CASIO forum

Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 1/2009

Inhalt

Aufgabenbeispiel für den ClassPad

Polynome 4. Grades und der Goldene Schnitt

Autor: Arnold Zitterbart u.a., Schwarzwald-Gymnasium Triberg

Auf einem internationalen Kongress im Dezember 2007 stellte M.Sc. Tor Andersen, ein Mathematiklehrer aus Norwegen, den Zusammenhang zwischen der Zahl φ des goldenen Schnitts und einem Polynom 4. Grades anhand eines konkreten Beispiels vor und ermunterte die Teilnehmer, diesen Zusammenhang für weitere Polynome 4. Grades zu untersuchen.
Nach dem schriftlichen Abitur 2008 machten sich Natalie Kern, Katja Rösler, Christoph Amann und Benjamin Deck, eine Gruppe von Schülern des Schwarzwald-Gymnasiums Triberg, daran, diesen Zusammenhang mithilfe des ClassPad zu untersuchen.[1]

Beispiel mit konkreten Zahlen:

Gegeben ist die Funktion
$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 2$

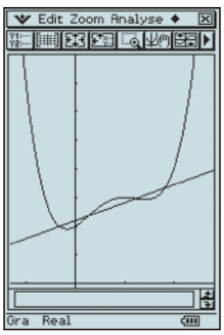
Durch die beiden Wendepunkte wird eine Gerade gelegt: Die Gleichung f“(x) = 0 wird mit dem ClassPad gelöst und die Ergebnisse gespeichert.

$$x_{w1} = \frac{-\sqrt{33}}{12} + \frac{3}{4} \approx 0{,}271 \quad \text{und}$$

$$x_{w2} = \frac{\sqrt{33}}{12} + \frac{3}{4} \approx 1{,}228 \quad \text{sowie}$$

$$f(x_{w1}) \approx 2{,}363 \quad \text{und} \quad f(x_{w2}) \approx 2{,}962$$

Die Gerade $g(x) = 0{,}625x + 2{,}194$ durch die beiden Wendepunkte schneidet den Funktionsgraphen in zwei weiteren Punkten: $x_{s1} \approx -0{,}320$ und $x_{s2} \approx 1{,}820$
Dadurch entstehen drei Geradenabschnitte, in denen die Zahl φ des Goldenen Schnitts enthalten ist.



Fortsetzung Seite 2

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

mit dem CASIO forum möchten wir Sie für Computer-Algebra-Systeme (CAS) und Grafikrechner begeistern.

In vielen Schulen werden Grafikrechner und Grafikrechner mit CAS bereits im Mathematikunterricht oder im naturwissenschaftlichen Unterricht unterschiedlichster Klassenstufen genutzt. Im CASIO forum finden Sie Anregungen und Beispiele von Lehrerinnen und Lehrern, wie auch Sie diese Werkzeuge für Ihren Unterricht effektiv nutzen können.

Das Aufgabenbeispiel „Polynome 4. Grades und der Goldene Schnitt“ verdeutlicht den Vorteil, den der Einsatz eines CAS bietet.

Wenn Sie die Beispielaufgaben im Unterricht ausprobieren möchten, können Sie unsere Grafikrechner im Klassensatz einschließlich Zubehör kostenlos für vier Wochen ausleihen. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrersupport.

Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an education@casio.de.

Ihr Redaktionsteam
i.A. CASIO Educational Projects

1 Um mit Tor Andersen über das Problem kommunizieren zu können, übersetzten die Schülerinnen und Schüler ihre Ausarbeitung ins Englische, vgl. www.casio-schulrechner.de/de/materialdatenbank, Suchwort „Goldener Schnitt“.

Fortsetzung: Aufgabenbeispiel für den ClassPad

Nun wird der Abstand zwischen den Wendepunkten (d_1) und zwischen dem linken Schnittpunkt S_1 und dem linken Wendepunkt W_1 (d_2) bestimmt.

$$d_1 = \sqrt{(y_{w2} - y_{w1})^2 + (x_{w2} - x_{w1})^2} \approx 1{,}129$$

$$d_2 = \sqrt{(y_{w2} - f(x_{s1}))^2 + (x_{w2} - x_{s1})^2} = 0{,}697$$

Das Verhältnis zwischen den beiden Abständen beträgt:

$$\frac{d_1}{d_2} \approx 1{,}618 \qquad \text{und} \qquad \frac{d_2}{d_1} \approx 0{,}618$$

Diese beiden Dezimalzahlen kommen auch im Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt vor.

Der Goldene Schnitt

Eine Strecke der Länge 1 wird im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt, wenn für die beiden Abschnitte x und (1-x) gilt:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{x + (1-x)}{x}$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618 \qquad \text{und}$$

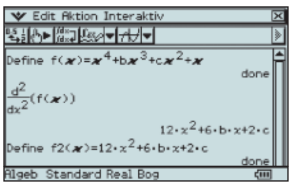
$$x_2 = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{2} \approx -1{,}618$$

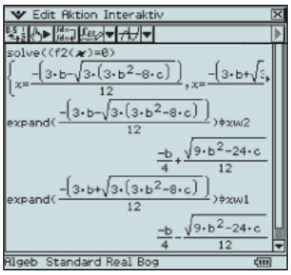
Die erste Lösung wird mit dem griechischen Buchstaben φ bezeichnet, der Betrag der zweiten Lösung als Φ.

Allgemeiner Fall

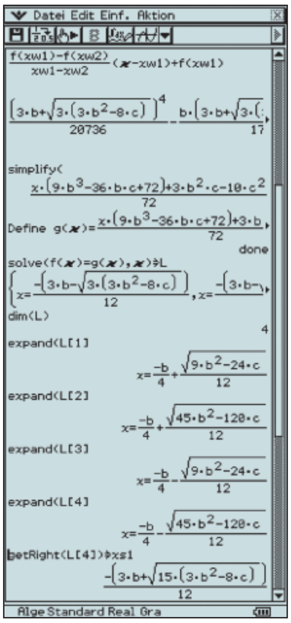
Das allgemeine Polynom 4. Grades hat die Gestalt $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
Der Parameter e ist entbehrlich, da er nur eine vertikale Verschiebung des Graphen bewirkt, also keinen Einfluss auf das zu untersuchende Verhältnis der beiden Geradenabschnitte hat.
Durch eine vertikale Streckung, bei der das gesuchte Verhältnis nicht geändert wird, kann der Koeffizient a auf 1 gebracht werden. Es ist daher ausreichend, nur Polynome der Gestalt $f(x) = x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x$ zu betrachten.
Wegen des Strahlensatzes genügt es, zur Berechnung des Verhältnisses die Projektion auf die x-Achse zu untersuchen.

Mit dem ClassPad werden zunächst die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmt:





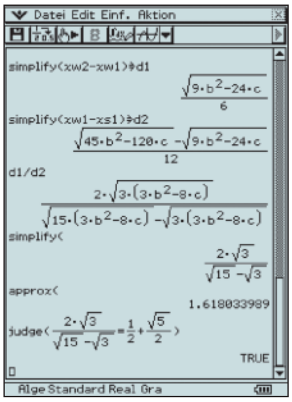
Und daraus die Gleichung der Geraden g(x) durch die beiden Wendepunkte:



Neben den Wendepunkten W_1 und W_2 hat die Gerade g mit dem Graphen des Polynoms die beiden weiteren Schnittstellen:

$$x_{s1,2} = -\frac{1}{4}b \pm \frac{\sqrt{45 \cdot b^2 - 120 \cdot c}}{12}$$

Durch Speicherung der Ergebnisse in einer Liste L kann auf die einzelnen Listenelemente, z.B. auf die links neben x_{w1} liegende Schnittstelle x_{s1} (L[4]), zugegriffen werden.



Das Verhältnis der beiden entsprechenden Abstände d_1 und d_2 auf der x-Achse berechnet der ClassPad als :

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \qquad \text{überein.}$$

Entsprechend wird gezeigt, dass das Verhältnis

$$\frac{d_2}{d_1} \text{ mit } \varphi = \frac{-(\sqrt{5} + 1)}{2} \qquad \text{übereinstimmt.}$$

Schülerwettbewerb zu Mathematik und Kreativität

Der CASIO Vektoria Award: Preise im Wert von über 3.000 Euro zu gewinnen

Bereits seit 2005 veranstaltet CASIO den „Vektoria Award“, bei dem SchülerInnen von der 5. bis zur 13. Klasse zeigen können, wie kreativ sie mit dem Thema Mathematik umgehen.
Dabei erwartet sie immer wieder eine neue Herausforderung: Nicht nur das Thema wird jährlich neu bestimmt (so 2008 die Frage „Ist Mathematik die Sprache der Natur?“), sondern es gilt auch, die Aufgabe jedes Mal in einem anderen Medium umzusetzen – z. B. als Digitalfilm, Podcast, Website oder selbst geschaffenes Ausstellungsstück.
Als Belohnung winken ein Preisgeld von insgesamt 3.000 Euro, der durch Online-Voting vergebene Publikumspreis und zahlreiche Anerkennungspreise.

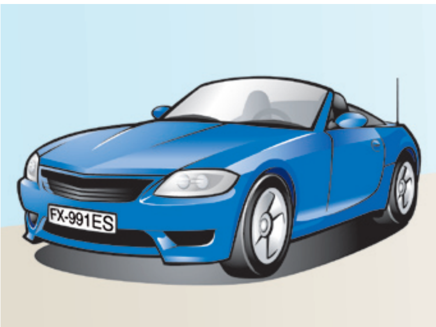
Im Rahmen des Vektoria Awards kooperiert CASIO mit dem renommierten Deutschen Technikmuseum Berlin.
Der CASIO Vektoria Award startet jedes Jahr im Herbst parallel zum Schuljahresstart. Der genaue Beginn wird rechtzeitig durch an Schulen versendete Plakate und auf der Homepage des Wettbewerbs bekannt gegeben.
Alle weiteren Informationen, den aktuellen Wettbewerb und die Preisträger der vergangenen Jahre finden Sie unter

www.casio-vektoria-award.de

Zum Einsatz des FX-991ES bei der Behandlung der Binomialverteilung

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Winckelmann-Gymnasium Stendal

Die Möglichkeit des technisch-wissenschaftlichen Rechners FX-991ES, Gleichungen unter Verwendung der SOLVE-Taste numerisch zu lösen, erlaubt die Beantwortung von Fragestellungen, die bisher im Unterricht kaum behandelt wurden. Die explizite Auswertung von Summen in der Darstellung $\sum_{x=A}^{B} f(x)$ unterstützt die inhaltliche Vertiefung von Begriffen, die auf solchen Ausdrücken beruhen.
So kann durch den Einsatz des FX-991ES Einfluss auf die didaktische und methodische Gestaltung des Unterrichts genommen werden und damit auch entscheidend auf den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler. Dies wird am Beispiel der Behandlung von Fragen zur Binomialverteilung im Folgenden beschrieben.



Bei der Behandlung von binomialverteilten Zufallsgrößen ist die Erörterung von folgenden Aufgabenstellungen typisch:

Von allen neu zugelassenen PKW sind im langjährigen Mittel etwa 16 % blau lackiert.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 100 PKW, die auf einem Parkplatz stehen, genau 30 blau sind?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Autos 20 bis 60 blau sind?

3. Wie viele PKW muss man mindestens betrachten, damit mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens ein blauer dabei ist? Was ändert sich, wenn man auf mindestens zwei blaue Autos wartet?

Die Lösungen dieser Aufgaben lassen sich geschlossen darstellen, wenn eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p vorausgesetzt wird.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (1)$$

$$P(k\le X\le m)=\sum_{x=k}^{m}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \qquad (2)$$

$$n\ge \log_{1-p}(1-a) \qquad (3)$$

Die angegebenen Terme können in der vorliegenden Form in den FX-991ES eingegeben werden. Besonders bei den Aufgaben vom Typ 2 wird durch den ständigen Gebrauch der Summenformel das Grundverständnis für die Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten gefestigt, und die Zweckmäßigkeit der Schreibweise mit dem Σ-Symbol wird deutlich.

Die Formeln 1 und 2 sind nur dann nützlich, wenn die Binomialkoeffizienten vom FX-991ES berechnet werden können. So wird zum Beispiel $\binom{106}{53}$ nicht berechnet. In diesen Fällen wird auf eine Approximation der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung zurückgegriffen. Die Näherungsformeln von Laplace und De Moivre bilden dann den Schlüssel zur Lösung: Wenn die binomialverteilte Zufallsgröße X die Laplace-Bedingung $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}>3$ erfüllt, dann gilt

$$P(X=k)\approx\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(z) \text{ mit } z=\frac{k-\mu}{\sigma}.$$

Dabei sind $\mu=n\cdot p$ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung von X.
Die erforderliche Rechnung kann unter Verwendung von Speicherplätzen sehr übersichtlich organisiert werden. Wenn der Speicher A mit dem Wert $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ belegt wird und B mit dem Wert $k-n\cdot p$, dann kann $P(X=k)$ als

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0{,}5\left(\frac{B}{A}\right)^2}$$ bequem berechnet werden.

Zur Bestimmung von Intervallwahrscheinlichkeiten (Aufgaben des Typs 2) gibt es im Statistikmodus des FX-991ES die Funktion

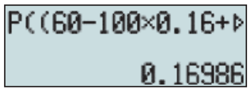
$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt\,.$$

Bei Verwendung dieser Funktion lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit aufgrund der globalen Näherungsformel von Laplace und De Moivre wie folgt berechnen:
$P(20\le X\le 60)=P(X\le 60)-P(X\le 19)$

$$\approx\phi\left(\frac{60-100\cdot 0{,}16+0{,}5}{\sqrt{100\cdot 0{,}16\cdot(1-0{,}16)}}\right)-\phi\left(\frac{19-100\cdot 0{,}16+0{,}5}{\sqrt{100\cdot 0{,}16\cdot(1-0{,}16)}}\right)$$

Berechnung mit dem FX-991ES: Eingabe des Terms $\sqrt{100\cdot 0{,}16\cdot(1-0{,}16)}$ im COMP-Modus und speichern unter A mit [SHIFT] [RCL] [(−)]

Öffnen des Statistikmodus mit [MODE] [3] (STAT) [AC] und Eingeben des Ausdrucks, wobei die Funktion $\phi(\ldots)$ mit [SHIFT] [1] ([STAT]) [7] (Distr) [1] und A mit [ALPHA] [(−)] aufgerufen wird.



Die gesuchte Intervallwahrscheinlichkeit beträgt nach dieser Rechnung rund 17 %.
Es ist aber auch möglich, den Schülerinnen und Schülern zu demonstrieren, dass die Funktionswerte der ϕ-Funktion tatsächlich über das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$ ermittelt werden.

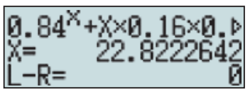
Dazu wird mithilfe der [∫]-Taste dieses Integral näherungsweise berechnet, wobei für die untere Integrationsgrenze etwa -100 eingesetzt werden kann.

Die „dreimal mindestens Aufgabe“ (Typ 3) ist in den Schulbüchern stets so formuliert, dass mindestens ein Treffer erzielt werden soll. Wenn nach mindestens k Treffern mit $k\ge 2$ gefragt wird, dann ergeben sich Gleichungen, deren Lösungen nicht mehr in formelmäßig geschlossener Form angegeben werden können. Solche Aufgaben werden unter Verwendung von SOLVE gelöst.
Wenn mit X die Anzahl der blauen Autos bezeichnet wird, dann ist X binomialverteilt mit $p=0{,}16$. Es ist nun n so zu bestimmen, dass

$$P(X\ge 2)=\sum_{n=2}^{n}\binom{n}{x}\cdot 0{,}16^x\cdot 0{,}84^{n-x}\ge 0{,}9$$

Folgende Umformungen führen zu einer Ungleichung, die im COMP-Modus gelöst wird:

$P(X\le 1)\le 0{,}1$
$P(X=0)+P(X=1)\le 0{,}1$
$0{,}84^n+n\cdot 0{,}16\cdot 0{,}84^{n-1}\le 0{,}1$



Mit SOLVE ([SHIFT] [CALC]) ergibt sich, dass für $n=22{,}82$ fast Gleichheit gilt.
Da die Funktion $f(n)=0{,}84^n+n\cdot 0{,}16\cdot 0{,}84^{n-1}$ für $n>1$ streng monoton fallend ist, ergibt sich die Lösung $n\ge 23$.
Analog lässt sich auch die Aufgabe lösen, wenn mit mindestens 90% Sicherheit mindestens drei blaue Autos gesichtet werden sollen.

Berechnung eines Tilgungsplanes

Autor: Jürgen Appel, Deutschorden-Gymnasium Bad Mergentheim

Das Thema Prozent- und Zinsrechnung ist in den Bildungsstandards (L1: Zahl) vorgesehen. Die folgende Aufgabe wurde als Partnerarbeit in einer 7. Klasse eingesetzt. Dazu sind zunächst die Begriffe „Nominalzins“, „Tilgung“ und die „quartalsweise Abrechnung“ in einem Lehrervortrag an Beispielen vorgestellt worden; die Berechnung einer rekursiven Folge mit dem Grafikrechner sollte bekannt sein (z.B. Einführung der Zinseszinsrechnung).

Aufgabe:

Kreditsumme:	100.000 €
Nominalzins:	4,8 %
Laufzeit:	10 Jahre
Abrechnung:	Jeweils am Ende eines Quartals

a) Berechnen Sie mit dem Grafikrechner eine rekursive Folge für den Restschuldenstand, falls der Kreditnehmer pro Quartal 1.500 € (2.100 €) zurückbezahlt!

b) Welche Summe wurde in 10 Jahren insgesamt eingezahlt? Welcher Kreditbetrag wurde in 10 Jahren getilgt? Wie viele Zinsen wurden in 10 Jahren gezahlt?

c) Nach welcher Zeit wäre der Kredit vollständig zurückgezahlt?

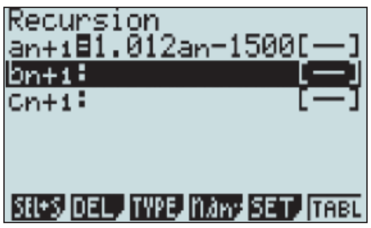
d) Welcher Betrag müsste pro Quartal mindestens bezahlt werden, damit der Kredit bereits nach 10 Jahren vollständig getilgt ist?

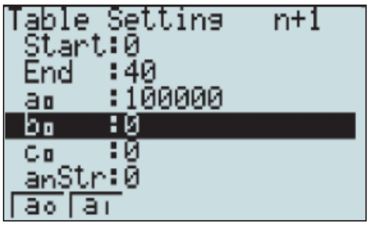
e) Lösen Sie die Teilaufgaben a) bis d), falls die Abrechnung monatlich erfolgt und der Kreditnehmer pro Monat 500 € (700 €) bezahlt!

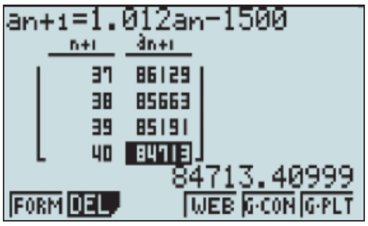
f) Für einen Kredit mit 15 Jahren Laufzeit und 4,2% Zins können monatlich 600 € (800 €) bezahlt werden.
Wie hoch darf die Kreditsumme höchstens sein, damit zum Ende der Laufzeit der Kredit vollständig zurückbezahlt ist?

Lösungsvorschlag mit dem FX-9860G[2]

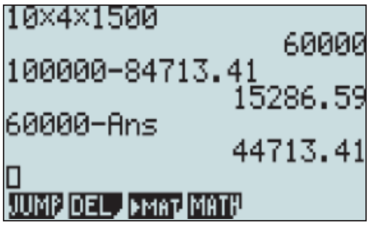
a) Geben Sie die Rekursionsformel $a_{n+1} = 1{,}012a_n - 1500$ in der RECUR-Folgenanwendung und unter SET (F5) $a_0 = 100.000$ sowie den Bereich von 0 bis 40 (40 Quartale) ein.



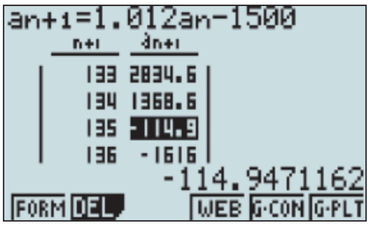




b) In der RUN-MAT-Anwendung werden die drei Werte berechnet.

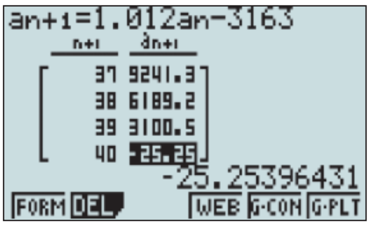


c) Stellen Sie den SET in der Folgenanwendung neu ein und beobachten Sie, ab welchem n die Werte negativ werden (z.B. von 100 bis 150).

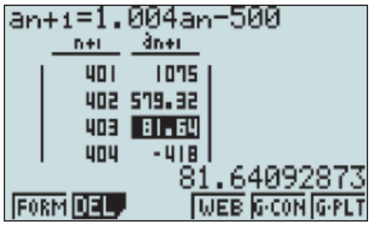


Der Kredit ist also im Laufe des 34. Jahres vollständig zurückgezahlt.

d) Stellen Sie nun den SET wie folgt ein: Start: 37 ; End: 40. Dann variieren Sie in der Rekursionsformel die Quartalsrate solange, bis der Wert a_{40} erstmals negativ wird.



e) Die Rekursionsformel $a_{n+1} = 1{,}004a_n - 500$ wird eingegeben und im SET $a_0 = 100000$ und der Bereich von 0 bis 120 (120 Monate) eingestellt. Ansonsten wird analog zu den Teilaufgaben a) bis d) vorgegangen.



Der Kredit ist also im August des 34. Jahres vollständig zurückgezahlt.

f) Die Rekursionsformel $a_{n+1} = 1{,}0035a_n - 600$ wird eingegeben. Im SET wird a_0 zunächst auf 90.000 (Schätzwert aufgrund der Aufgabe b) und der Bereich von 177 bis 180 (180 Monate) eingestellt. Nun wird im SET die Kreditsumme a_0 solange variiert, bis der Wert a_{180} nahezu null wird. Dies ist bei 80.027 € der Fall.

Materialtipp

Materialdatenbank:
www.casio-schulrechner.de/de/materialdatenbank/

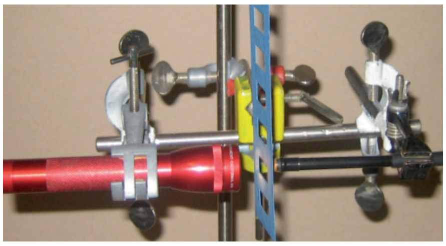
- Kurzanleitung zu CASIO-Grafikrechnern (FX-9860G, FX-9750G und CFX-9850G)
- Warmeling, Antonius: ClassPad-Karteikarten (v.3.03) mit den wichtigsten Funktionen für den Mathematikunterricht zum Nachschlagen und Üben für Schülerinnen und Schüler.

2 Die Aufgabe kann auch mit der Tabellenkalkulation (S-SHT) gelöst werden, vgl.www.casio-schulrechner.de/de/materialdatenbank, Suchwort „Tilgungsplan“.

Untersuchung am freien Fall

Autor: Michael Bostelmann, Mons-Tabor-Gymnasium Montabaur

Eine Leiter mit jeweils 1cm breiten Sprossen und Lücken fällt durch eine Lichtschranke. Diese lässt sich problemlos durch eine Taschenlampe und einen lichtempfindlichen Sensor, wie er im Lieferumfang des EA-200 enthalten ist, aufbauen. Die benötigte Fall-Leiter ist häufig in der Physik-Sammlung vorhanden, lässt sich aber auch gut aus Karton herstellen.
Während des Fallens wird ein Zeit-Helligkeits-Diagramm aufgezeichnet. Mit Hilfe der Messwerte soll der Fallprozess modelliert werden. Dieses Experiment ist wegen des relativ geringen Aufwandes und der schnellen Durchführung gut als Element eines Stationenlernens oder auch für eine arbeitsteilige Gruppenarbeit geeignet. Im Mathematikunterricht passt es sowohl in eine Unterrichtsreihe zu quadratischen Funktionen als auch zur Untersuchung von Änderungsraten in der Analysis. Im Physikunterricht eignet es sich für die Untersuchung der Bewegungsgesetze bzw. des freien Falls.

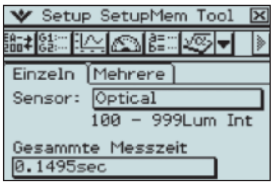


Material:

- ClassPad 330
- Messwerterfassungssystem EA-200 mit optischem Sensor
- Fall-Leiter
- Taschenlampe

Vorbereitung:

Verbinden Sie den ClassPad 330 und den Master-Eingang des EA-200 mit dem Dreipolkabel und belegen Sie Kanal 1 (CH 1) mit dem optischen Sensor.
Wählen Sie die Anwendung „E-ConEA200“[3]. Hier werden nun verschiedene Einstellungen (Typ des Sensors, Dauer der Messung u.a.) vorgenommen.



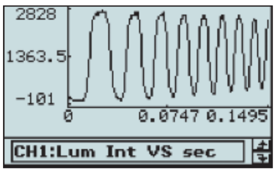
Anschließend werden im Setup unter „Probe“ die gezeigten Werte für den Modus, die Zeitauflösung und die Anzahl der Messwerte eingestellt. Die Einstellungen im Setup mit „Einst“ bestätigen.

Da die gesamte Messung nur 0,15 Sekunden dauert, soll sie automatisch beim ersten Hell-Dunkel-Wechsel gestartet werden, d.h. wenn die gemessene Helligkeit einen bestimmten Wert (Triggerschwelle) unterschreitet. Um die Triggerschwelle festzulegen, öffnen Sie mit den Multimeter-Modus damit Sie den aktuellen Helligkeitswert sehen können. Schalten Sie die Taschenlampe ein und lesen Sie die Werte ab, wenn der Strahlengang durch die Leiter verdeckt wird und wenn er offen ist. Die Triggerschwelle muss über dem unteren Wert liegen. Beenden Sie mit „Abbr.“ den Modus, öffnen Sie im Setup den „Trigger“ und stellen sie „CH 1: Optical“ als Quelle und den entsprechenden Schwellenwert ein. Da es sich um einen Hell-Dunkel-Wechsel handelt, wird die Triggerflanke auf „Abfall“ eingestellt.

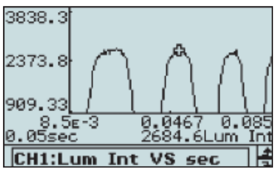
Messung:

Starten Sie mit die Messung und bestätigen Sie mit [OK], es dauert nun einen Moment bis das EA-200 eingestellt ist, dann

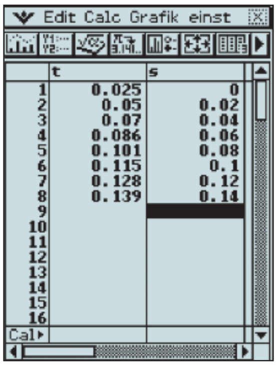
ertönt ein Signal und die eigentliche Messung wird gestartet. Lassen Sie nun die Leiter durch die Lichtschranke fallen. Wenn der Trigger auslöst, ertönt ein Signal und nach Beendigung der Messung ebenfalls. Ist dies nicht der Fall, lassen Sie die Leiter erneut fallen oder erhöhen Sie die Triggerschwelle. Bestätigen Sie anschließend „Messung beendet“ mit [OK]. Es dauert einen Moment und die grafische Darstellung der Messwerte erscheint.



Auswertung:

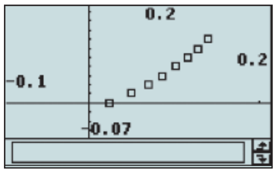


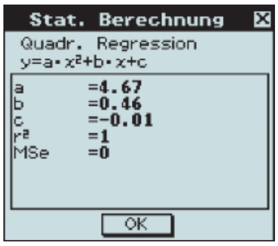
Die Spitzen treten jeweils in der Mitte zwischen zwei Sprossen auf. Im Spur-Modus (Analyse – Verfolgen) können die Graphen abgetastet und die x-Koordinaten der Hochpunkte ermittelt werden. Es ist leichter abzulesen, wenn Sie zunächst den Graphen in x-Richtung breiter zoomen. Wechseln Sie in den Spur-Modus und legen Sie eine (schriftliche) Tabelle mit den x-Koordinaten der Hochpunkte an. Die Koordinaten können Sie am unteren Bildschirmrand ablesen. In diesem Beispiel wurden folgende Werte gemessen und in den Listeneditor eingegeben:

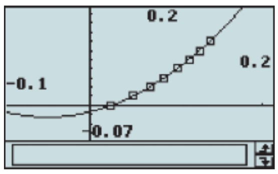


	t	s
1	0.025	0
2	0.05	0.02
3	0.07	0.04
4	0.086	0.06
5	0.101	0.08
6	0.115	0.1
7	0.128	0.12
8	0.139	0.14

Der Nullpunkt der Wegachse wird zunächst (willkürlich) beim ersten Maximum festgelegt. Zwischen den Maxima hat die Leiter jeweils einen Weg von 0,02m zurückgelegt. Mit Hilfe des Regressionsmoduls stellt man fest, dass sich die Weg-Zeit-Abhängigkeit gut durch eine quadratische Funktion beschreiben lässt.







Im Zusammenhang mit dem Thema „Quadratische Funktionen“ kann man (zunächst) auch auf die Regression verzichten und eine Parabel durch drei geeignete Punkte bestimmen. Für den ersten, vierten und achten Messwert ergibt sich so die Gleichung
$y = 4{,}61x^2 + 0{,}47x - 0{,}01$.
Interessant ist es auch, die Lage des Scheitelpunktes zu ermitteln und dessen Koordinaten im Zusammenhang mit dem Experiment zu deuten. In der Analysis bietet es sich an, die Änderungsraten (Geschwindigkeit) zu untersuchen, und in der Physik können die Koeffizienten a, b und c interpretiert werden.

3 Download unter http://edu.casio.com/

EPM – eine neue Prüfungsform in Frankreich

Autor: Karl Tschacher, Universität Erlangen-Nürnberg

Die EPM[3] – épreuve pratique de mathématiques – ist eine neue Form der „praktischen“ Abiturprüfung im Fach Mathematik in Frankreich, die sich zurzeit in der Testphase befindet und ab dem Schuljahr 2009/2010 eingeführt werden soll. Die Aufgabenstellung erfordert den Einsatz und die Verwendung neuer Technologien. Die EPM soll zusätzlich zur zentralen Abschlussprüfung durchgeführt werden und 60 Minuten dauern. Die Lehrer wählen aufgrund der technischen Möglichkeiten an der Schule und dem zuvor gehaltenen Unterricht angemessene Aufgaben aus den Ministeriumsvorschlägen aus. Je ein Lehrer prüft vier Schüler, z.B. im Medienraum, die ihm während der Prüfung die geforderten Zwischenergebnisse mitteilen. Die Gewichtung soll ein Fünftel der Gesamtnote in Mathematik betragen. Diese Art der praktischen Prüfung wird in Physik und Biologie bereits praktiziert.

Zu jeder Aufgabe wird folgendes Material zur Verfügung gestellt:

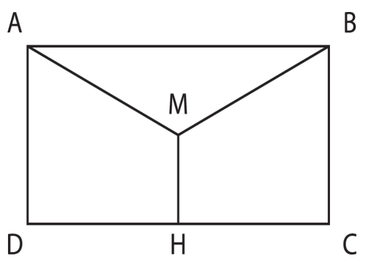
- Beschreibung der Aufgabe im Kontext.
- Schülerbogen mit Aufgabenstellung.
- Lehrerbogen mit Lernzielen, Anspruch des Einsatzes der neuen Technologien und Hinweisen zur Art und Weise der Schülerrückmeldungen während der Prüfung.
- Bewertungsbogen (liegt dem Schülerbogen bei).

Beispiel für einen Schülerbogen:

Optimierungsproblem

(Aufgabe 003, EPM 2006/07[4])

Ein System zum Auffangen des Regenwassers soll an einer rechteckigen Fassade eines Hauses installiert werden. Zwei Rohre sollen das aufgefangene Regenwasser in ein vertikal ausgerichtetes Rohr weiterleiten. Von dort wird das Wasser in eine Zisterne geleitet.
Die Abbildung zeigt eine Skizze der Fassade:



Abmessungen (in Metern): $\overline{AB} = 10$; $\overline{BC} = 6$
$\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ stellen die schrägen Auffangrohre dar, $\overline{MH}$ stellt das vertikale Rohr dar. $\overline{MH}$ ist die Mittelsenkrechte von $\overline{DC}$.

Ziel ist es, eine Position für den Punkt M auf der Fassade zu finden, bei dem die Länge der Rohre minimal ist.
Q sei die orthogonale Projektion von M auf $\overline{BC}$ und θ sei der im Bogenmaß angegebene Winkel $\angle$BMQ.

1. (a) Nutzen Sie eine dynamische Geometriesoftware, um die beschriebene Situation zu simulieren.
   (b) Bestimmen Sie damit einen Wert für θ (auf Hundertstel genau), bei dem die Länge der Rohre minimal wird. Geben Sie die minimale Gesamtlänge an (auf Hundertstel genau).
   Rufen Sie den Prüfer zur Kontrolle der Konstruktion und der gefundenen Ergebnisse.

2. Die Funktion g wird definiert durch

$$g : \theta \rightarrow g(\theta) = 2\overline{MA} + \overline{MH} \text{ mit } \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

   (a) Als g’ wird die Ableitungsfunktion von g bezeichnet. Zeigen Sie, dass gilt:

$$g'(\theta) = 5\frac{2\sin\theta - 1}{(\cos\theta)^2}$$

   (b) Bestimmen Sie den exakten Wert von θ, bei dem die Länge der Rohre minimal ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem bei 1b gefundenen Wert.

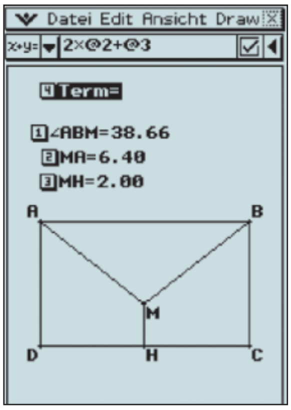
Lösungsvorschlag mit dem ClassPad 330[5]:

1. (a) Öffnen der Geometrie-Anwendung

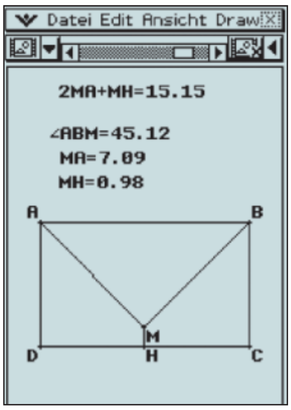
Zunächst werden die Punkte A(0/6), B(10/6), C(10/0) und D(0/0) und die Verbindungsstrecken konstruiert, dann die Mittelpunkte H und E der Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$; anschließend wird M auf $\overline{EH}$ gelegt und die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ eingezeichnet.

Animation: Auswahl des Punktes M und der Strecke $\overline{EH}$: Edit/Animieren/Animation hinzufügen. Die Animation soll 50 Schritte durchlaufen: Edit/Animieren/Animation bearbeiten.
Um die Konstruktion der Planungsskizze anzupassen, wird der Punkt E und die Strecke $\overline{EH}$ ausgeblendet und die Strecke $\overline{MH}$ eingezeichnet.

1. (b) Der Winkel $\angle$ABM ist zum Winkel $\angle$BMQ kongruent: Es ist nicht nötig, den Punkt Q zu konstruieren. Messen des Winkels $\angle$ABM und der Längen von $\overline{MA}$ und $\overline{MH}$. Anschließend wird die Gesamtlänge der Rohre ($2\overline{MA} + \overline{MH}$) berechnet mit Draw/Formelterm:



Das Animationsmenü wird geöffnet (Ansicht/UI-Animation). Die Animation kann nun automatisch oder manuell durchgeführt werden. Bei jedem Schritt werden die gemessenen Werte aktualisiert. Dies gibt einen ersten Eindruck davon, wie die Länge $2\overline{MA} + \overline{MH}$ vom Winkel θ abhängt.



3 Vgl. Ausführliche Dokumentation der EPM, http://media.education.gouv.fr/file/98/3/4983.pdf
4 Vgl. Aufgaben (2006/07), http://eduscol.education.fr/D1115/epr_pratique_presentation.htm
5 Vgl. Ferrard, Jean-Michel, www.mathprepa.fr/ unter „New Bac S“.

Fortsetzung: Aufgabenbeispiel für den ClassPad

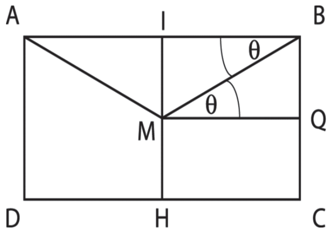
Bei der schrittweisen Durchführung der Animation stellt man schnell fest, dass das Minimum der Länge von $2\overline{MA} + \overline{MH}$ etwa bei 14,66m liegt. Das entspricht dem Winkel $\theta = 30°$ (im Bogenmaß $\frac{\pi}{6}$).

2. Sei $g(\theta) = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MH} = 2\overline{MA} + \overline{MH}$

Es gilt: $\overline{MA} = \overline{MB} = \dfrac{\overline{BI}}{\cos\theta} = \dfrac{5}{\cos\theta}$

Ebenso gilt: $\overline{MH} = \overline{IH} - \overline{IM} = \overline{IH} - \tan\theta$

Daraus folgt: $\overline{MH} = 6 - 5\tan\theta$



Somit gilt: $g(\theta) = \dfrac{10}{\cos\theta} + 6 - 5\tan\theta$

Daraus folgt:

$$g'(\theta) = \frac{10\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{5}{\cos^2\theta} = 5\frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}$$

Der Winkel θ variiert von 0 bis θ_0 im Intervall $]0;\frac{\pi}{2}[$, definiert durch

$$\tan\theta_0 = \frac{CB}{CH} = \frac{6}{5} \Rightarrow \theta_0 \approx 50°$$

$g(\theta)$ ist streng monoton fallend im Intervall $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$ und streng monoton steigend im Intervall $\left[\dfrac{\pi}{6};\theta_0\right]$.

Das Minimum von g wird erreicht bei $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ und entspricht

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{20}{\sqrt{3}} + 6 - \frac{5}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} + 6 \approx 14{,}66$$

Materialtipp

Service-CD (ISBN 978-3-12-733124) mit Material für den ClassPad zum Lambacher Schweizer, Gesamtband Oberstufe mit CAS, Ausgabe B, Ernst-Klett-Verlag, Stuttgart, ISBN 978-3-12-733120-2.

Kolumne

Rückblick auf das Jahr der Mathematik

Autor: Dietrich „Piano“ Paul

Das Jahr der Mathematik ist vorbei. Es bot sehr viele und meist auch sehr schöne „Mathe-ist-ganz-ganz-toll“-Veranstaltungen (die auch manchmal ein eher defensives „Mathe-ist-doch-eigentlich-gar-nicht-soo-schrecklich-Image“ vermittelten). Aber, egal ob toll oder gar nicht so schrecklich: Dieses Jahr werden unsere Kinder jedenfalls alle um eine Notenstufe besser abschneiden, sozusagen

$N_{09} : N_{08} - 1$ $(2 \leq N_{08} \leq 6)$.

(Was allerdings, um die 1er-Schüler von 2008 nicht zu benachteiligen und um die eherne Normalverteilung zu wahren, kraft eines kulturministeriellen Erlasses der Art $N_{09} = N_{09} - 1$ auch wieder kassiert werden könnte.) Und die Erstsemester-Vorlesungen unserer mathematischen Fakultäten werden total überlaufen sein!

Oder auch nicht. So verkündete eine Münchner Tageszeitung im letzten Juni, zur Hochzeit des Jahres der Mathematik, fröhlich (und nicht irgendwo im Text versteckt, sondern an prominenter Stelle, groß und fett gedruckt): Die Fläche des Englischen Gartens beträgt 3,4 Quadratmeter.

Was predigt man als Mathe-Lehrer seinen Schülern von der 5ten bis zur 12ten? Bevor du etwas hinschreibst, prüfe, ob die Größenordnung plausibel ist! Und 3,4 Quadratmeter sind definitiv unplausibel. Selbst wenn man nicht weiß, dass der Münchner Englische Garten ein wunderschöner kilometerlanger Park parallel zur Isar ist (was man als Redakteur einer Münchner Zeitung wissen sollte), wären 3,4 Quadratmeter sogar als Vorgarten eines englischen Reihenhäuschens etwas eng um die Hüften. Aber solche Fehlleistungen haben durchaus Unterhaltungswert.

A propos: Eine andere Münchner Zeitung hat jetzt den typischen TU-Studenten als doofen langweiligen Streber kreiert, mit Igelhaarschnitt, im weißen Hemd mit frisch gestärktem Kragen und mit Geodreieck in der Brusttasche. Ob das die Erstsemester-Vorlesungen im Fach Mathematik zum Überlaufen bringt? Und: Was sagt eigentlich das neue Anti-Diskriminierungsgesetz zu solchen Darstellungen gesellschaftlicher Gruppen wie Mathematikern, Lehrern oder gar Mathematik-Lehrern? Wobei – im Spielfilm scheinen Mathematiker zurzeit etwas besser wegzukommen: Herrschte hier oft das Bild eines Piet-Klocke-mäßigen nervigen Trottels vor, gibt es nun Spielfilme mit einem Mathematiker als Helden – wie „A beautiful mind“ und „Der Beweis“. Beide Mathematiker waren zwar verrückt. Aber immerhin wurden sie nicht von Piet Klocke gespielt. Und das ist doch schon mal echt positiv!

Dr. Dietrich „Piano“ Paul promovierte in Mathematik an der TU in München.

Lehrer Spezial

Nutzen Sie die Möglichkeiten des Internets und entdecken Sie im Lehrer Spezial interessante Themen und spannende Aufgaben mit Praxisbezug, die Ihren Mathematikunterricht bereichern.

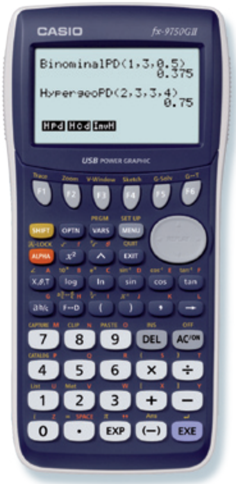
Mehr im Lehrer Spezial unter:
www.casio-schulrechner.de/de/lehrerspezial/

Produktneuheiten

Neue Grafikrechner FX-9860GII (SD) und FX-9750GII

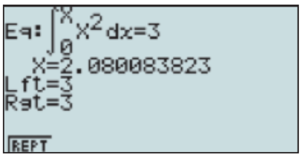
Die neuen Grafikrechner FX-9860GII (SD) und FX-9750GII führen das Konzept der Rechnerserien FX-9860G bzw. FX-9750G/CFX-9850G fort und verfügen über folgende zusätzliche mathematische Funktionalitäten (u.a.):

RUN-MAT-Anwendung:
Rref-Befehl zur Diagonalisierung von Matrizen, Befehle für Wahrscheinlichkeitsverteilungen, z.B.:



Statistik-Anwendung:
Grafische Darstellung des Kreis- und Stabdiagramms

Gleichungslöser-Anwendung:
Integral-, Differential- und Wahrscheinlichkeitsfunktionen, z.B.:



Display:
Natürliches Display auch in der Ergebniszeile (nur FX-9860GII (SD)), z.B.:

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware für den ClassPad Manager und den FX-9860G (Slim) Manager PLUS stehen zum kostenlosen Herunterladen auf der Internetseite

www.casio-schulrechner.de/de/downloads/.

Gerät/Software	OS-Version	Neue Funktionen
ClassPad-Serie	3.03	
FX-9860G-Serie	1.05 / 1.11	
	2.0 (ab Mai 2009)	Mathematische Funktionalitäten des FX-9860GII (SD) (vgl. oben)

Stand: Februar 2009

Internet

Aktuelle Informationen zu Produkten, Neuheiten und Supportangeboten finden Sie auf unserer Webseite zum Thema Schul- und Grafikrechner. Hier können Sie sich auch für den Lehrernewsletter von CASIO registrieren.

Besuchen Sie uns unter:
www.casio-schulrechner.de

Lehrersupport

Das CASIO Supportangebot für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational-Team umfassend bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm
- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur

Impressum

Herausgeber
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535
www.casio-schulrechner.de

Redaktion
Gerhard Glas, Andreas Gruner und Marianne Schubert
CASIO Educational Team
education@casio.de

Design
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, Hamburg

109SGR-FORUM6