

## Von der Zählweise beim Tennis

Die meisten Menschen haben im Fernsehen schon einmal die Übertragung eines Tennis-Matches verfolgt. Die Spannung, wenn wenige Punkte über Sieg oder Niederlage entscheiden, kann der Zuschauer leicht nachvollziehen. Viel schwieriger nachzuvollziehen ist die Zählweise beim Tennis - und das nicht nur auf Grund der meist englischen Ansagen.

Grundsätzlich sollte man verstehen, dass die Spieler beim Tennis erst versuchen ein Spiel (engl. Game) zu gewinnen. Der Gewinn von sechs oder mehr Spielen führt zum Gewinn eines Satzes (Set). Wer mehrere Sätze gewonnen hat, der kann ein Match - beispielsweise ein Turnierspiel - für sich entscheiden: Game, Set and Match.

Auch die Zählweise im einzelnen Spiel ist kompliziert, es wird nämlich abwechselnd der Spielstand desjenigen Spielers zuerst genannt, der in diesem Spiel aufschlägt. Gewonnene Punkte werden nicht einfach gezählt, sondern mit fünfzehn (Fifteen) bewertet. Wer viermal fünfzehn, also sechzig hat, der gewinnt ein Spiel. Dies gilt aber nur dann, wenn der Gegner zwei Punkte oder mehr in Rückstand ist.

Was das Nachvollziehen des Spielstandes zusätzlich kompliziert macht, ist, dass der Spielstand nach drei gewonnen Punkten nicht „Fünfundvierzig“ genannt wird, sondern – vielleicht aus Atemnot historischer Spieler – abkürzend Vierzig (Forty) heißt. Eine weitere Besonderheit ist, dass man null Punkte nicht „Zero“ nennt, sondern „Love“ (!).

Im einfachsten Fall gewinnt ein Spieler das Spiel zu Null. Was passiert aber, wenn beiden Spielern nur noch ein Punkt fehlt? Die Antwort ist einfach: Das Spiel geht so lange weiter, bis ein Spieler zwei Punkte Vorsprung hat und somit das Spiel gewinnt.

Punktgewinn für	Einfache Zählweise	Tennis-Zählweise	Englische Zählweise
	0-0	0-0	
Spieler 1	1-0	15-0	Fifteen-Love
Spieler 2	1-1	15-15	Fifteen all
Spieler 1	2-1	30-15	Thirty-Fifteen
Spieler 1	3-1	40-15	Forty-Fifteen
Spieler 2	3-2	40-30	Forty-Thirty
Spieler 2	3-3	40-40/ Einstand	Deuce
Spieler 2	3-4	Vorteil Spieler 2	Advantage „Spieler 2“
Spieler 1	4-4	Einstand	Deuce
Spieler 1	5-4	Vorteil Spieler 1	Advantage „Spieler 1“
Spieler 1	6-4	Spiel	Game „Spieler 1“

### Exemplarischer Verlauf eines Spiels beim Tennis, Spieler 1 schlägt auf

Über die Historie dieser Zählweise ist schon einiges geschrieben worden, daher sei hier nur darauf hingewiesen, dass Experten sich keineswegs einig sind, ob die Zählweise von kleinen Münzen (Wert 15) stammt, die für Wetten benutzt wurden oder von einer Skala an der Platzseite, die es dem erfolgreichen Spieler erlaubte, jeweils 15 Zoll in die Platzmitte vorzurücken.

Der Zweier-Vorsprung gilt nicht nur für einzelne Punkte, sondern auch für Spiele. So gewinnt nur derjenige einen Satz, der sechs Spiele und mindestens zwei mehr gewonnen hat, als sein Gegenüber. Immerhin darf man den Platz als Gewinner verlassen, auch wenn man „nur“ einen Satz mehr gewonnen hat, als der Gegner: Je nach Turnier gewinnt das Match, wer zuerst zwei oder drei Sätze für sich entscheiden konnte.

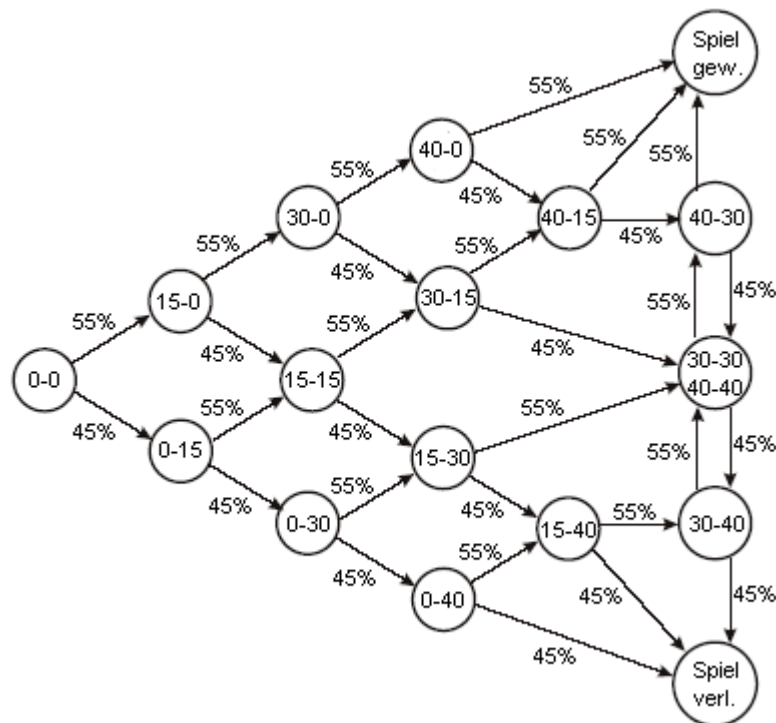
Aus mathematischer Sicht ist diese Zählweise interessant, weil man darüber nachdenken kann, ob diese spezielle Zählweise den Ausgang des Matches beeinflusst.

Um sich dieser Frage zu nähern, stellen wir uns zwei Spieler vor, die fast gleich stark sind und nicht ermüden. Mit gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten gewinnt oder verliert der eine Spieler einzelne Punkte.

Gesetzt den Fall, dass dieser Spieler mit 55% den Punkt gewinnt und mit 45% den Punkt verliert, wäre zu untersuchen, ob er mit gleicher Wahrscheinlichkeit auch das Match gewinnt, oder ob diese Wahrscheinlichkeit auf Grund der Zählweise größer oder kleiner wird.

Vor etwa fünf Jahren konnte man im Internet dazu einen Artikel von Herrn Prof. Jürgen Potthoff, Lehrstuhl für Mathematik, Universität Mannheim finden. Die dort verfolgte Idee lässt sich gut auch mit Schülern bearbeiten, allerdings sind viele Rechnungen sehr aufwendig, wenn man „nur“ mit einem technisch-wissenschaftlichen Rechner arbeitet. Der Einsatz eines grafikfähigen Rechners bietet sich daher an.

In einem Diagramm zeichnet man die möglichen Spielstände auf und ergänzt die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit zu den fünf - ergodisch genannten - Spielständen auf der rechten Seite zu gelangen, lässt sich schon in der Mittelstufe mit Hilfe der Pfadregeln berechnen. Diese Spielstände werden deshalb hervorgehoben, weil man von diesen Spielständen nicht mehr zurück zu den anderen Spielständen kommt.



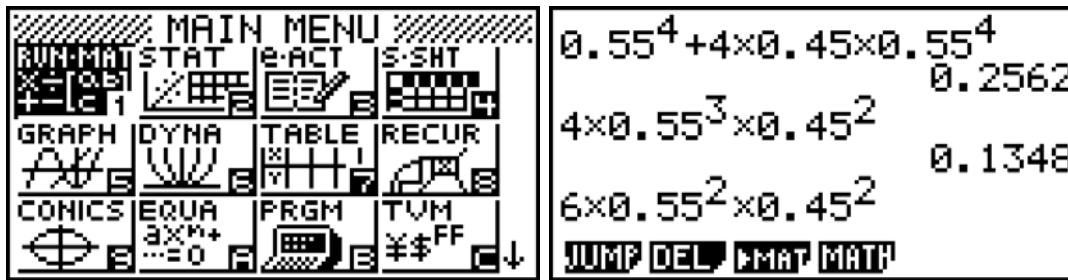
**Baumdiagramm für ein Spiel beim Tennis**

Die Wahrscheinlichkeit  $P_1$ , von „0-0“ zu „Spiel gew.“ zu gelangen, ohne vorher einen anderen ergodischen Zustand zu erreichen, beträgt daher:

$$P_1 = 0,55^4 + 4 \cdot (0,45 \cdot 0,55^4) = 0,2562$$

$P_2$ , die Wahrscheinlichkeit entsprechend zu „40-30“ zu gelangen, beträgt:

$$P_2 = 4 \cdot 0,55^3 \cdot 0,45^2 = 0,256 = 0,1348$$



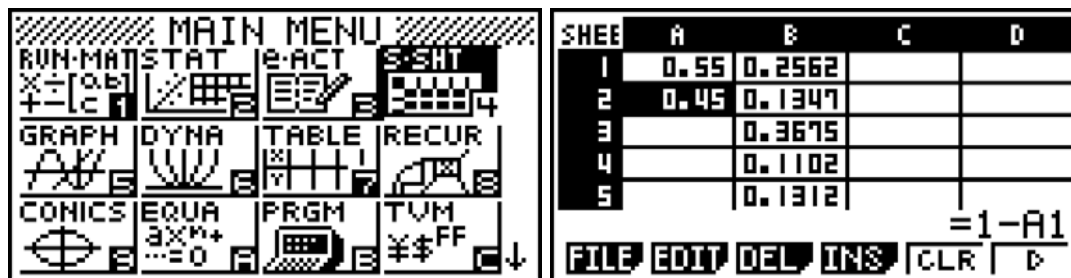
FX-9860GII: Hauptmenü und Berechnungen in der RUN-MAT Anwendung

Als Ergebnis dieser Berechnungen ergibt sich folgende Tabelle:

Spiel gew.	$P_1$	0,2562
40-30	$P_2$	0,1348
30-30	$P_3$	0,3675
30-40	$P_4$	0,1102
Spiel verl.	$P_5$	0,1312

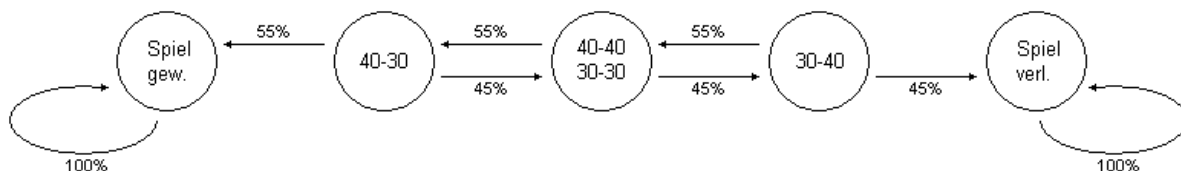
Wahrscheinlichkeiten zum Erreichen der fünf ergodischen Zustände

Im Grafikrechner kann diese Tabelle gut mit Hilfe der Tabellenkalkulation erstellt werden.



FX-9860GII: Hautmenü und Berechnungen in der Tabellenkalkulation S-SHT

Haben die Spieler einen dieser fünf ergodischen Zustände erreicht, so können sie dort theoretisch unendlich lange hin- und herspringen. Praktisch ist es natürlich so, dass die beiden ergodischen Zustände „Spiel gew.“ und „Spiel verl.“ dazu führen, dass das nächste Spiel begonnen wird. Mathematisch ist hier anders als bei den anderen Zuständen die Übergangswahrscheinlichkeit zu einem anderen Zustand gleich 100%. Von den drei anderen ergodischen Zuständen kommt mit jeweils mit 55%, bzw. 45% zu dem Nachbarzustand. Bei einem dieser drei Zustände zu bleiben, ist unmöglich, d.h. die Wahrscheinlichkeit ist 0%.



Markov-Kette der ergodischen Zustände

Die Übergänge zwischen den Zuständen lassen sich in einer Übergangsmatrix anordnen:

von \ nach	Spiel gew.	40-30	40-40	30-40	Spiel verl.
Spiel gew.	1	0	0	0	0
40-30	0,55	0	0,45	0	0
40-40	0	0,55	0	0,45	0
30-40	0	0	0,55	0	0,45
Spiel verl.	0	0	0	0	1

Erläuterte Übergangsmatrix für die ergodischen Zustände

Zu betrachten sind weiter die Wahrscheinlichkeiten ein Spiel zu gewinnen, wenn man sich bei einem der fünf ergodischen Zustände befindet. Zwei dieser Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus dem Sachzusammenhang:

$P_{1,1}$  muss eins, bzw. 100%, sein, da man das Spiel nicht mehr verlieren kann, nachdem es gewonnen wurde.  $P_{1,5}$  muss null sein, da es nicht möglich ist das Spiel noch zu gewinnen, nachdem es verloren wurde. Die weiteren Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit Hilfe der Übergangsmatrix berechnen, denn es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,55 & 0 & 0,45 & 0 & 0 \\ 0 & 0,55 & 0 & 0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0,55 & 0 & 0,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ P_{1,2} \\ P_{1,3} \\ P_{1,4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ P_{1,2} \\ P_{1,3} \\ P_{1,4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit der Übergangsmatrix ergibt keine Änderung

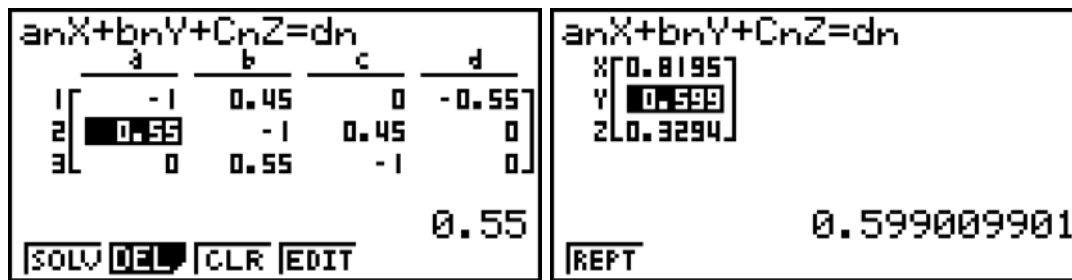
Das resultierende Gleichungssystem mit drei Unbekannten lässt sich mit dem FX-9860GII lösen.

$$\begin{cases} 0.45 \cdot P_{1,3} + 0.55 = P_{1,2} \\ 0.55 \cdot P_{1,2} + 0.45 \cdot P_{1,4} = P_{1,3} \\ 0.55 \cdot P_{1,3} = P_{1,4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \cdot P_{1,2} + 0.45 \cdot P_{1,3} + 0 \cdot P_{1,4} = -0.55 \\ 0.55 \cdot P_{1,2} - 1 \cdot P_{1,3} + 0.45 \cdot P_{1,4} = 0 \\ 0 \cdot P_{1,2} + 0.55 \cdot P_{1,3} - 1 \cdot P_{1,4} = 0 \end{cases}$$

Gleichungssystem zur Eingabe in den Grafikrechner

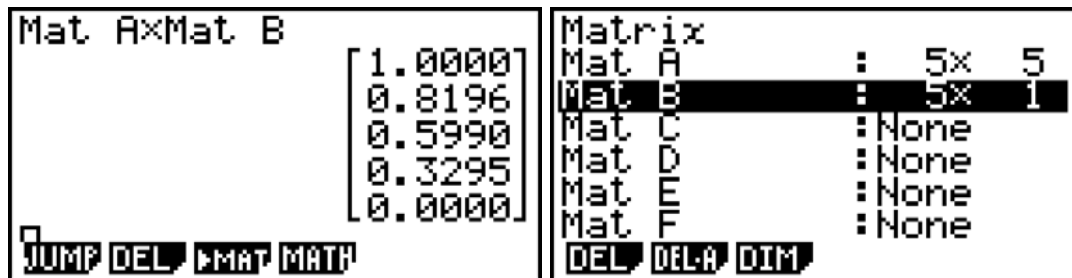


FX-9860GII: Hauptmenü und Auswahlmöglichkeit in der EQUA-Anwendung

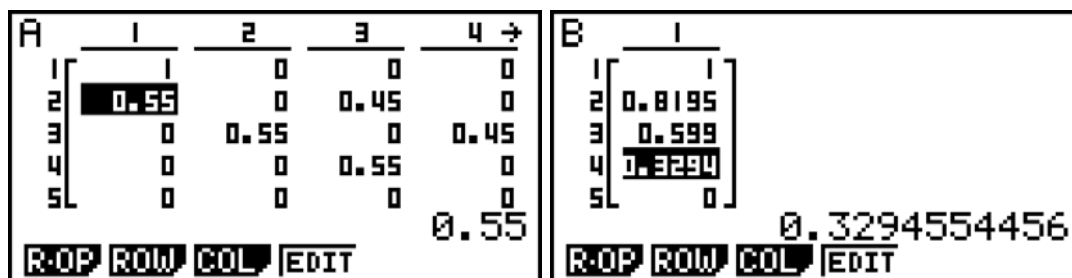


FX-9860GII: Eingabe der Gleichungsmatrix und Lösungsvektor

Natürlich lässt sich mit dem Rechner auch die Matrix/Vektor-Gleichung bestätigen:



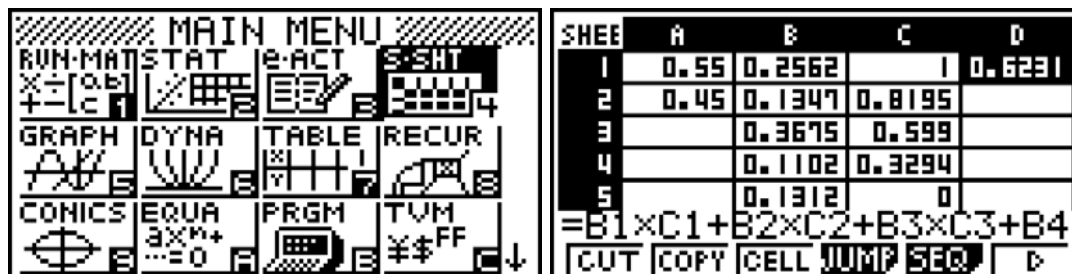
FX-9860GII: Multiplikation von Übergangsmatrix und Lösungsvektor in RUN-MAT, Das Untermenü Mat (F3) dient zur Definition von Matrizen und Vektoren



FX-9860GII: Eingabe der Übergangsmatrix und des Lösungsvektors im Untermenü Mat

Mit Hilfe der gefundenen Wahrscheinlichkeiten  $P_{1,2} = 0,8195$ ,  $P_{1,3} = 0,599$  und  $P_{1,4} = 0,3295$  kann die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Spiels beim Tennis berechnet werden. Sie ist

$$P(\text{Spiel}) = P_1 \cdot P_{1,1} + P_2 \cdot P_{1,2} + P_3 \cdot P_{1,3} + P_4 \cdot P_{1,4} + P_5 \cdot P_{1,5} = 0,6231 = 62,31\%$$



FX-9860GII: Berechnung von P(Spiel) in der Tabellenkalkulation

Entsprechend betrachtet man Satz und Match. Man stellt fest, dass die Wahrscheinlichkeit einen Satz zu gewinnen  $P(\text{Satz}) = 82,2\%$  beträgt, während die Wahrscheinlichkeit, ein Match über drei Gewinnsätze zu gewinnen,  $P(\text{Match}) = 95,7\%$  beträgt. Alles dies unter der gleichbleibenden Wahrscheinlichkeit von 55% einen Punkt zu erzielen.

Betrachtet man nicht nur diese Punktgewinn-Wahrscheinlichkeit  $P(\text{Punkt})$ , sondern auch andere, so gelangt man zu folgender Übersicht.

<b>P(Punkt)</b>	<b>P(Spiel)</b>	<b>P(Satz)</b>	<b>P(Match)</b>
51%	52,5%	57,3%	63,6%
55%	62,3%	82,2%	95,7%
60%	73,6%	96,6%	100%
70%	90,1%	100%	100%

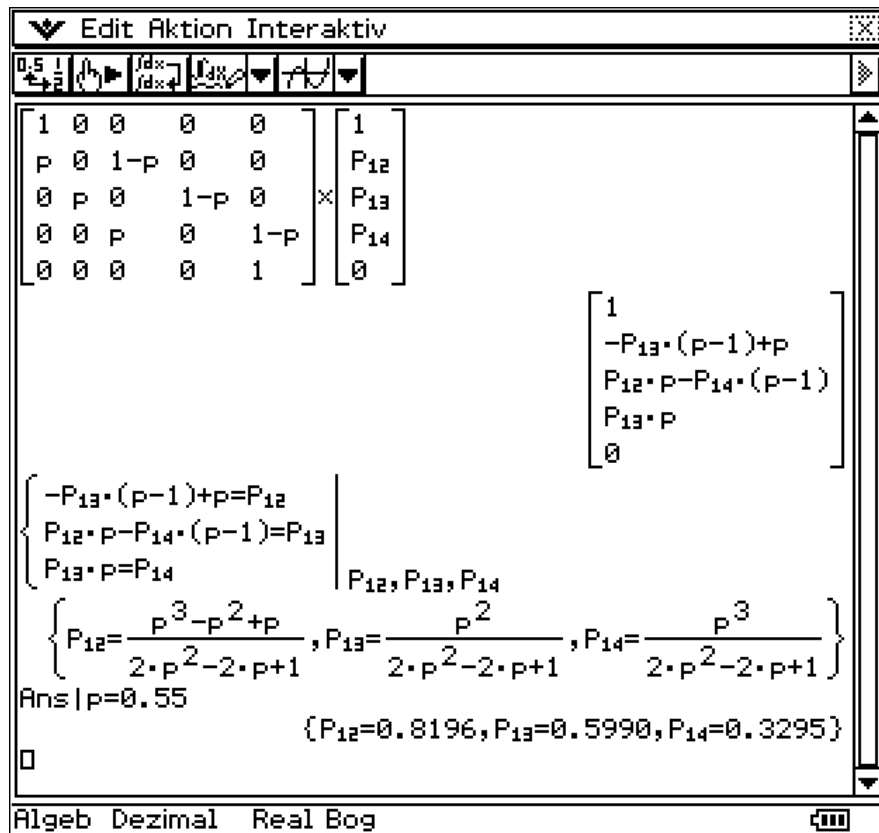
**Übersicht über Gewinn-Wahrscheinlichkeiten beim Tennis  
abhängig von der Wahrscheinlichkeit einen Punkt zu gewinnen**

Die überraschende Folgerung ist, dass die Zählweise beim Tennis den stärkeren Spieler stark bevorzugt. Schon bei einer Punktgewinn-Wahrscheinlichkeit von 55% wird der stärkere Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 96% das Match gewinnen.

In der Realität bleibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler einen Punkt erzielt natürlich nicht konstant. Es wechseln sich starke und schwache Phasen ab, bei eigenem Aufschlag werden zumeist mehr Punkte erzielt, etc.

Trotzdem lässt sich die Spannung bei Tennismatches durch die Mathematik erklären: Sobald ein Spieler etwas stärker als der andere Spieler ist, wird er auf Grund der Zählweise beim Tennis, mehr Spiele gewinnen. Dies ist unabhängig vom Spielstand, so dass Tennis-Matches zu jedem Zeitpunkt noch kippen können. Genau dies macht die Faszination für den Zuschauer aus.

In diesem Beispiel wird mit dem Grafikrechner FX-9860GII gearbeitet. Möchte man das Tennisspiel mit flexiblen Wahrscheinlichkeiten  $P(\text{Punkt})$  untersuchen, könnte man dazu den ClassPad 330 nutzen, der durch das eingebaute Computer-Algebra-System auch mit Variablen rechnen kann.



ClassPad 330: Berechnung des Lösungsvektors allgemein und für  $p = 55\%$