

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – a)

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind.

Aufgabenstellung:

- a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!
- A Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b . Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

Quelle: BMBWF, Nebentermin 1 2017/18 – Mathematik (AHS), Teil 2, Aufgabe 1,
www.srdp.at/downloads/dl/nebentermin-1-201718-mathematik-ahs/

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – a)

The screenshot shows the 'Edit Aktion Interaktiv' window of a Casio calculator. The input field contains the function definition: $f(x) = ax^3 + bx$. Below this, the calculator has performed several operations:

- `done`
- `f(x)` displays $a \cdot x^3 + b \cdot x$. An arrow points to this result with the label 'Kontrollieren'.
- `factor(ans)` displays $x \cdot (a \cdot x^2 + b)$. An arrow points to this result with the label 'Lösung:'.
- `factorOut(a \cdot x^2 + b, a)` displays $a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}\right)$. An arrow points to this result with the label 'Nullstellen bei $x = 0$ und $x^2 + \frac{b}{a} = 0$, somit drei Nullstellen genau dann, wenn $\frac{b}{a} < 0$ '.
- `$\frac{d}{dx}(f(x)) |_{x=0}$` displays b . An arrow points to this result with the label 'Steigung der Tangente an der Stelle 0: b '.

The calculator interface includes a toolbar with icons for fractions, integration, simplification, and differentiation. At the bottom, there are mode selection buttons: 'Algeb', 'Standard', 'Reell', and '2π'.

Kontrollieren

Lösung:

Nullstellen bei $x = 0$ und $x^2 + \frac{b}{a} = 0$,
somit drei Nullstellen genau dann, wenn $\frac{b}{a} < 0$

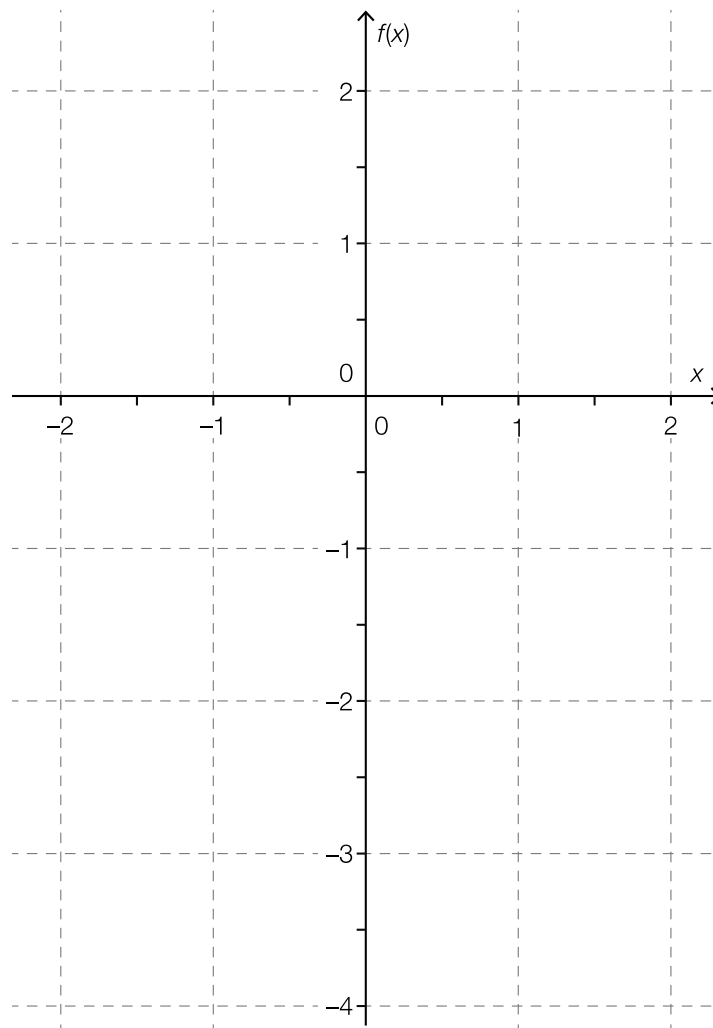
Steigung der Tangente an der Stelle 0: b

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)

b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x) dx = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x) dx = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)



Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)

The screenshot shows a CASIO calculator interface with the following steps and results:

- Input:** $x \cdot (a \cdot x^2 + b)$
- Operation:** `factorOut(a·x2+b, a)`
- Result:** $a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}\right)$
- Operation:** $\frac{d}{dx}(f(x)) |_{x=0}$
- Result:** b
- Operation:** $\int_0^1 f(x) dx$
- Result:** $\frac{a}{4} + \frac{b}{2}$
- Operation:** `solve(ans, a)`
- Result:** $\{a = -2 \cdot b\}$
- Operation:** `f(x) | ans | b=3`
- Result:** $-6 \cdot x^3 + 3 \cdot x$

Lösung:

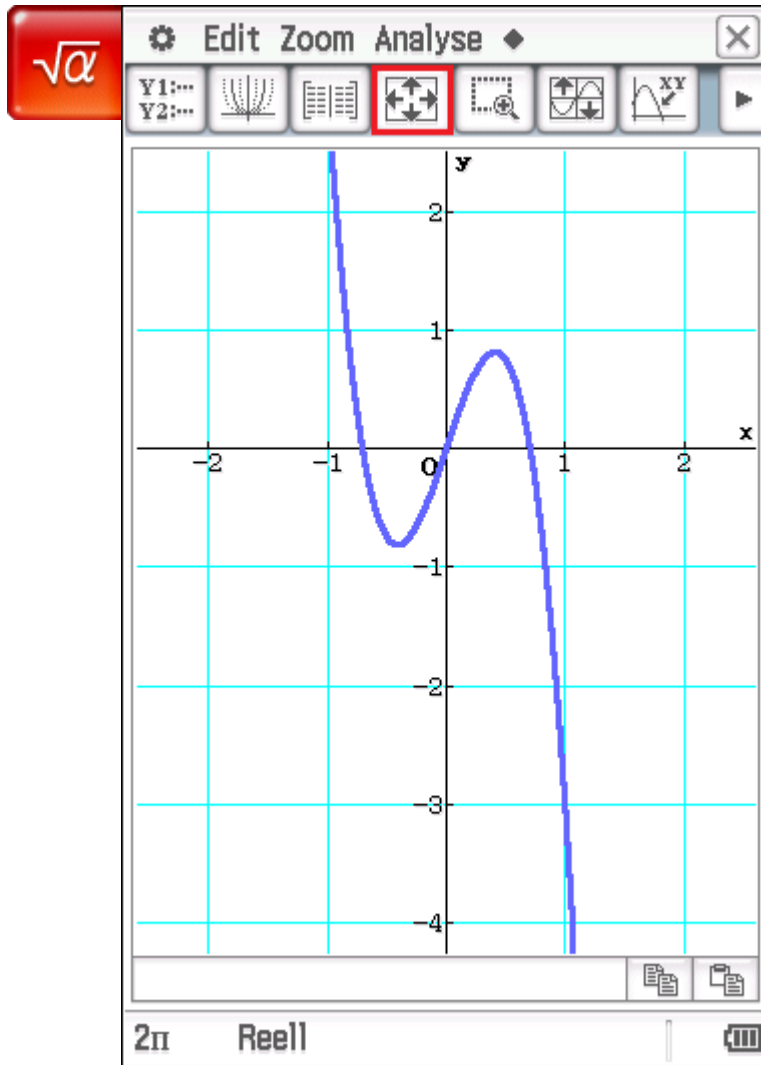
$$a = -2 \cdot b$$


$f(x) \geq 0$ für $x \in [0; 1]$, dann $\int_0^1 f(x) dx > 0$;

$f(x) \leq 0$ für $x \in [0; 1]$, dann $\int_0^1 f(x) dx < 0$;

Also Vorzeichenwechsel von $f(x)$ in $x \in [0; 1]$

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades – b)



Grafikfenster mit  öffnen;

$-6 \cdot x^3 + 3 \cdot x$ in Grafikfenster ziehen;

Grafikfenster mit  anpassen