Teil 2 Aufgaben

der schriftlichen Reifeprüfung Mai 2020

mit dem Casio ClassPad II

Mag. Roland Prinz – September 2020

Inhalt

Aufgabe 25 - Fallschirmsprung

Quelle: pixabay – lizenzfrei

Aufgabe 25 (Teil 2)

Fallschirmsprung

Bei einem Fallschirmsprung aus einer Höhe von 4 000 m über Grund wird 30 s nach dem Absprung der Fallschirm geöffnet.

Für $t \in [0; 30]$ gibt die Funktion v_1 mit $v_1(t) = 56 - 56 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ (unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t an (t in s nach dem Absprung, $v_1(t)$ in m/s).

Für $t \geq 30$ gibt die Funktion v_2 mit $v_2(t) = \frac{51}{(t-29)^2} + 5 - 56 \cdot e^{-7{,}5}$ die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt der Landung an (t in s nach dem Absprung, $v_2(t)$ in m/s).

Modellhaft wird angenommen, dass der Fallschirmsprung lotrecht ist.

Aufgabenstellung:

a) 1) $\boxed{\text{A}}$ Deuten Sie $w = \dfrac{v_1(10) - v_1(5)}{10 - 5}$ im gegebenen Kontext.

A: Durchschnittliche Beschleunigung pro Sekunde in m/s² im Zeitintervall von 5 bis 10 Sekunden.

Für ein $t_1 \in [0; 30]$ gilt: $v_1'(t_1) = w$.

2) Deuten Sie t_1 im gegebenen Kontext.

A: Zum Zeitpunkt t_1 ist die momentane Beschleunigung gleich wie die durchschnittliche Beschleunigung im Intervall [5;10].

b) 1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion v_1, in welcher Höhe der Fallschirm geöffnet wird.

Define $\text{v1}(t) = 56 - 56 \times e^{-\frac{t}{4}}$

done

$\int_0^{30} \text{v1}(t)\,dt$

1456.123891

4000−ans

2543.876109

A: Der Fallschirm wird in rund 2.544 m geöffnet.

2) Berechnen Sie die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs vom Absprung bis zur Landung.

2543.876109

$\text{Define } v2(t) = \frac{51}{(t-29)^2} + 5 - 56 \times e^{-7.5}$

done

$\text{solve}\left(\int_{30}^{x} v2(t)\,dt = 2543.876109, x\right)$

$\{x=28.97958323, x=531.703336\}$

A: Der gesamte Fallschirmsprung dauert 532 Sekunden oder 8 Minuten und 52 Sekunden.

c) Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands hätte der Fallschirmspringer eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 m/s und im Zeitintervall [0; 30] eine konstante Beschleunigung von 9,81 m/s². Die Fallgeschwindigkeit 9 s nach dem Absprung beträgt dann v^*.

1) Berechnen Sie, um wie viel $v_1(9)$ kleiner ist als v^*.

$v^* = 9{,}81 \cdot 9 = 88{,}29$

```
v1(9)
                 50.09764342
9.81×9
                       88.29
88.29−v1(9)
                 38.19235658
```

A: v1(9) ist um 38,19 m/s = 137,5 km/h kleiner.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent 9 s nach dem Absprung die Beschleunigung des Fallschirmspringers geringer ist als bei einem Sprung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

$v^* = v1'(9)$

Define $v11(t)=\frac{d}{dt}(v1(t))$

done

v11(9)

1.475589144

9,81 .... 100 %

1,478889 x

ans×100/9.81

15.04168342

100−ans

84.95831658

A: Die Beschleunigung ist um 84,96 % geringer .

Aufgabe 26 – Wachstumsprozesse

Quelle: pixabay – lizenzfrei

Wachstumsprozesse

Im Folgenden werden Wachstumsmodelle betrachtet.

Die nachstehende Differenzengleichung beschreibt ein Wachstum.

$N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$

N_t ... Bestand zum Zeitpunkt t
r ... Wachstumskonstante, $r \in \mathbb{R}^+$
S ... (obere) Kapazitätsgrenze

Aufgabenstellung:

a) Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2000 Passagieren erkranken ab dem Zeitpunkt $t = 0$, zu dem noch kein Passagier erkrankt ist, jeden Tag 5 % der noch nicht erkrankten Passagiere. Dabei ist N_t die Anzahl der erkrankten Passagiere zum Zeitpunkt t mit t in Tagen.

1) Geben Sie eine Differenzengleichung für N_{t+1} an.

$S = 2.000$; $r = 0{,}05$

A: $N_{t+1} - N_t = 0{,}05 \cdot (2.000 - N_t)$
$N_0 = 0$

2) Ermitteln Sie, nach wie vielen Tagen erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt sind.

25 % = 500 Passagiere

Variante 1

Mit Wert füllen

Formel: =0.05·(2000−B2)+

Bereich: B3:B12

OK | Abbrechen

	A	B
1	Tag	Kranke
2	0	0
3	1	100
4	2	195
5	3	285.25
6	4	370.988
7	5	452.438
8	6	529.816
9	7	603.325
10	8	673.159
11	9	739.501
12	10	802.526
13		
14		
15		
16		

=0.05·(2000−B2)+B2

B3 100

Variante 2

rSolve$(a_{n+1}-a_n=0.05\times(2000-a_n),\ a_0=0$

$\{a_n=-2000\cdot 0.95^n+2000\}$

solve$(-2000\cdot 0.95^n+2000=500,\ n$

$\{n=5.608570787\}$

A: Nach 6 Tagen

A: Nach 6 Tagen

b) Die Differenzengleichung $N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$ lässt sich in der Form $N_{t+1} = a \cdot N_t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen.

1) Drücken Sie r und S durch a und b aus.

$r =$ **1 - a**

$S =$ **b/r**

$N_{t+1}=r\cdot(S-N_t)+N_t$
$N_{t+1}=r\cdot S-r\cdot N_t+N_t$
$N_{t+1}= r\cdot S + (1-r)\cdot N_t$
$N_{t+1}= (1-r)\cdot N_t + r\cdot S$

$\rightarrow$

$a = 1 - r$
$b = r\cdot S$

Zur Entwicklung eines neuen Impfstoffs wird das Wachstum einer Bakterienkultur in einer Petrischale untersucht.

In der nachstehenden Tabelle ist der Inhalt N_t (in cm²) derjenigen Fläche angeführt, die von der Bakterienkultur zum Zeitpunkt *t* (in h) bedeckt wird.

t in h	N_t in cm²
0	5,00
1	9,80
2	14,41

2) Ermitteln Sie *a* und *b* mithilfe der in der obigen Tabelle angegebenen Werte.

$N_{t+1}=a\cdot N_t+b$

$$\begin{cases} 9.8=a\times 5+b \\ 14.41=a\times 9.8+b \end{cases}\Bigg|_{a,\,b}$$

$\{a=0.9604166667, b=4.9979$

A: $a \approx 0{,}96$ und $b \approx 5$

c) Ein Pharmaunternehmen bringt einen neuen Impfstoff auf den Markt. In der ersten Woche nach der Markteinführung haben bereits 15 000 Personen den Impfstoff gekauft.

Die Anzahl $f(t)$ derjenigen Personen, die den Impfstoff innerhalb von t Wochen nach der Markteinführung gekauft haben, lässt sich modellhaft durch die Funktion f mit $f(t) = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ beschreiben ($k \in \mathbb{R}^+$).

1) $\boxed{\text{A}}$ Berechnen Sie k.

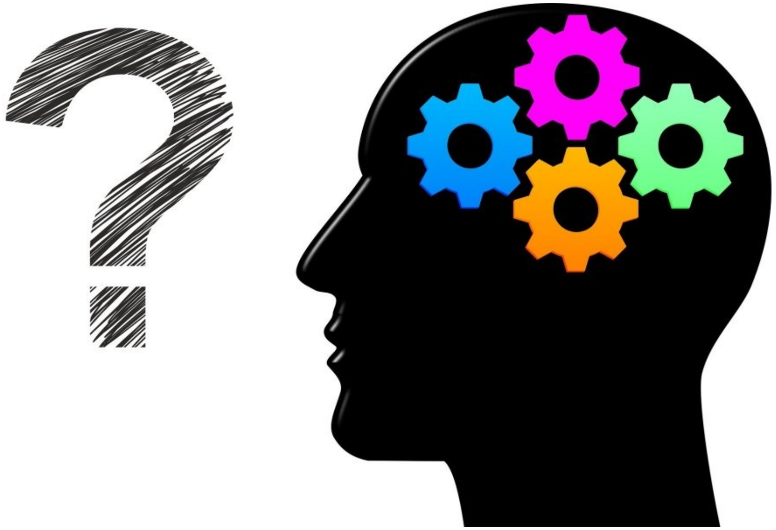
```
Define f(t)= 1000000×(1-e^(-k×t))
                                        done
solve(f(1)=15000,k)|k>0
                              {k=0.01511363781}
```

2) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt t_0, zu dem erstmals 500 000 Personen diesen Impfstoff gekauft haben.

```
solve(f(t)=500000,t)|k=0.01511363781
                              {t=45.86236545}
```

A: In der 46. Woche

Aufgabe 27 – Quiz mit Spielbrett



Quelle: pixabay – lizenzfrei

Aufgabe 27 (Teil 2)

Quiz mit Spielbrett

Bei einem Quiz werden hintereinander mehrere Fragen gestellt, die jeweils mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden. Auf einem Spielbrett steht eine Spielfigur zu Beginn eines jeden Spieldurchgangs auf dem Feld mit der Zahl 0. Bei jeder richtigen Antwort wird diese Spielfigur um ein Feld nach rechts, bei jeder falschen Antwort um ein Feld nach links gezogen. Die Felder des Spielbretts sind mit ganzen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge beschriftet (siehe nachstehende Abbildung). Das Spielbrett kann auf beiden Seiten beliebig verlängert werden.

Spielbrett

---	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	---

Maria und Tom spielen dieses Quiz. Tom befragt Maria.

Aufgabenstellung:

a) Bei einem Spieldurchgang ist das Quiz zu Ende, wenn die Spielfigur auf dem Feld mit der Zahl 2 zu stehen kommt.

Mit A wird das Ereignis bezeichnet, dass die Spielfigur nach höchstens 4 Fragen auf dem Feld mit der Zahl 2 steht.

Maria beantwortet jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p richtig.

1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ in Abhängigkeit von p an.

$P(+) = p;\ P(-) = (1-p)$

$P(A) = P(+,+) + P(-,+,+,+) + P(+,-,+,+) \rightarrow P(A) = p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1-p)$

$P(A) = -2p^4 + 2p^3 + p^2$

2) Geben Sie dasjenige $p \in [0;\ 1]$ an, bei dem die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ am stärksten wächst (also die lokale Änderungsrate von $P(A)$ am größten ist).

Define $f(p)=-2p^4+2p^3+p^2$

done

Define $f2(p)=\frac{d^2}{dp^2}(f(p))$

done

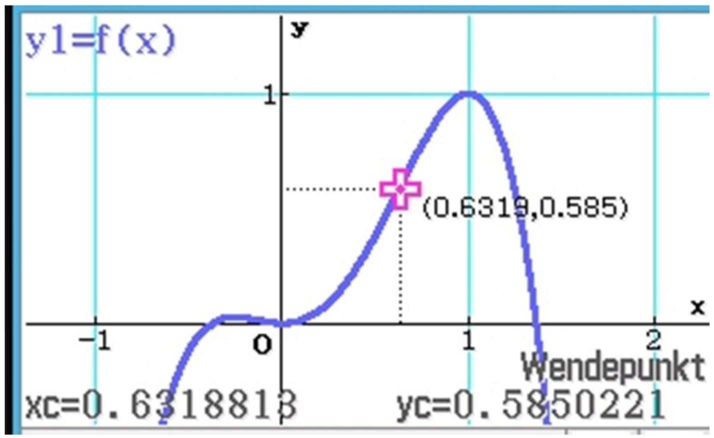
solve$(f2(p)=0, p$

$\{p=-0.1318813079, p=0.6318813079\}$

$\frac{d}{dp}(f2(p))|p=0.6318813$

-18.3303024

A: p=0,632



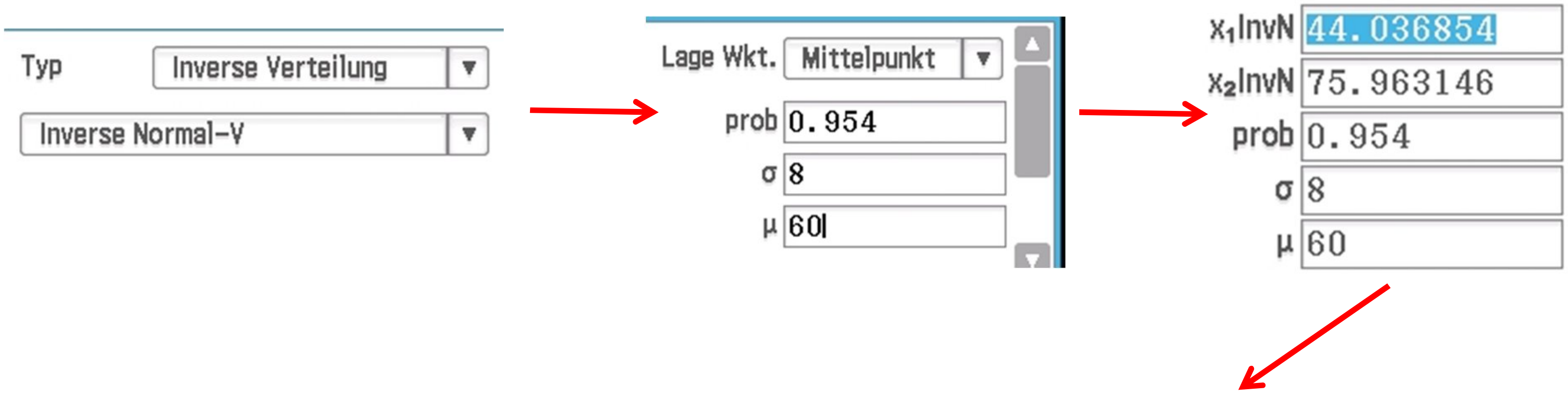
b) Bei einem anderen Spieldurchgang werden Maria genau 100 Fragen gestellt. Sie beantwortet dabei jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 richtig. Die Zufallsvariable Y gibt die Zahl desjenigen Feldes an, auf dem die Spielfigur nach der Beantwortung der 100 Fragen steht.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$.

$E(Y) =$ $100 \cdot 0{,}8 - 100 \cdot 0{,}2 = 60$

Die Zufallsvariable Y wird durch eine normalverteilte Zufallsvariable Z angenähert. Dabei gilt: $E(Y) = E(Z)$ und die Standardabweichung σ von Z ist 8.

2) Ermitteln Sie das um den Erwartungswert $E(Z)$ symmetrische Intervall $[z_1; z_2]$, für das $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 95{,}4\ \%$ gilt. $E(Z)=60$



[44; 76]

c) Bei einem anderen Spieldurchgang beantwortet Maria alle Fragen durch Raten. Sie beantwortet somit jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 richtig.

Für jede gerade Anzahl n an Fragen mit $n \geq 2$ gilt:

$$M(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}5^n$$

1) $\boxed{\text{A}}$ Interpretieren Sie $M(n)$ im gegebenen Kontext.

$$M(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}5^{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}5^{\frac{n}{2}}$$

A: M(n) ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau die Hälfte der Fragen richtig beantwortet.

Für jede gerade Anzahl n an Fragen mit $n \geq 10$ kann $M(n)$ durch $\tilde{M}(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$ näherungsweise berechnet werden.

Für jedes gerade $n \geq 10$ gibt es ein n^*, sodass gilt: $\tilde{M}(n^*) = \frac{1}{2} \cdot \tilde{M}(n)$.

2) Bestimmen Sie n^* in Abhängigkeit von n.

$n^* =$ **$4 \cdot n$**

$$\tilde{M}(n^*) = \frac{1}{2}\tilde{M}(n) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n^*}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}} \Leftrightarrow \frac{2}{\pi \cdot n^*} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\pi \cdot n} \Leftrightarrow \frac{1}{n^*} = \frac{1}{4 \cdot n} \Leftrightarrow n^* = 4 \cdot n$$

Aufgabe 28 – Ozonmessungen

Quelle: pixabay – lizenzfrei

Aufgabe 28 (Teil 2)

Ozonmessungen

Das Gas Ozon hat Auswirkungen auf unsere Gesundheit. Aus diesem Grund werden in Messstationen und mithilfe von Wetterballons die jeweiligen Ozonkonzentrationen in unterschiedlichen Atmosphärenschichten gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Auf der Hohen Warte in Wien befindet sich in 220 m Seehöhe eine Wetterstation. Hier wird für eine Messreihe ein Wetterballon mit einem Ozonmessgerät gestartet. Das Ozonmessgerät beginnt mit seinen Aufzeichnungen, wenn der Wetterballon eine Seehöhe von 2 km erreicht hat.

Nehmen Sie an, dass der Wetterballon (mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s) lotrecht in die Höhe steigt und dabei gleichmäßig mit 0,125 m/s² beschleunigt, bis er zu einem Zeitpunkt t_1 eine Geschwindigkeit von 6 m/s erreicht. Die Zeit wird dabei in Sekunden und die Seehöhe in Metern gemessen.

1) Ermitteln Sie die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1.

a(t)=0,125 → v(t)=0,125·t

Define v(t)=0.125×t
done
solve(v(t)=6,t
{t=48}

$\int_0^{48} v(t)\,dt$
144

A: 144 m über der Station (=364 m Seehöhe)

2) Ermitteln Sie, wie viele Sekunden nach dem Start das Messgerät mit seinen Aufzeichnungen beginnt.

Nach Aufzeichnungsbeginn fehlen noch 1.636 m.
1.636:6 ≈ 272,7 Sekunden

A: 273 Sekunden (=4 Minuten 33 Sekunden)

b) Ein Wetterballon hat bei einem Luftdruck von 1 013,25 hPa ein Volumen von 6,3 m³. Durch die Abnahme des Luftdrucks während des Aufstiegs dehnt sich der Wetterballon immer weiter aus und wird näherungsweise kugelförmig. Bei einem Durchmesser von *d* Metern zerplatzt er.

Der Luftdruck kann in Abhängigkeit von der Seehöhe *h* durch eine Funktion *p* modelliert werden. Dabei ordnet die Funktion *p* der Seehöhe *h* den Luftdruck *p*(*h*) zu.

Es gilt: $p(h) = 1\,013{,}25 \cdot \left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}$ mit h in m, $p(h)$ in hPa

Gehen Sie davon aus, dass der Luftdruck *p*(*h*) und das Volumen *V*(*h*) des Wetterballons indirekt proportional zueinander sind. Dabei ist *V*(*h*) das Volumen des Wetterballons in der Seehöhe *h*.

1) Drücken Sie das Volumen *V*(*h*) durch die Seehöhe *h* aus.

Indirekte Proportion: $V(h) = \frac{k}{p(h)}$

$$6{,}3 = \frac{k}{1.013{,}25} \Rightarrow k = 1.013{,}25 \cdot 6{,}3$$

$$\Leftrightarrow V(h) = \frac{1.013{,}25 \cdot 6{,}3}{1.013{,}25 \cdot \left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}}$$

$$V(h) = \frac{6{,}3}{\left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}}$$

Der Wetterballon zerplatzt in einer Seehöhe von h = 27 873,6 m.

2) Berechnen Sie den Durchmesser d des Wetterballons in Metern, bei dem dieser zerplatzt.

Define $V(h)=\dfrac{6.3}{\left(1-\dfrac{0.0065\times h}{288.15}\right)^{5.255}}$

done

V(27873.6)

1150.351318

solve$\left(\dfrac{4\times r^3\times\pi}{3}=1150.351318, r\right.$

{r=6.500009056}

A: d = 13 m

c) Das sogenannte *Gesamtozon* ist ein Maß für die Dicke der Ozonschicht und wird in sogenannten *Dobson-Einheiten* (DU) angegeben.

Die von einem Wetterballon aufgezeichneten Messdaten können modellhaft durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Dabei ordnet f der Höhe h die Gesamtozondichte $f(h)$ zu (h in km, $f(h)$ in DU/km).

Der höchste Wert von 36 DU/km wird in einer Seehöhe von 22 km gemessen. In einer Seehöhe von 37 km beträgt der gemessene Wert 1 DU/km.

1) $\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie $f(h)$.

$f(h) =$ $-0{,}1556\, h^2 + 6{,}8444\, h - 39{,}2889$

Define $f(\boldsymbol{h})=a\boldsymbol{h}\hat{}2+b\boldsymbol{h}+c$

done

Define $f1(\boldsymbol{h})=\frac{d}{d\boldsymbol{h}}(f(\boldsymbol{h}))$

done

$$\left\{\begin{array}{l} f(22)=36 \\ f1(22)=0 \\ f(37)=1 \end{array}\right|a, b, c$$

{a=−0.1555555556, b=6.844444444, c=−39.288888

In der Erdatmosphäre entspricht 1 DU einer 0,01 mm dicken Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche. Die Dicke derjenigen Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche, die dem Gesamtozon zwischen 7 km und 37 km Seehöhe entspricht, ist $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h$.

2) Berechnen Sie die Dicke dieser Schicht.

Dicke dieser Schicht: 7,3 (=730 DU) mm

```
f(h)|{a=-0.1555555556,b=6.844444444,c=-39.28
    -0.1555555556·h^2+6.844444444·h-39.28888889
∫_7^37 ans dh
                                    729.9999989
```