerundet in `list 5` eingetragen werden. Erklären Sie die Einträge in `list 5` in Bezug auf den Einheitskreis um den Ursprung.
- d) Es soll die relative Häufigkeit der Werte aus `list 4` berechnet werden, die kleiner als 1 sind. Erklären Sie, wie sich die relative Häufigkeit von Punkten innerhalb des Einheitskreises im ersten Quadranten zeilenweise aus den Einträgen von `list 1` und `list 5` berechnen lässt. Tragen Sie diese Werte in `list 6` ein.
- e) Die Werte aus den Aufgabenteilen a) bis d) beziehen sich auf einen Viertelkreis. Um ein Ergebnis für den Einheitskreis zu erhalten, sind die bisherigen Ergebnisse mit 4 zu multiplizieren. Tragen Sie die mit 4 multiplizierten Werte aus `list 6` in `list 7` ein. Stellen Sie die Einträge aus `list 1` und `list 7` analog zu Beispiel 7 graphisch dar. Geben Sie eine mathematische Begründung des Ergebnisses.
- f) Erklären Sie, warum es sich bei dem Grenzwert der relativen Häufigkeit um $\frac{\pi}{4}$ handelt.
- g) Ähnlich zu den Aufgabenteilen a) bis e) lassen sich bestimmte Integrale einer Funktion f berechnen. Hierzu muss anstelle von $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$ die Bedingung $y < f(x)$ gelten. Berechnen Sie hiermit das bestimmte Integral $\int_0^1 f(x) dy$ für $f(x) = x^2$.