Kopfübungen

Festigen von Begriffen, Erklärungen und Beweisen

Nachdem in den letzten Ausgaben von CASIO forum in der Rubrik „Kopfübungen“ viele Möglichkeiten geschildert wurden, Rechenfertigkeiten zu trainieren, geht es diesmal um das Festigen von Begriffen, Erklären und Beweisen mit einer Methode, die auch im Unterricht anderer Fächer sehr gut eingesetzt werden kann.

Gerade im Unterricht der Oberstufe werden viele Begriffe verwandt, die sicherlich gut erklärt, aber dann nur für kurze Zeit benutzt werden. Bei der Vorbereitung auf das Abitur oder eine andere Abschlussprüfung heißt es dann: „Was war das denn? Das habe ich längst vergessen!“. Um dem vorzubeugen, wird eine Sammlung von Begriffen, Formeln, Beweisaufträgen und anderen Stichpunkten angelegt. Nach der Behandlung im Unterricht werden diese auf kleinen Karteikarten notiert. Das können Stichworte sein („Flächeninhaltsfunktion“) oder Aufträge („Beweise den Satz des Pythagoras!“). Auch Formeln, deren Bedeutung erläutert und/oder deren Zustandekommen erklärt werden soll („Erkläre die Bedeutung von

$V(x) = 2\pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$“).

Je nach Fachgebiet können diese Kärtchen auch unterschiedliche Farben haben. Um diese Übungen abwechslungsreich zu gestalten, sollte die Sammlung mindestens 20 Kärtchen umfassen. Im Unterricht werden dann regelmäßig Karten gezogen. Einzelne oder kleine Gruppen bereiten sich dann in 5 Minuten auf einen Kurzvortrag vor und halten ihn anschließend vor der Klasse. Die Randbedingungen dafür werden individuell mit der Lerngruppe vereinbart. So kann etwa die Vortragszeit auf eine Minute beschränkt werden oder der Einsatz von Medien geregelt werden. Auf jeden Fall sollte es ein frei gehaltener Vortrag sein. Da es sich um eine Übungssituation handelt, können Rückmeldungen durch das Auditorium spontan oder zu zuvor vereinbarten Aspekten gegeben werden (Inhalt richtig, verständlich, Auftreten, Aussprache, …). Eine Bewertung sollte aber nicht erfolgen, Übungs- und Prüfungssituation würden dadurch nicht klar voneinander getrennt. Wenn auch das Kolloquium trainiert werden soll, können sich noch Nachfragen zum Thema anschließen.

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware für den ClassPad Manager und den FX-Manager stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite:

www.casio-schulrechner.de/de/downloads/

Gerät/Software	OS-Version
ClassPad-Serie	3.06.1000
FX-CG20	1.03
FX-9860GII	2.01

Stand: Dezember 2011

Abonnement

CASIO forum

Gerne senden wir Ihnen das CASIO forum regelmäßig per Post zu! Bitte tragen Sie sich dafür in unseren Adressverteiler ein:

www.casio-schulrechner.de/de/newsletter/

Lehrersupport

Das CASIO Supportangebot für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational-Team umfassend bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur

Impressum

Herausgeber
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535
www.casio-schulrechner.de

Redaktion
Gerhard Glas, Armin Baeger
und Gunther Gageur
CASIO Educational Team
education@casio.de

Design
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, Hamburg

112SGR-FORUM12

CASIO forum

Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 1/2012

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

ob dieser Astronaut seinen Ausflug einfach nur genießt oder gerade ein Problem lösen soll, ist nicht überliefert. Dass Taschenrechner selbst komplizierte Probleme mit großer Leichtigkeit lösen und das sogar im Weltall, ist hingegen bekannt und auf den Seiten 1 bis 7 dokumentiert. Auf Seite 1 könnte dieser Weltraumausflügler erfahren, wie seine Beschleunigung gemessen werden kann, Seite 6 klärt ihn darüber auf, ob sein Medikament gegen Gleichgewichtsstörungen verbessert wurde. Finnische Nachwuchs-Astronauten hingegen üben noch am Parabelflug, wie auf Seite 3 nachzulesen ist. Auf Seite 7 kann er sich über die Sicherheit medizinischer Tests informieren und seine Kopfrechenfähigkeiten verbessern …

Im CASIO forum zeigen Kolleginnen und Kollegen Anregungen und Beispiele für den gewinnbringenden Unterrichtseinsatz unserer Rechner.

Außer diesen pfiffigen Unterrichtsideen finden Sie verschiedene Tipps und Tricks zu unseren Rechnern, zu unserer Literatur und zu Neuigkeiten aus dem Hause CASIO.

Zum Ausprobieren der Beispielaufgaben im Unterricht können Sie unsere Grafikrechner im Klassensatz einschließlich Zubehör kostenlos für vier Wochen ausleihen. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrersupport. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an education@casio.de.

Ihr Redaktionsteam

i.A. CASIO Educational Projects

Messwerterfassung mit dem EA-200

Entdeckungen mit dem Beschleunigungssensor

Autor: Hans-Otto Carmesin,
Gymnasium Athenaeum Stade, Studienseminar Stade

Ein Astronaut im All und der Sensor stellen $a - g = 0$ fest. Sie können aber nicht a oder g einzeln bestimmen. Das ist die Aussage des Einstein‘schen Relativitätsprinzips.

Die Newton'sche Mechanik und unser Kraft- sowie Gleichgewichtssinn scheinen sich oft zu widersprechen. Der Beschleunigungssensor kann das ideal auflösen. So hilft der Beschleunigungssensor beim Verstehen der newtonschen Mechanik, indem er widersprüchliche Wahrnehmungen und Bezeichnungen bewusst sowie umfassend erklärbar macht. Zudem ermöglicht der Sensor viele Entdeckungen auf intuitiver Ebene und zur relativistischen Dynamik.

Sprung vom Tisch

Springen Schüler vom Tisch, so empfinden sie Schwerelosigkeit, der Beschleunigungssensor zeigt $a = 0$, die Digitalkamera dagegen liefert die wahre Beschleunigung $-9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Diesen kognitiven Konflikt lösen die Schüler schrittweise auf: Der Sensor misst stets die im Gleichgewichtssinn wahrgenommene Beschleunigung. In Ruhe liefert er $a = |g|$, obwohl nichts beschleunigt wird, weil die Geschwindigkeit konstant ist. Bei waagerechten Bewegungen misst er den korrekten Wert. Insgesamt zeigt er stets $a_{\text{Tatsächlich}} - g$ an, wobei $g = -9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ nur eine vertikale Komponente hat. Der Sensor entspricht der Wahrnehmung des freien Falls.

Fortsetzung auf Seite 2

Bedienung des Sensors

Zunächst werden der CASIO FX-9860GII oder der ClassPad 330 und der Beschleunigungssensor des Herstellers Vernier (z.B. 3D-BTA) an das Interface EA-200 angeschlossen. Dann wird das Menu E-CON2 aufgerufen. Hier gibt man Setup EA-200 (F1), Wizard (WIZ), VERNIER (F2), Accelerometer, LowG Vertical, 3 (für die Messdauer), sec (für Sekunden), OK (F1), 1 (Start Setup), EXE (Bestätigung der Sensorverbindung), EXE (Start der Messung) ein. Vor dem Unterricht wird die Kalibrierung überprüft: Der Sensor muss $+9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ anzeigen, wenn die Koordinatenachse am Sensor (Pfeil) nach oben zeigt, $-9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ ausgeben, wenn die Achse nach unten zeigt und null bei waagerechter Achse. Beim Springen wird der Sensor mit der Koordinatenachse nach oben vor dem Bauch (Schwerpunkt) festgehalten.

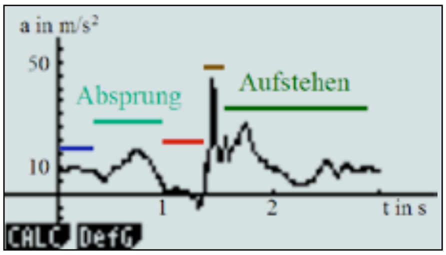


Abb. 1: Sensoranzeige beim Sprung vom Tisch: Vor dem Sprung (blau) wird $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ angezeigt. Beim Absprung (türkis) holt der Springer aus. Während des freien Falls (rot) meldet der Sensor $a = 0$, obwohl der Springer mit $-9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ nach unten beschleunigt wird. Der Aufprall (braun) führt trotz des Abfederns mit den Beinen zu einer Beschleunigung von etwa 4 $|g|$. Beim Aufstehen (grün) pendelt sich allmählich die Ruheanzeige $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ wieder ein.

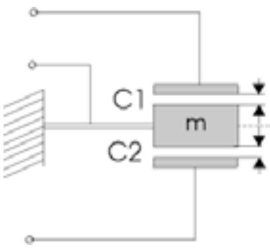


Abb. 2: In einem Beschleunigungssensor deformiert eine Masse m unter dem Einfluss von Kräften oder Trägheitskräften die Aufhängung und verursacht dabei ein elektrisches Signal. Nach diesem Prinzip funktioniert auch der Sensor, der im Auto den Airbag auslöst.

Funktionsweise des Sensors

Der Sensor funktioniert nach dem gleichen Prinzip wie das menschliche Statolithenorgan: Eine Masse m ist an einem elastischen Material befestigt. Unter dem Einfluss einer Kraft (oder Trägheitskraft) F wird das Material verformt und erzeugt dabei eine Anzeige oder die Wahrnehmung der Beschleunigung $a = F/m$. Die Auslenkung erfolgt entgegen einer beschleunigenden Kraft. Daher wird vor dem Absprung durch die Gewichtskraft die Anzeige $-g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ erzeugt. Das Statolithenorgan und der Sensor zeigen im Prinzip das Gleiche an, die Beschleunigung vermindert um die nur vertikal vorhandene Erdbeschleunigung: $a_{Anzeige} = a_{Tatsächlich} - g$.

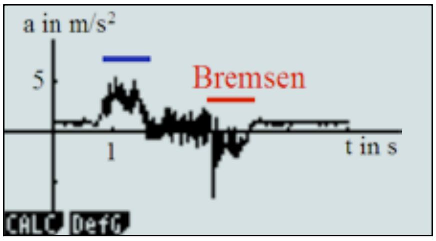


Abb. 3: Beim Anfahren misst der Sensor $a > 0$ (blau), während er beim Bremsen $a < 0$ anzeigt. Dennoch wird beim Anfahren eine Kraft nach hinten subjektiv wahrgenommen.

Anfahren

Wer auf einem anfahrenden Wagen sitzt, nimmt eine nach hinten gerichtete Kraft wahr. Dennoch ist die Beschleunigung $\Delta v/\Delta t$ positiv und auch der Sensor zeigt $a > 0$ an (Abb. 3). Auch das Innenohr meldet $a > 0$. Der Kraftsinn signalisiert eine Kraft nach hinten, weil jeder mit seinen Muskeln verhindert, beim Anfahren nach hinten vom Wagen zu fallen.

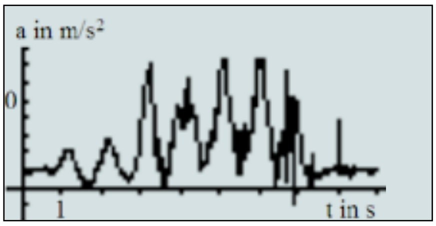


Abb. 4: Der Sensor war in einem geschleuderten Eimer, seine Koordinatenachse zeigte vom Eimerboden weg. Er zeigt $a > 0$ an, also eine Kraft $F = m \cdot a$ zur Drehachse hin.

Schleudern

Beim Schleudern eines Wassereimers bleibt das Wasser im Eimer, selbst wenn die Öffnung nach unten zeigt. Die Vermutung ist, dass das Wasser zum Eimerboden gedrückt werde. Zur Kontrolle wird der Sensor in den Eimer gelegt. Er beweist: Die Beschleunigung und damit die Kraft zeigen nach innen (Abb. 4). Durch Messungen auf einem Karussell kann auch die Beziehung $|a_z| = r \cdot \omega^2$ entdeckt werden.
Die Orientierung, interne Auslenkung und Anzeige des Beschleunigungssensors bei verschiedenen Anwendungen lässt sich in einem Diagramm darstellen (Abb. 5).

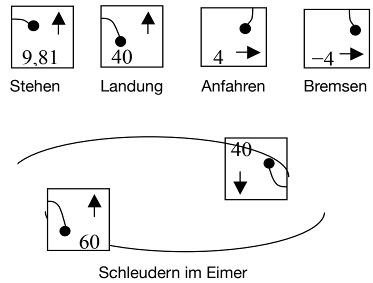


Abb. 5: Der Sensor bei verschiedenen Anwendungen.

Schwerelosigkeit

Ein Astronaut nimmt im All das Gleiche wahr wie der Sensor: $a - g = 0$. Also ist $a = g$. Das Statolithenorgan und der Sensor können offenbar nicht unterscheiden zwischen $a = 0$ und $a = g$. Es ist unmöglich, einen Sensor zu bauen, der die Beschleunigung a separat von der Gravitationsfeldstärke g misst. Diese Unmöglichkeit ist die Aussage des Relativitätsprinzips. Daher bietet der Sensor auch einen guten Einstieg in die allgemeine Relativitätstheorie.

Mit dem Sensor können Geschwindigkeitsänderungen, die Wucht eines Aufpralls, die Dämpfung von Verpackungsmaterialien, die Schutzwirkung von Helmen und vieles mehr untersucht werden.

Literaturtipp

Kurzanleitung zum FX-991DE Plus und Messwerterfassung für den FX-9860GII

Informationen zu den neuen Materialien finden Sie in der Materialdatenbank:
www.casio-schulrechner.de/de/materialdatenbank/

Eine Abituraufgabe aus Finnland

Autor: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

Nach Abschluss einer Gesamtschule können finnische Schülerinnen und Schüler bei erfolgreicher Aufnahmeprüfung eine gymnasiale Oberstufe besuchen und das Abitur ablegen. Die Prüfungsaufgaben werden zentral gestellt und in allen Gymnasien des Landes zeitgleich bearbeitet. Die Abiturprüfung umfasst obligatorisch die Fächer Finnisch, Mathematik, Fremdsprache und ein weiteres geistes- oder naturwissenschaftliches Fach. Folgende Aufgabe stammt aus dem Abitur 2011 für den Aufbaukurs Mathematik (entspricht einem Leistungskurs).

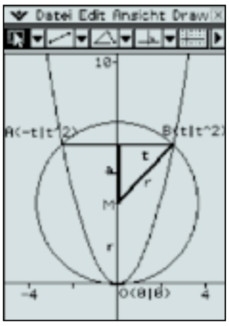
Gegeben ist die Normalparabel $f(x) = x^2$. Die Krümmung der Parabel $y = f(x)$ im Ursprung kann nach Isaac Newton (1642-1727) durch die Circulum-osculans-Methode untersucht werden. Diese Methode basiert auf der Tatsache, dass zu jedem Parameter $t > 0$ ein eindeutiger Kreis existiert, der die Parabel im Punkt O(0|0) berührt und in den Punkten $A(-t|t^2)$ und $B(t|t^2)$ schneidet.

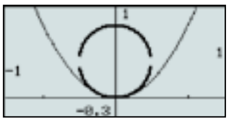
a) Ermitteln Sie den Radius r(t) dieses Kreises in Abhängigkeit vom Parameter t.
b) Berechnen Sie den Grenzwert $r_0 = \lim\limits_{t\to 0} r(t)$ dieser Folge von Radien. Der zugehörige Kreis hat dieselbe Krümmung wie die Parabel am Ursprung.
c) Geben Sie einen Ausdruck für die Funktion g(x) an, deren Graph der Grenzkreis zum oben errechneten Grenzradius ist.
d) Zeigen Sie, dass $g''(0) = f''(0) = \frac{1}{r_0}$ ist. Dieser Wert wird als Krümmung der Parabel im Ursprung bezeichnet.

Lösung:

a) Die Punkte A, B und O bilden ein Dreieck. Der Kreis, auf dem A, B und O liegen, ist der Umkreis des Dreiecks, M sein Mittelpunkt und $r = \overline{MO}$ der Radius (in Abhängigkeit von t). Nun gelten:
(1) $a + r = t^2$ bzw. $a = t^2 - r$ und
(2) $a^2 + r^2 = t^2$.
Somit ergibt sich $(t^2 - r)^2 + t^2 = r^2$.
Für $t \neq 0$ folgt daraus $r(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$.

b) $r_0 = \lim\limits_{t\to 0} r(t) = \frac{1}{2}$





c) Ein Kreis kann beschrieben werden mit der Gleichung $r^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2$, wobei x_M, y_M die Koordinaten seines Mittelpunktes sind. Im vorliegenden Fall sind $r_0 = \frac{1}{2}$ und $M\left(0\,|\,\frac{1}{2}\right)$. Da der Kreis kein Funktionsgraph ist, kann er nicht mit nur einer Funktionsgleichung g(x) dargestellt werden. Ersatzweise ergibt sich ein Kreis aus einem Paar von Wurzelgleichungen: $g_1(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$ bzw. $g_2(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$.

d) Es reicht zu zeigen: $f''(x) = g_2''(x) = \frac{1}{r_0} = 2$

Die 2. Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ ist eine Konstante: $f''(x) = 2$ für alle R. Also $f''(0) = 2$. Die 2. Ableitung von $g_2(x)$ ist deutlich komplexer und rechtfertigt den Einsatz des ClassPad. Es zeigt sich: $g''(0) = 2$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Eine geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$

Autor: Armin Baeger, Kurfürst-Balduin-Gymnasium Münstermaifeld

Üblicherweise lernen Schülerinnen und Schüler in Deutschland das Lösen quadratischer Gleichungen mithilfe algebraischer Verfahren. Ein sehr schönes geometrisches Lösungsverfahren für eine Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ stammt von dem indischen Mathematiker Amir Kumar (A new technique of solving quadratic equations. In: Journal Recreational Mathematics, Vol. 14 (4), 1981-82, p. 266ff). Die zugrunde liegende Konstruktion ist für Schülerinnen und Schüler der 9. Jahrgangsstufe leicht auszuführen:

1. Zeichne im Koordinatensystem die Punkte A (0/1) und B (-p/q).
2. Zeichne über der Strecke $\overline{AB}$ den Thaleskreis.
3. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Beispiel:
Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$. Abb. 1 zeigt die Situation mit den geometrisch gefundenen Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$.

Begründung des Verfahrens (Abb. 2)
1. Von B wird das Lot auf die y-Achse gefällt. Der Lotfußpunkt B'(0/q) liegt auf dem Thaleskreis. Nun gilt nach dem Sehnensatz: $|\overrightarrow{AO}|\ \ |\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{S_1O}|\ \ |\overrightarrow{OS_2}|$, also $1 \cdot (-q) = (-x_1) \cdot x_2$ bzw. $q = x_1 \cdot x_2$. (Satz von Vieta)

2. Der Mittelpunkt M des Thaleskreises hat die Koordinaten M (-0,5p / m_2). Wird das Lot von M auf die x-Achse gefällt, so erhält man den Lotfußpunkt M'(-0,5p/0). Der Lotfußpunkt ist zugleich Mittelpunkt der Strecke $\overline{S_1S_2}$ mit den Koordinaten $(0{,}5\,(x_1 + x_2)\,/\,0)$. Nach Satz von Vieta ist aber $x_1 + x_2 = -p$.

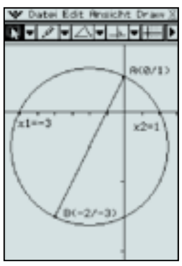


Abb. 1

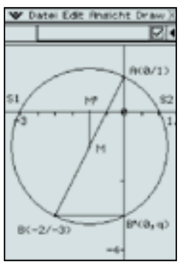
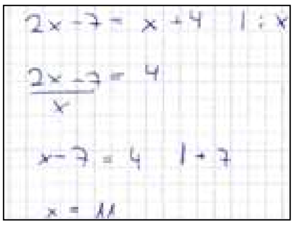


Abb. 2

ClassPad als Algebra-Trainer

Welcher Mathematiklehrer kennt sie nicht, die zwar fantasievollen, aber leider völlig unerlaubten Umformungen beim Lösen von Gleichungen. Man könnte das Problem so beschreiben: Wenn Schüler algebraische Umformungen einüben, dann bilden sich oft einfache Rezepte aus, die bei einer jeweils bestimmten Art von Gleichungen helfen. Die Anzahl und Komplexität der Rezepte wächst anschließend mit der Art der Aufgaben. Die Kunst besteht darin, das passende Rezept für die jeweilige Gleichung zu benutzen. Werden diese Rezepte an der falschen Stelle angewandt, dann wird vielleicht nicht nur die eine Lösung falsch, sondern die Schüler trainieren unbemerkt eine fehlerhafte Umformungsregel ein, die sie noch Jahre später nicht loswerden.



Sie sollten deshalb zur Kontrolle ihre Rezepte mathematisch begründen können. Dabei besteht jedoch die Möglichkeit, dass eine solche Begründung fälschlicherweise auch bei unerlaubten Umformungen gefunden wird. So ist die Gefahr eines eintrainierten Fehlers beispielsweise bei vielleicht aufmerksamen, aber schwächeren Schülern denkbar. Ihre Schwächen können sich auf diese Weise unheilvoll vertiefen und vervielfältigen.

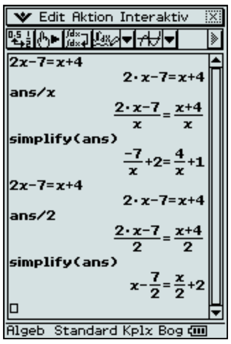
Eine Möglichkeit, hier gegenzusteuern bietet der Einsatz des ClassPads. Mit ihm ist es möglich, Vereinfachungsstrategien zu trainieren und dabei die Wirkung von eingegebenen Fehlern unmittelbar festzustellen. Das ClassPad kann so als geduldiger Algebra-Kontrolleur beim Vereinfachen eingesetzt werden und sogar im Idealfall Anlass für den Schüler sein, seinen fehlerhaften Grundvorstellungen auf die Spur zu kommen.

Dabei kann das ClassPad nicht einfach nur zum Ausprobieren missbraucht werden. Unkluge Eingaben führen auch bei einem Computer-Algebra-System zu komplexeren Gleichungen. Im ClassPad kann die Gleichung außerdem sehr einfach als Schnittpunkt zweier Geraden visualisiert werden.

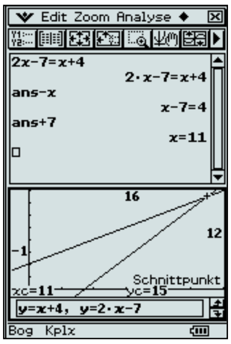
Eine Aufgabe könnte dementsprechend lauten:

Welche Umformungen führen zur Lösung? (Erlaubte Algebra-Befehle: Rechnungen mit Gleichungen, Simplify)

Ausprobieren



Lösung

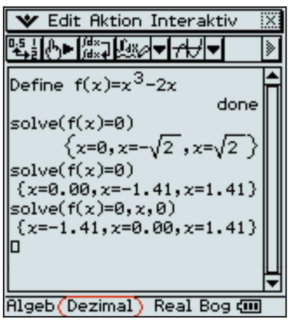


Numerisch lösen und Datenaustausch mit Excel

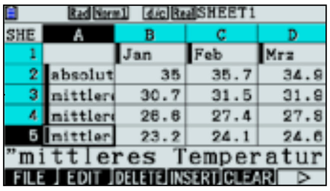
Gleichung im ClassPad numerisch lösen

Wenn das ClassPad länger an einer algebraischen Lösung rechnet, kann es sinnvoll sein, in den Dezimal-Modus zu wechseln, um teilweise numerisch zu lösen. Noch weiter wird ClassPad die Wahl der Mittel erleichtert, wenn die numerische Lösung durch Angabe eines Startwertes für den numerischen Algorithmus direkt angefordert wird: Solve(f(x)=0,x,0).

Dabei ist zu beachten, dass kein numerischer Algorithmus alle Lösungen aller möglichen Arten von Gleichungen finden kann – das ClassPad teilt deshalb nach dem Lösen mit, dass es weitere Lösungen geben könnte.



Daten mit Excel und FX-CG20 austauschen



In manchen Fällen kann es sinnvoll sein, Daten aus Excel in den Grafikrechner zu übertragen oder anders herum eine im Grafikrechner erstellte Tabelle in Excel weiterzubearbeiten. Dies ist mit dem FX-CG20 äußerst leicht geworden.

Zum einen ist es möglich, einen markierten und kopierten Tabellenteil aus Excel in den Grafikrechner-Manager zu übertragen. Dazu muss nur „Tab.Kalk." aufgerufen und mit PASTE (SHIFT, 9) an beliebiger Stelle eingefügt werden. Ebenso kann umgekehrt in „Tab.Kalk." mithilfe von CLIP (SHIFT, 8) und den Cursortasten ein Bereich markiert und mit EDIT, COPY (F1, F2) kopiert werden. Bearbeiten, Einfügen bringt die Tabelle anschließend in ein leeres Excel-Blatt.

Auch das Übertragen von Daten aus dem Manager in den Grafikrechner selber ist möglich: Eine unter „Tab.Kalk." normal abgespeicherte Tabelle muss zunächst im Bereich „Speicher" vom Hauptspeicher mit SELECT, COPY (F1, F2) aus dem Ordner S-SHEET in den Massenspeicher unter ROOT kopiert werden. Dann kann sie wiederum durch Import/Export, Dateien export, SELECT, COPY (F1, F2) im Massenspeicher eines angeschlossenen FX-CG20 abgespeichert werden. Um sie unter „Tab. Kalk." aufrufen zu können, muss sie vorher wiederum vom Massenspeicher in den Hauptspeicher kopiert werden.

Exceltabellen, die nur Daten, aber keinen Text und Formeln enthalten sollen, können sogar direkt von Excel aus auf einen als Wechseldatenträger angeschlossenen FX-CG20 übertragen werden. Speichern Sie dazu mit „Speichern unter" und wählen als Dateityp „CSV (MS DOS)" aus. In „Tab.Kalk." sind sie dort unter FILE, CSV, LOAD zu finden. Gegebenenfalls muss in FILE, CSV, SET das Semikolon als Trennzeichen ausgewählt werden.

Eigene Bilder und Filme mit dem FX-CG20 bearbeiten – eine kleine Einführung in die Bildkonvertierungs-Software von CASIO

Autor: Thomas Hilger, Gymnasium Maria Königin, Lennestadt-Altenhundem

Der neue CASIO FX-CG20 bietet mit seinem hochauflösenden Farbdisplay unter anderem die Möglichkeit, Fotos und Bildsequenzen detailliert zu vermessen und mit mathematischen Werkzeugen zu untersuchen. So lassen sich zum Beispiel Flugbahnen modellieren, Regressionskurven zu Brückenbögen berechnen oder Flächeninhalte von markierten geometrischen Strukturen bestimmen. Erste Erfahrungen mit solchen Bildanalysen kann man mit einer großen Auswahl an geeigneten, bereits vorinstallierten Bildern und Bildsequenzen sammeln. Besonderen Reiz hat allerdings die Erstellung und Verwendung von eigenem Unterrichtsmaterial, welches mit der neuen CASIO Bildkonvertierungs-Software einfach möglich ist.

Softwarevoraussetzungen:

Da bei der Programminstallation die Apple Quicktime-Software vorausgesetzt wird, ist es notwendig, diese vorher zu installieren (http://www.apple.com/de/quicktime/download/). Empfehlenswert ist darüber hinaus die Verwendung eines universellen Konvertierungstools, z. B. „XMedia Recode Portable“ (http://www.xmedia-recode.de/download.html). Mit der portablen Freewareversion lassen sich Filmsequenzen schnell auf das gewünschte Quicktime „mov“-Format bringen. Die meisten anderen Formate werden aber auch ohne dies verstanden.

Arbeitsweise der CASIO Bildkonvertierungs-Software

Wird innerhalb der Software ein Bild geöffnet, so lässt sich dieses sofort auf dem Bildschirm an das Display des FX-CG20 anpassen.

Mit den entsprechenden Werkzeugen rechts und links der Zentralanzeige kann man das Bild zentrieren, verschieben, vergrößern etc. Das Koordinatensystem hilft bei der Feinjustierung. Anschließend wird mit Druck auf den „Konvertieren“-Button die Auflösung angepasst und das Bild ins Format g3p konvertiert.

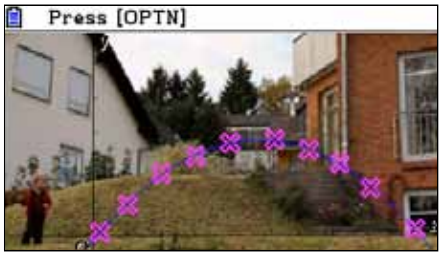
Verbindet man anschließend den FX-CG20 per USB-Kabel mit dem Computer, auf dem sich das fertige Bild befindet, wird der Taschenrechner als USB-Speicherlaufwerk erkannt und man kann dorthin das Bild in einen gewünschten Ordner abspeichern.

Nachdem das Bild in den FX-CG20 geladen wurde, kann das Motiv mathematisch erfasst und anschließend genauer untersucht werden. Das Koordinatensystem lässt sich verschieben, auf den Graphen lassen sich Punkte legen und daraus schließlich eine Regressionskurve berechnen. Darauf basierend lassen sich weitere Fragestellungen entwickeln, wie zum Beispiel: In welchem Abstand vom Jungen (Körpergröße ca. 1 m) trifft der Wasserstrahl etwa auf das Gras?

Bildsequenzen mit der CASIO Bildkonvertierungs-Software

Etwas anders als bei Bildern funktioniert die Bearbeitung von Filmen zu Bildsequenzen.

Dies soll am Beispiel der parabolischen Flugkurve einer Spielzeugrakete (auf dem Zentralbild rechts oben) verdeutlicht werden.
Ziel der Konvertierung ist eine zusammenhängende Sequenz aus ca. 5 bis 10 relevanten Einzelbildern, welche die Software vorher aus den Einzelbildern der Filmsequenz herausgelöst hat. Die Abbildung zeigt den entsprechenden Filmausschnitt, dessen Anfang und Ende man während des Abspielvorgangs durch Drücken der Tasten „Start“ und „Ende“ bestimmt. Am genauesten kann man den Start und das Ende mithilfe der Standbildtasten herausfinden.
Wie bei Einzelbildern auch, lässt sich der Bildausschnitt verändern und anpassen. Die Software passt automatisch alle Bilder der Sequenz mit an. Anschließend wird wieder konvertiert und damit ins FX-CG20 Bildsequenzformat g3b abgespeichert.



Mit dem Taschenrechner kann die Bildsequenz weiter untersucht und der Flug der Rakete nachgezeichnet und berechnet werden.

Checkliste für eigene Bild-/Videoprojekte

Aufnahmesituation

- Aufnahmen sorgfältig planen, Zeit und Geduld mitbringen.
  Ziel (Bild bzw. Bildsequenz für den GTR) nicht aus den Augen verlieren.
- Konturenscharfe Motive bevorzugen, die sich deutlich von der Umgebung abheben.
- Zwischen Motiv und Hintergrund sollte ein hoher Kontrast bestehen.
- Das Motiv bzw. die Motivbewegung sollte im Rechnerdisplay bildfüllend sein.
  (Zoomen oder Aufnahmeposition anpassen)
- Die Lichtverhältnisse sollten so hell wie möglich sein: Sonnenlicht oder geeignetes Kunstlicht von hinten oder schräg von der Seite (Schattenbildung und Spiegelungen vermeiden). Gute Lichtverhältnisse sorgen für eine hohe Motivschärfe.
  Manchmal hilft es, wenn man zusätzlich das Raumlicht einschaltet.
- Stativ oder feste Kameraauflage verwenden. Kameraverwacklungen kann man mit einem Fernauslöser vermeiden.
- Mehrere Kurz- oder Kürzestfilme mit verschiedenen Versuchen anstelle eines Langfilmes anfertigen. Mit dem Konvertierungstool ist die Auswahl sonst entsprechend zeitaufwendig.
- Perspektive beachten. Parabellinien sollten zum Beispiel nur von vorn und zentriert aufgenommen werden.

Konvertierung

Bilder müssen im Format bmp, jpg, jpeg, gif oder png (Dateiendung) vorliegen, Filme im Format avi, mov, mpg, mpeg, mp4 (am besten „Quicktime“ Format), damit sie mit der CASIO Bildkonvertierungs-Software geöffnet werden können.
Eventuell muss vorher umgewandelt werden, damit die Engine das Format versteht.

Ist dieses Medikament besser oder schlechter als meines? – Testen von Hypothesen mit dem CASIO FX-991DE Plus

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Winckelmann-Gymnasium Stendal

Lehrpläne und Bildungsstandards schreiben die Behandlung von Alternativtest und Signifikanztest als einseitigen und zweiseitigen Test vor. Dabei sollen binomialverteilte Zufallsgrößen zugrunde gelegt werden. Bei der Durchführung dieser Tests sind zur Ermittlung der Annahme- oder Ablehnungsbereiche bei gegebener α Irrtumswahrscheinlichkeit Ungleichungen zu lösen.

Es wird vorausgesetzt, dass eine Zufallsgröße X binomialverteilt ist, also

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Nun wird die größte ganze Zahl k_1 oder die kleinste ganze Zahl k_2 derart gesucht, dass bei gegebenem $\alpha < 1$

$P(X\le k_1)\le\alpha$ oder $P(k_2\le X)\le\alpha$ gilt.

Steht für die Binomialverteilung eine Tabelle mit den Werten für

$$B_{n;p}\left(\{0;1;\ldots;k\}\right)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

zur Verfügung, so können k_1 und k_2 mithilfe dieser Tabelle „von innen nach außen" ermittelt werden. Zur Ermittlung von k_2 sind vorher noch die Umformungen

$$P(k_2\le X)=1-P(k_2>X)=1-P(k_2>X)\le\alpha$$

$$P\left(X<k_2\right)\ge 1-\alpha$$

erforderlich.

Fehlt die Tabelle, dann wird die binomialverteilte Zufallsgröße häufig durch eine normalverteilte approximiert. Das geschieht auf der Grundlage der globalen Näherungsformel.

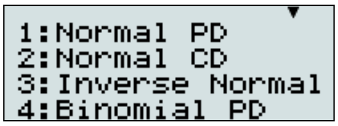
Wenn $n\cdot p\cdot(1-p)>9$, dann gilt

$$P(X\le k)=B_{n;p}\left(\{0;1;\ldots;k\}\right)\approx\Phi\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right)$$

Dieser Lösungsansatz ist erfolgreich, wenn die Ungleichung $\Phi\left(\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}\right)\le\alpha$

gelöst werden kann. Steht eine Tabelle mit Funktionswerten von $\Phi(x)$ zur Verfügung, so kann die Lösung der Ungleichung $\Phi\left(z\right)\le\alpha$ bestimmt und dann die Ungleichung $\frac{k+0,5-\mu}{\sigma}<z$ gelöst werden.

Mithilfe des FX-991DE Plus können die Dichtefunktionswerte $\varphi(x)$, die Funktionswerte $\Phi(x)$ einer Normalverteilung und die Funktionswerte $\Phi^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion einer Normalverteilung berechnet werden. Diese Funktionen werden mit MODE 4 aufgerufen.



Mit 3 wird die Umkehrfunktion von Φ aufgerufen, dann der Wert von α eingegeben und danach können noch die Parameter σ und μ für die Normalverteilung angegeben werden (Hier: σ = 1 und μ = 0). Als $xInv = z_0$ wird die Lösung der Gleichung $\Phi\left(z_0\right)=\alpha$ angezeigt. Zum Schluss wird die Gleichung

$$\frac{X+0,5-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}=z_0$$

mittels SOLVE-Taste gelöst.

Dieser Weg wird durch den Einsatz des Taschenrechners vereinfacht und unabhängig vom Gebrauch einer Tabelle.

Da der FX-991DE Plus eine Auflistung der kumulierten Werte der Binomialverteilung

$$P(X\le k)=B_{n;p}\left(\{0;1;\ldots;k\}\right)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

für beliebige Werte von n, p und k erlaubt, können die Lösungen der Ungleichungen $P(X\le k_1)\le\alpha$ oder $P(k_2\le X)\le\alpha$ immer durch systematisches Probieren gefunden werden, also ohne Approximation.

„Ist das neue Medikament schlechter als das bekannte?"

Angenommen, das bekannte Medikament wirke in 83 % der Fälle, es werden 237 Patienten untersucht und eine Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 3 % angenommen.

Es sei $X\sim B_{237;\,0,83}$. Gesucht ist die größte ganze Zahl k_1, für die $P(X\le k_1)\le 0,03$.

Die Tastenfolge MODE 4 ▼ 1 1 ermöglicht die Erzeugung einer Tabelle von Werten für $P(X\le k)=B_{n;p}\left(\{0;1;\ldots;k\}\right)$. Zunächst verschafft man sich einen Überblick, indem man mit der Tastenfolge

1 7 0 = 1 8 0 = 1 9 0 = 2 0 0 = ▲ = 2 3 7 = 0,8 3

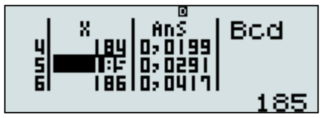
eine Tabelle mit den Werten von $P(X\le k)=B_{237;0,83}\left(\{0;1;\ldots;k\}\right)$

für k = 170, 180, 190, 200 erzeugt.

Da $P(X\le 180)=0,0035$ und $P(X\le 190)=0,142$ beträgt, liegt die gesuchte Zahl k_1 zwischen 180 und 190. Zur Fortsetzung wird nun eingetippt:

AC ▲ ▲ DEL DEL 1 8 1 = 1 8 2 = 1 8 3 = 1 8 4 = 1 8 5 = 1 8 6 = 1 8 7 = 1 8 8 = 1 8 9 = ▲ = = = ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼

Es erscheint



Somit ergibt sich 185 als größte ganze Zahl k_1, für die $P(X\le k_1)=B_{237;0,83}\left(\{0;1;\ldots;k_1\}\right)\le 0,03$.

Wenn bei den befragten Patienten das neue Medikament bei höchstens 185 geholfen hat, dann ist es vermutlich schlechter.

„Ist das neue Medikament besser als das bekannte?"

Jetzt werden 153 Patienten befragt. Es wird angenommen, das Medikament wirke in 92 % der Fälle. Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei diesmal α = 2 %.

Es sei $X\sim B_{153;0,92}$. Gesucht wird die kleinste ganze Zahl k_2, für die $P(X\ge k_2)\le 0,02$.

Die Umformungen

$$P\left(X\ge k_2\right)=1-P\left(X<k_2\right)\le 0,02$$

$$P\left(X<k_2\right)\ge 0,98$$

$$P\left(X\le k_2-1\right)\ge 0,98$$

führen auf eine Ungleichung von der Art, die bereits oben betrachtet wurde.

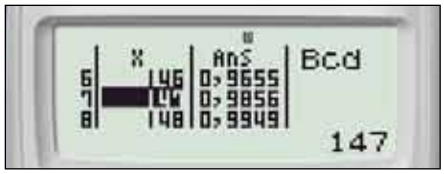
Mittels MODE 4 ▼ 1 1 1 3 0 = 1 4 0 = 1 5 0 = 1 6 0 = ▲ = 1 5 3 = 0,9 2 =

wird eine Tabelle mit den Werten für k = 130, 140, 150, 160 erzeugt. Die gesuchte Zahl muss zwischen 140 und 150 liegen.

Die Tastenfolge

AC 1 4 1 = 1 4 2 = 1 4 3 = 1 4 4 = 1 4 5 = 1 4 6 = 1 4 7 = 1 4 8 = 1 4 9 = ▲ = = = ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▼ ▲

liefert die Anzeige



Daraus ergibt sich k_2 = 148. Wenn also 148 oder mehr Patienten geholfen wurde, dann ist das neue Medikament vermutlich besser.

Der CASIO ClassPad 330 OS V 03.06 erlaubt mit dem Befehl *invBinomialCDf* sogar eine direkte Berechnung von k aus α, n und p. So liefert die Eingabe *invBinomialCDf(0.98,153,0.92)* das Ergebnis 147.

Bedingte Wahrscheinlichkeit mithilfe einer Vierfeldtabelle

Autor: Jürgen Appel, Deutschorden-Gymnasium, Bad Mergentheim

Im G8 in Baden-Württemberg findet man in den Standards 10 in der Leitidee „Daten und Zufall“ bei den verbindlichen Inhalten auch die Unabhängigkeit von Ereignissen.
Um zwei Ereignisse A und B auf deren Unabhängigkeit zu überprüfen, bietet sich unter anderem auch eine Vierfeldtabelle an. Erfahrungsgemäß kommen die Schüler mit einer Vierfeldtabelle mit konkreten Zahlen sehr gut zurecht, um nachzuprüfen, ob $P(A \cap B) \approx P(A) \bullet P(B)$ gilt. Um in der 9. Klasse in diesem Zusammenhang auch auf die bedingten Wahrscheinlichkeiten einzugehen, wurde folgende Aufgabe gestellt.

HIV-Test

Ein Mensch wird positiv auf HIV getestet. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einem HIV-Infizierten positiv ausfällt, beträgt 99,5 %. Bei den Nichtinfizierten fällt der Test zu 99 % negativ aus.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch mit einem positiven Testergebnis auch tatsächlich infiziert ist?

a) In Deutschland (HIV-Rate: ca. 0,1 % der Bevölkerung ist infiziert)
b) In Südafrika (HIV-Rate: ca. 18,1 % der Bevölkerung ist infiziert)
c) Wie hoch müsste die HIV-Rate in einem Land sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mensch mit einem positiven Testergebnis auch tatsächlich infiziert ist, bei 98 % liegt?

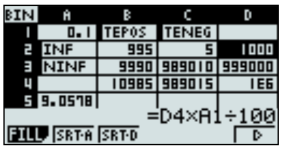
Umsetzung mit dem FX-9860GII in der Klasse 9

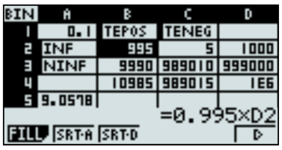
Um alle drei Teilaufgaben mit einer Vierfeldtabelle lösen zu können, bot es sich an, mit einer Tabellenkalkulation zu arbeiten.
Zunächst wurde in die Zelle A1 die HIV-Rate des Landes in Prozent eingetragen. Dann wurden folgende Abkürzungen vereinbart:

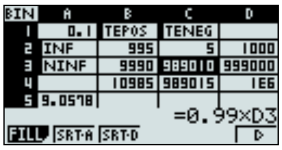
⇨ INF (HIV-Infizierte) bzw. NINF (Nicht mit HIV-Infizierte)
⇨ TEPOS (positiv getestete Personen) bzw. TENEG (negativ getestete Personen).

Um nur natürliche Zahlen zu erhalten, wurde von einer Gesamtpersonenzahl (Zelle D4) von 1.000.000 ausgegangen.
Anschließend wurden die Informationen im Text in die Tabelle eingearbeitet:

⇨ $D3 = D4 \bullet A1 : 100$ und $D2 = D4 - D2$
⇨ $B2 = 0{,}995 \bullet D2$; $B3 = 0{,}01 \bullet D3$ und $B4 = B2 + B3$
⇨ $C2 = D2 - B2$; $C3 = D3 - B3$ und $C4 = C2 + C3$







Danach wurde die bedingte Wahrscheinlichkeit PT(I) berechnet. T = Test ist positiv; I = Person ist mit HIV infiziert

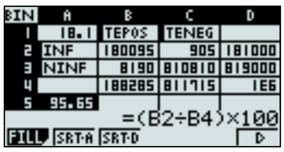
Beim Einsatz in der Klasse 9 wurde bewusst nicht mit dem Satz von Bayes gearbeitet, sondern die Wahrscheinlichkeit direkt als Laplace-Wahrscheinlichkeit in Prozent in der Zelle A5 berechnet: $A5 = (B2 : B4) \bullet 100$

Das Ergebnis $PT(I) \approx 9{,}06\ \%$ verblüffte die Schüler sehr und regte sehr fruchtbare Diskussionen im Unterricht an. Viele Schüler trauten dem Ergebnis nicht: Bei so hohen Prozentzahlen für die Zuverlässigkeit des Tests im Text könne es doch nicht sein, dass nur ca. 9 % der positiv getesteten Personen tatsächlich mit HIV infiziert sind.
Erst nachdem die Teilaufgabe b gelöst war, wurde den meisten Schülern klar, dass in Deutschland wegen der niedrigen HIV-Rate die Anzahl der Nichtinfizierten (D3) ungleich größer ist als die der Infizierten (D2).

Die Teilaufgabe c lösten die Schüler dann, indem sie die HIV-Rate in Zelle A1 so lange variierten, bis die bedingte Wahrscheinlichkeit in Zelle A5 98 % betrug.
Abschließend bleibt zu bemerken, dass diese Aufgabe zwei wichtige Dinge leistet:

1) Die Ergebnisse sind überraschend und regen zum Nachdenken und Begründen an.
2) Mathematik kann auch im Alltag ihren Beitrag leisten, Lebenssituationen besser einschätzen zu lernen.

Und eines haben alle Schüler gelernt. Ein positiver HIV-Test ist noch kein Grund, „den Kopf in den Sand zu stecken“, denn die Teilaufgabe zeigt, dass man auf jeden Fall einen zweiten Test machen lassen sollte.



Produktneuheit

Alternative zu interaktiven Whiteboards – die neuen Projektoren von CASIO mit interaktivem Stift

Lehrfilme zeigen, Grafiken präsentieren sowie medial unterstützte Unterrichtsstunden und Vorlesungen gestalten – das gehört zur modernen Lehre dazu. Die von CASIO entwickelte, quecksilberfreie Laser- und LED-Hybrid-Lichtquelle hat eine Lebensdauer von bis zu 20.000 Stunden. Das bedeutet im Schulbetrieb:

- keine Folgekosten für Lampenwechsel
- keine Wartungsarbeiten
- keine Entsorgung alter Lampen

Interaktiv unterrichten

Mit einem interaktiven Stift können Inhalte über den Computer in Echtzeit 1:1 auf der Präsentationsfläche dargestellt und bedient werden: Einfach an der weißen Wand (oder jeder beliebigen Oberfläche) Ihres Klassenraums.

Tipp: Modelle mit USB-Anschluss können direkt mit den Grafikrechnern der FX-9860G-Serie und dem FX-CG20 verbunden werden. Schritt für Schritt können Schüler so Aufgabenbeispielen in der großformatigen Darstellung der Displayinhalte folgen.

Weitere Informationen finden Sie unter www.casio-projectors.eu/de

Short Throw Serie:
XJ-ST145 & XJ-ST155