Technologieaufgaben

der schriftlichen Reifeprüfung Mai 2018

mit dem Casio ClassPad II

Mag. Roland Prinz – April 2019

Inhalt

1. Aufgabe 2 - Hopfen
2. Aufgabe 4 - Bitcoin

Aufgabe 2

Hopfen

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion h: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8$, $b = 15$ und $k = -0{,}46$ ermittelt.

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie unter Verwendung der Modellfunktion *h* einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall [0; t_1] gewachsen ist!

$$h(t_1) - h(0)$$

Berechnen Sie unter Verwendung der Modellfunktion *h* mithilfe Ihres Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist, und geben Sie die prozentuelle Abweichung vom tatsächlich gemessenen Wert an!

Define $g(t)=\dfrac{a}{1+b\times e^{k\times t}}$

done

Define $h(t)=\dfrac{8}{1+15\times e^{-0.46\times t}}$

done

done

h(10)−h(0)

6.451821485

(ans/6.4−1)×100

0.8097106977

b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion *h* modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2, zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

$$h''(t) = 0$$

Define $h1(t)=\frac{d}{dt}(h(t))$

done

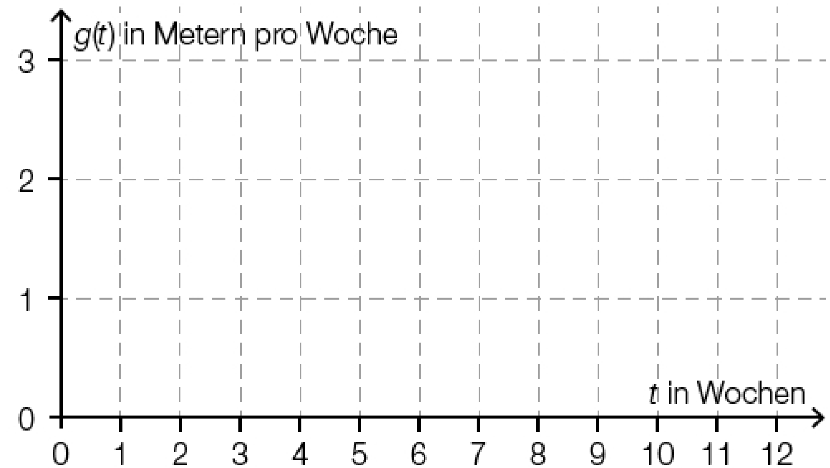
Define $h2(t)=\frac{d}{dt}(h1(t))$

done

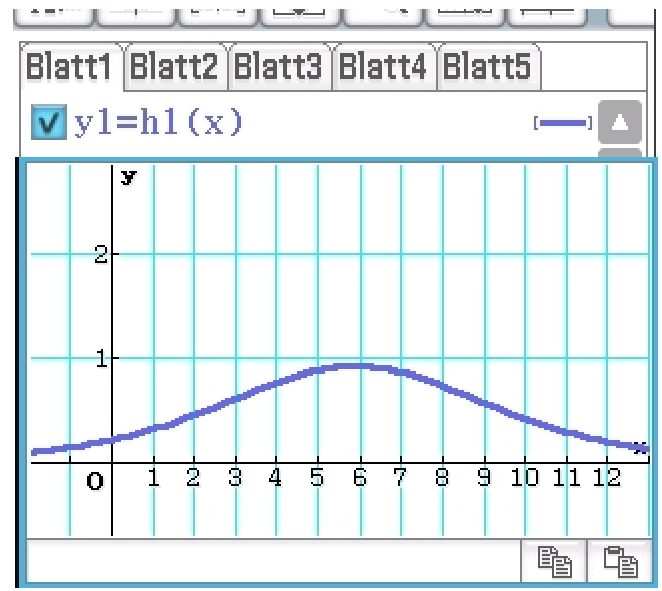
solve(h2(t)=0, t

{t=5.887065655}

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion *g*, die basierend auf der Modellfunktion *h* die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von *t* beschreibt!

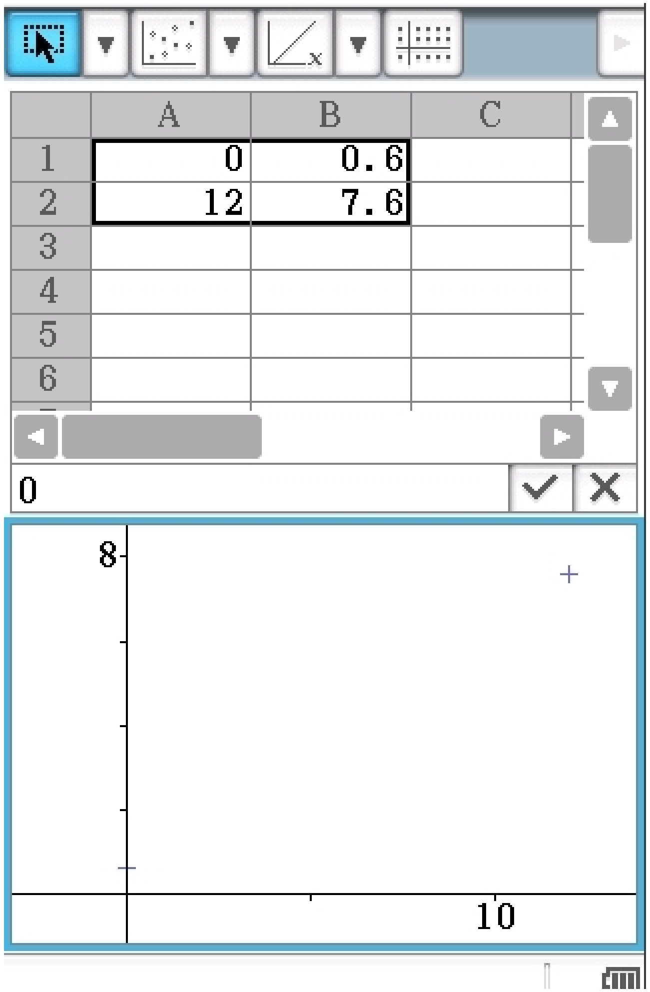


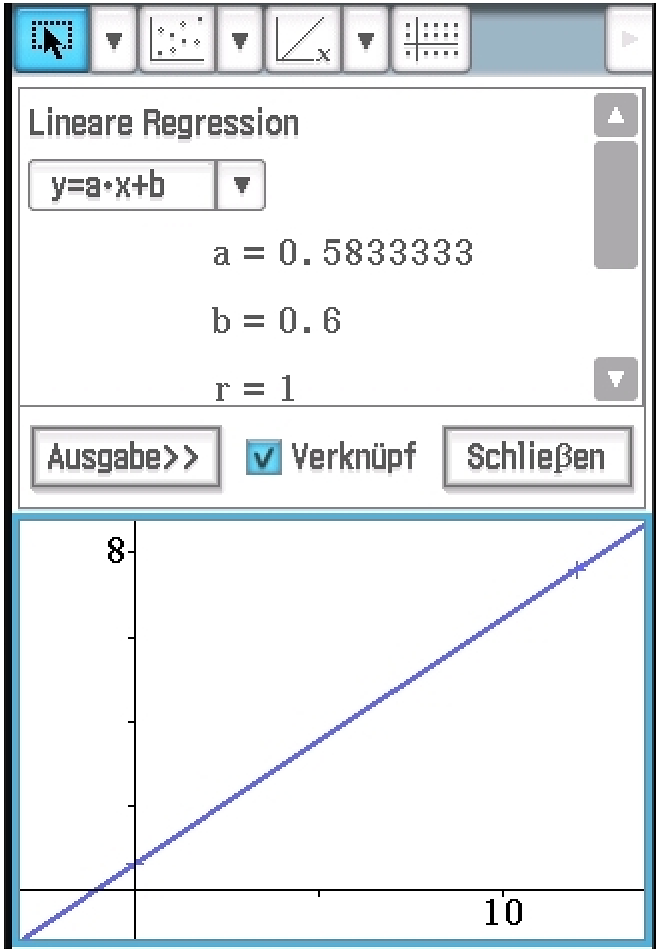

```
solve(h2(t)=0,t
                    {t=5.887065655}
h1(5.887065655)
                               0.92
```



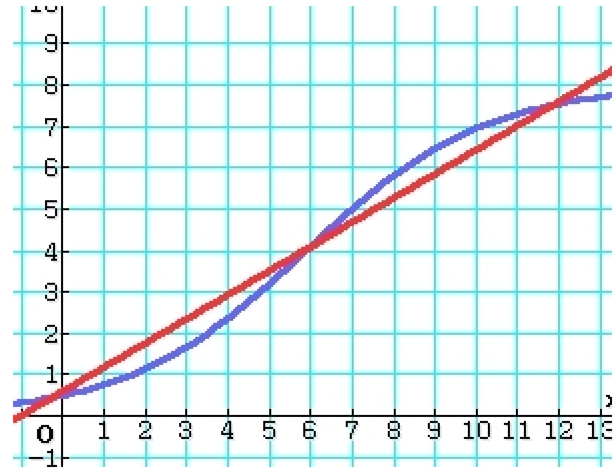
c) Ermitteln Sie eine lineare Funktion h_1, deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretieren Sie die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

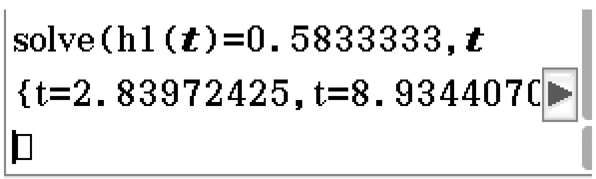
$h_1(t) =$ 0,583·t + 0,6

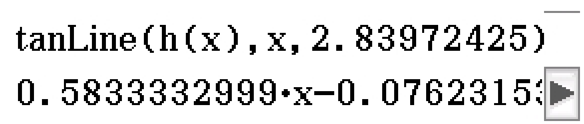


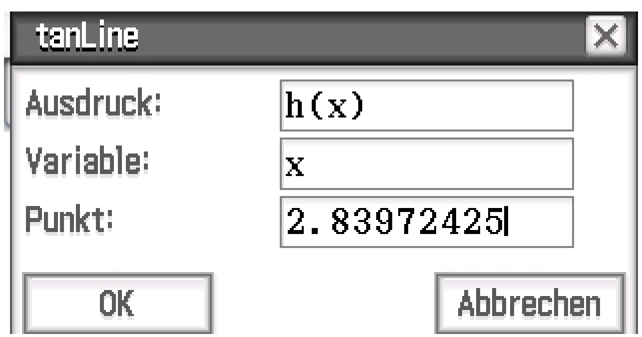


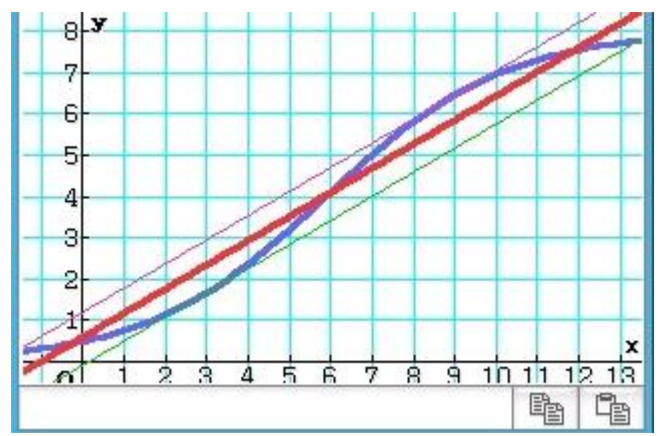
Begründen Sie anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1, warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1!











d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als h_{max} bezeichnet wird. Weisen Sie anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf h_{max} hat, und geben Sie h_{max} an!

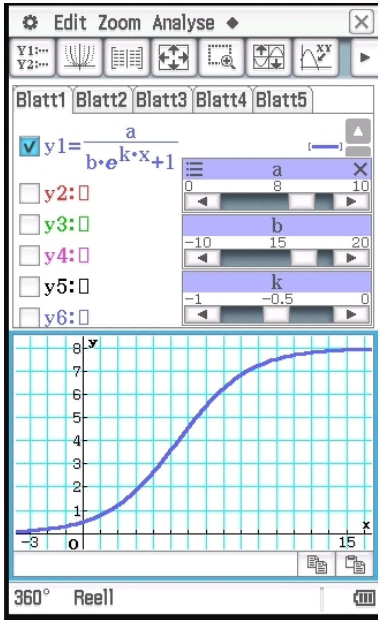
$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a}{1+b\times e^{k\times t}}\right) \mid k<0 \qquad a}$$

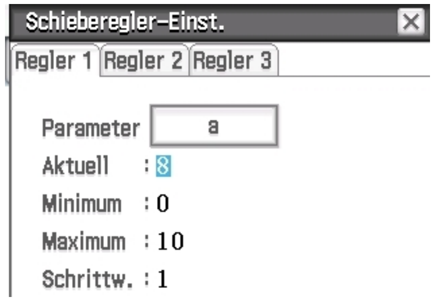
$$\lim_{t\to\infty}\left(b\times e^{k\times t}\right) \mid k<0 \qquad 0$$

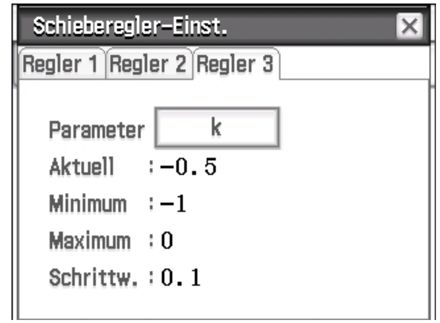
$$\lim_{t\to\infty}\left(e^{k\times t}\right) \mid k<0 \qquad 0$$

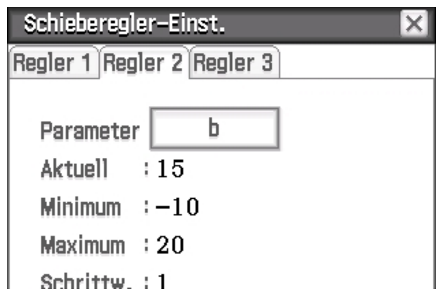
$$h_{max} = a$$

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d.h., dass sie sich früher einem größeren Wert von h_{max} annähert.
Geben Sie für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie *a* und *k* verändert werden müssen!









mit Schiebereglern von a und k "spielen" → a größer, k kleiner

Aufgabe 4 – Bitcoin [PT1 2017/18 2.4]

Bitcoin (Währungskürzel: BTC) ist eine digitale Kunstwahrung. Der Marktwert des Bitcoin ergibt sich aufgrund von Angebot und Nachfrage.

Nutzer/innen des Bitcoin werden in dieser Aufgabe als Bitcoin-User bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bitcoin-Euro-Kurs vom 11. März 2015 bis zum 11. März 2016. Die linke Skala zeigt dabei den absoluten Wert eines Bitcoins in Euro, die rechte Skala zeigt die Veränderung in Prozent bezogen auf den 11. März 2015.

Datenquelle: http://www.finanzen.net/devisen/bitcoin-euro-kurs [11.03.2017] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, in welchem der Monate von April 2015 bis Dezember 2015 der Bitcoin-Euro-Kurs jeweils vom Monatsanfang bis zum Monatsende absolut am stärksten gefallen ist, und geben Sie diesen Kursverlust in Euro an!

Monat: August

Kursverlust: € 55 [1,2 cm = € 50 – Delta: 1,3 cm]

Es sei K_1 der Bitcoin-Euro-Kurs zum Beginn des betreffenden Monats, K_2 der Bitcoin-Euro-Kurs am Ende des betreffenden Monats sowie AT die Anzahl der Tage des betreffenden Monats.

Berechnen Sie den ungefähren Wert des Ausdrucks $\frac{K_2 - K_1}{AT}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

$$\frac{205-265}{31} \qquad -1.935483871$$

Korrekturheft: -1,8 [-2,3; -1,5]

Der durchschnittliche Kursverlust im August betrug pro Tag € 1,94

b) Anfang Jänner 2016 waren ca. 15 Millionen Bitcoins im Umlauf. Die t Jahre nach dem Jahr 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins ist annähernd $f(t) = 21 \cdot 10^6 - 21 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}18 \cdot t}$. Damit ist $f(0)$ die zu Anfang Jänner 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins.

Bestimmen und interpretieren Sie die relative (prozentuelle) Änderung der im Umlauf befindlichen Menge an Bitcoins im Zeitintervall [7; 8]!

```
Define f(x)=21E6-21E6×e^(-0.
                              done
Define d(a,b)=(f(b)-f(a))/f(a)
                              done
d(7,8)×100
                        6.52286319
```

Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um 6,5 % zu

Geben Sie eine Gleichung an, mit der derjenige Zeitpunkt berechnet werden kann, ab dem nur mehr eine Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

$$\lim_{t \to \infty} (f(t))$$

21000000

→ 1 Mio. Rest → dh. Wann ist f(t) 20.000.000 ?

f(t) = 20.000.000

solve(f(t)=20E6,t

{t=16.91401354}

0.91×12

10.92

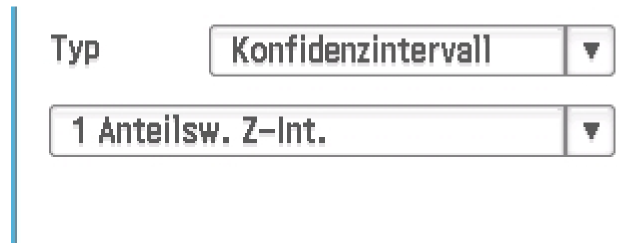
Nach 16 Jahren und 11 Monaten
(=Dezember 2025)

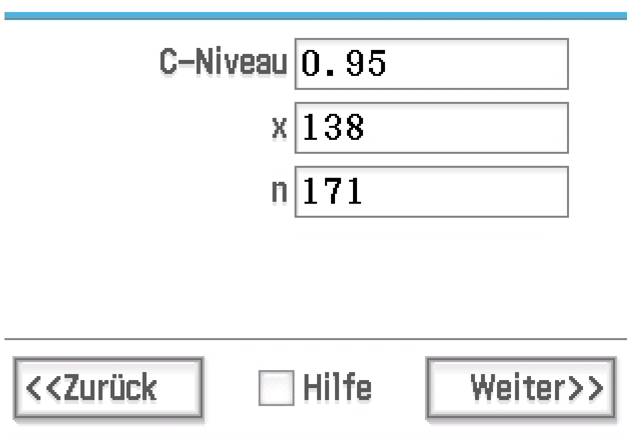
Korrekturheft: 17 Jahre (Jänner 2026)

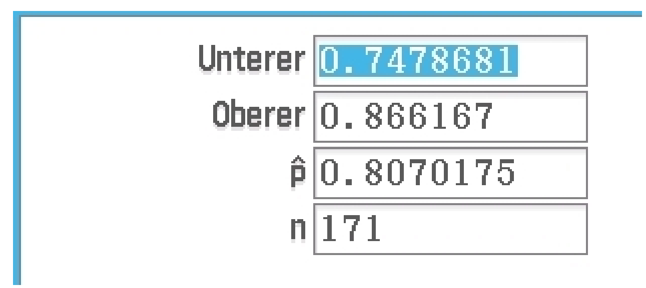
c) Eine Untersuchung der Demografie von Bitcoin-Usern hat ergeben, dass weltweit 88 % der Bitcoin-User männlich sind.
Es soll festgestellt werden, wie hoch dieser Prozentsatz in Österreich ist. Dazu wird eine große Anzahl an Personen befragt. Diese Befragung ergibt, dass 171 der befragten Personen Bitcoin-User sind, und von diesen 171 Personen sind 138 männlich.

A Geben Sie aufgrund dieser Daten ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der männlichen Bitcoin-User unter allen Bitcoin-Usern in Österreich an!

Statistik / Calc / Konfidenzintervall







[0,747; 0,867] Korrekturheft: [0,74;0,87]

Geben Sie an, welches Konfidenzniveau zur Berechnung eines solchen Intervalls mindestens angenommen werden muss, damit der weltweit ermittelte Anteil von 88 % in diesem Intervall enthalten ist!

[1] - Probieren

Typ	Konfidenzintervall
	1 Anteilsw. Z-Int.

C-Niveau	0.95
x	138
n	171

Unterer	0.7478681
Oberer	0.866167
p̂	0.8070175
n	171

C-Niveau	0.98
x	138
n	171

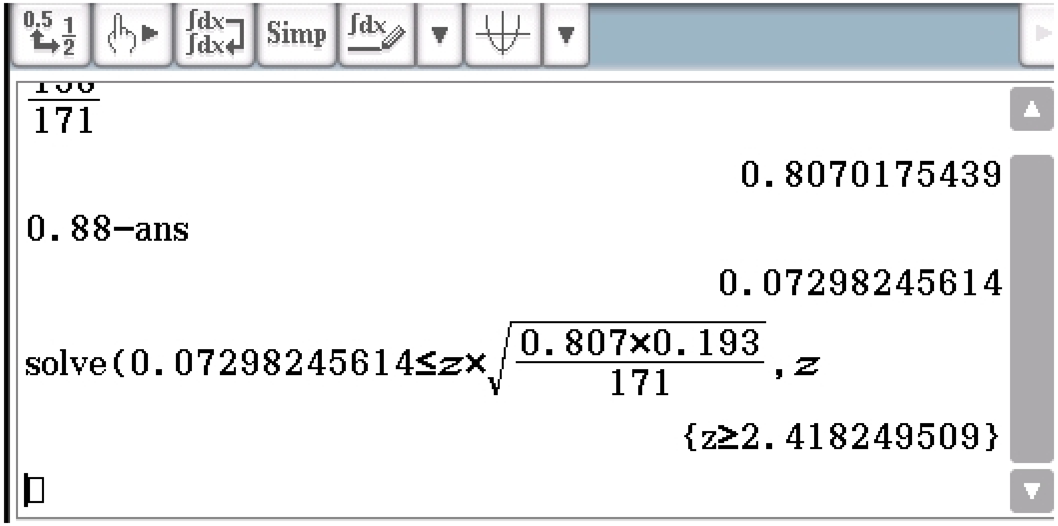
Unterer	0.7368111
Oberer	0.877224

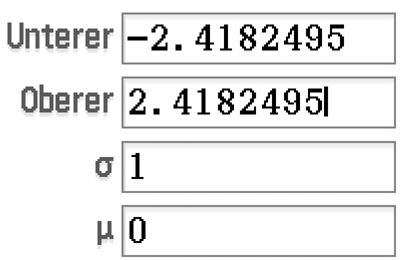
C-Niveau	0.99
x	138
n	171

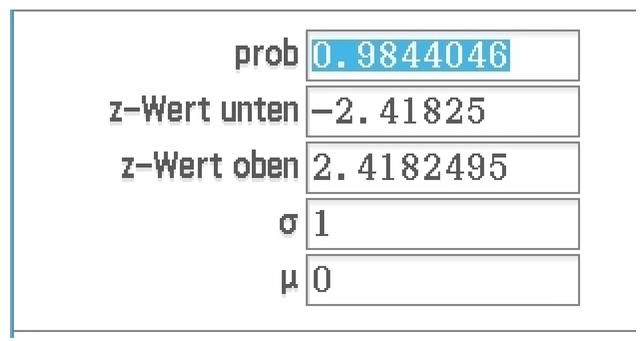
Unterer	0.729282
Oberer	0.884753

Korrekturheft: 98 % - 99 %

[2] – Berechnung







Lösung: 98,4 %