

Geburtstage

Ingo sitzt als einer von 30 Schülern im Mathematikunterricht und fragt sich, ob es wahrscheinlicher ist, dass mindestens zwei Personen den gleichen Geburtstag haben, oder dass alle Schüler an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben. Um dies abzuschätzen, nimmt Ingo an, dass ein Jahr genau 365 Tage hat und die Geburtstage gleich verteilt sind. (Letzteres ist nicht der Fall – einige Jahreszeiten sind geburtenreicher als andere.)

Was meinen Sie? Untersuchen Sie die Fragestellung mithilfe der folgenden Aufgabe.

- Aufgabe 1** a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Geburtstage der Schüler auf die 365 Tage eines Jahres zu verteilen?
- b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass alle Schüler an verschiedenen Tagen Geburtstag haben?
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Schüler an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben. Erklären Sie, wie man damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Schüler am selben Tag Geburtstag haben, berechnen kann, und bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeit.
- d) Mona sagt Ingo, dass man mithilfe einer anderen Berechnung zu dem Ergebnis kommen kann, und beschreibt das Verfahren:

Wähle die Schülerinnen und Schüler nacheinander aus. Mit der Auswahl des ersten Schülers ist ein Geburtstag festgelegt. Wähle einen zweiten Schüler aus und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sein Geburtsdatum ein anderes als das des ersten Schülers ist. Wähle dann den dritten Schüler und berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er einen anderen Geburtstag als die beiden anderen Schüler hat. Wiederhole diese Berechnung mit den Geburtstagen aller Schüler. Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass alle Schülerinnen und Schüler an verschiedenen Tagen Geburtstag haben.

Überprüfen Sie, ob die so berechnete Wahrscheinlichkeit mit dem Ergebnis aus Teil c) übereinstimmt.

Hinweis: Der Produktbefehl \prod (siehe unter Math2) kann hier von Nutzen sein.

- e) In Teilaufgabe d) haben Sie einen Produktausdruck verwendet. Wir arbeiten nun, ausgehend von diesem Produkt, mit einer Tabellenkalkulation weiter.

Vorüberlegung: Mit welcher Zahl muss man das Ergebnis für n Personen multiplizieren, um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass von $n + 1$ Personen keine zwei am selben Tag Geburtstag haben?

Legen Sie eine Tabelle mit zwei Spalten an. Die erste Spalte enthält die Anzahl der Personen, die zweite die Wahrscheinlichkeit (aus der Vorüberlegung).

Erweitern Sie die Tabelle auf 40 Zeilen.

- f) Untersuchen Sie mit der Tabelle: Bei welcher Zahl von Menschen beträgt die Wahrscheinlichkeit ungefähr 0,5, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?
- g) Stellen Sie die Ergebnisse in der Tabelle graphisch dar. Wählen Sie hierfür die Darstellung im Punktdiagramm. Beschreiben Sie das Diagramm. Ist der Verlauf des Graphen asymptotisch?

- h) Nähern Sie den Graphen möglichst gut durch den Graphen eines Polynoms fünften Grades an. Handelt es sich um eine gute Näherung? Überprüfen Sie das, indem Sie im Hauptarbeitsbereich die Funktion f definieren und dann die Abweichung des Näherungswertes vom tatsächlichen Wert ($f(1) - P(X = 1)$, $f(2) - P(X = 2), \dots$) untersuchen.
- i) Ingo möchte wissen, wie sich die Wahrscheinlichkeit für das gleiche Geburtsdatum zweier Schüler mit der Größe des Kurses verändert und ob es einen maximalen Wert der Änderungsrate gibt.
Untersuchen Sie diese Fragestellung mithilfe des Ergebnisses aus Teil h).
- j) Alternativ können die Wahrscheinlichkeiten im Folgenmenü betrachtet werden. Geben Sie eine Rekursionsformel für das Folgenglied a_{n+1} an. Geben Sie diese Folge im Menüpunkt  Folgen & Reihen ein und erstellen Sie eine Tabelle mit 40 Werten.
- k) Nun soll die Formel für andere Anzahlen von Merkmalsausprägungen (z.B. „ n Schülerinnen und Schüler haben in unterschiedlichen Wochen Geburtstag“) verwendbar sein. Testen Sie das aus und suchen Sie weitere Vorgänge, die mithilfe dieses Modells untersucht werden könnten.