CASIO forum
Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 2/2014

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

2014 ist ein spannendes Jahr für den Mathematikunterricht, für manche gar ein Aufregendes. Die Grafikrechnerverpflichtung in Nordrhein-Westfalen kommt nun langsam auch bei den letzten Schulen an, Sachsen-Anhalt setzt mit seinem neuen Lehrplan deutliche Signale in Richtung digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht, während sich immer mehr Bundesländer auf die Zukunft vorbereiten, geht Baden-Württemberg ins letzte Jahrtausend. CASIO bietet für alle Situationen das richtige Werkzeug, wie den neuen FX-87DE Plus, speziell entwickelt auf die Bedürfnisse von Bayern und Baden-Württemberg. Und im vorliegenden CASIO forum gibt es noch viele Tipps für den Einsatz im Unterricht.
Ganz besonders freuen wir uns mit dieser Ausgabe Lehrerinnen und Lehrer aus Österreich begrüßen zu dürfen und schauen gleich einmal in eine Aufgabe der Probeklausur. Zum Einstand haben sie die „Milchtüten“ mitgebracht. Und natürlich wird auch unsere Serie zur Programmierung mit dem ClassPad fortgesetzt.
Wir wünschen Ihnen einen erfolgreichen Start in das neue Schuljahr mit vielen Veränderungen aber auch Möglichkeiten und würden uns freuen wenn Ihnen dieses CASIO forum den Einsatz Ihres Mathematikwerkzeuges ein wenig erleichtert.
Zum Ausprobieren der Beispielaufgaben im Unterricht können Sie unsere Grafikrechner im Klassensatz einschließlich Zubehör für vier Wochen ausleihen – wie immer kostenlos für Sie. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrer und Schule.
Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns!
Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an education@casio.de.

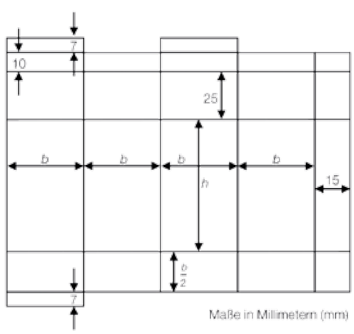
Ihr Redaktionsteam
CASIO Educational Projects

Probeklausur Österreich (BHS), März 2013[1] – Aufgaben mit dem ClassPad II

Milchverpackung

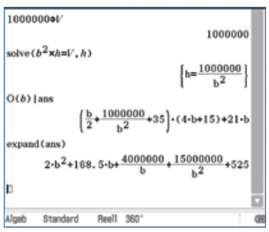
Milch wird in verschiedenen Verpackungen angeboten. Eine Möglichkeit ist ein quaderförmiger Getränkekarton mit Giebel (siehe Abb.). Das Fassungsvermögen bis zur Füllgrenze beträgt genau 1 Liter (L).

a) Der Getränkekarton wird aus folgendem Schnittmuster hergestellt:



Erstellen Sie anhand des Schnittmusters und der angegebenen Füllmenge eine Formel für den Materialverbrauch (ohne Verschnitt) eines Getränkekartons in Abhängigkeit von b. [2 Punkte]

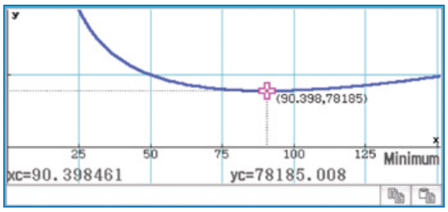
Der Ansatz für die Oberfläche des Getränkekartons in Abhängigkeit von *b* wird als Funktion definiert, damit mit der Formel später weitergearbeitet werden kann. Der Buchstabe „O“ muss dabei aus dem 0-Bereich genommen werden, wenn das k eingeblendet ist. Die Höhe *h* des Getränkekartons taucht hier vorerst als freier Parameter auf.
Die Berechnung der Höhe aus Volumen und Breite erfolgt fast wie auf dem Papier. Zuerst wird dem Volumen *V* ein Wert zugewiesen. Das Auflösen der Volumengleichung eines Quaders nach *h* geschieht mittels der solve-Funktion. Einen eleganten Weg mit diesem Ergebnis weiterzuarbeiten, bietet der sogenannte „with“-Operator (|): Unter dieser Bedingung für *h* folgt aus der Oberflächenfunktion zunächst ein Rohergebnis, bei dem nur einige Terme zusammengefasst sind. Verbliebene Klammern löst die expand-Funktion auf. Mit . werden Dezimalbrüche angezeigt.



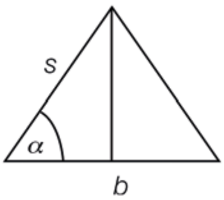
Fortsetzung auf Seite 2

1 Quelle: Bundesinstitut bifie, „Probeklausuren Angewandte Mathematik“, https://www.bifie.at/node/2113

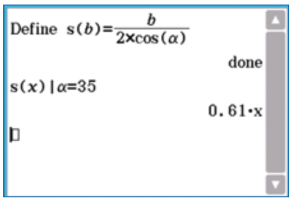
Das Endergebnis lässt sich natürlich auch grafisch darstellen und auswerten. Ein minimaler Materialverbrauch von etwa 782 cm² liegt bei einer Breite von etwa 9,04 cm vor, also recht nahe an einer Würfelform. Bei dem zugrundeliegenden Schnittmuster liegt dieser Wert allerdings außerhalb des Möglichen, da der Getränkekarton oben nicht mehr geschlossen wäre.

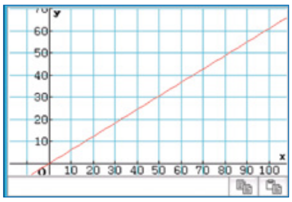


b) Der Materialverbrauch für den Giebel hängt von der Steilheit des Giebels ab.



Geben Sie die Abhängigkeit der Schenkellänge s von der Länge der Seite b an, wenn α konstant ist. [1 Punkt]
Zeichnen Sie die Funktion s in Abhängigkeit von b für α = 35°. [1 Punkt]

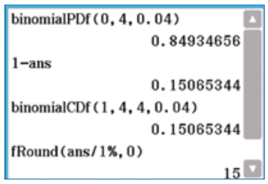




Die Schenkellänge s wird als Funktion von der Seitenlänge b mit dem Parameter α definiert. Bei Funktionsgrafen wird grundsätzlich x als unabhängige Variable verwendet. Die in der linken Abbildung angezeigten zwei Nachkommastellen lassen sich über Grundformat im O-Menü einstellen.

c) Die Milchverpackungen werden maschinell ausgestanzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Maschine eine Milchverpackung korrekt ausstanzt, beträgt laut Hersteller 96 %. Bei einer Qualitätsprüfung der Produktion werden 4 zufällig ausgewählte Milchverpackungen kontrolliert.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den kontrollierten Milchverpackungen mindestens 1 Milchverpackung fehlerhaft ist. [2 Punkte]



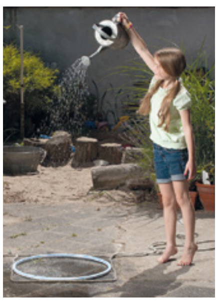
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei $N = 4$ Versuchen bei einer Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$ keine Milchverpackung ($x = 0$) fehlerhaft ist, wird durch die Binomialverteilung binomialPDf $(x;\ N,\ p)$ beschrieben. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $x \neq 0$. Diese lässt sich auch direkt mit der kumulierten Binomialverteilung binomialCDf$(x_u,\ x_o;\ N,\ p)$ berechnen. Das Runden des Endergebnisses auf ganze Prozent kann mit der fRound-Funktion erfolgen.

Eine schöne Alternative bietet für diese Aufgabe die Statistikanwendung, das Ganze menügeführt und mit einblendbarer Hilfe einzugeben.

Statistische Methode mit dem FX-991DE Plus

Kreiszahl Pi

Autor: Dominik Scala, Marienschule Offenbach

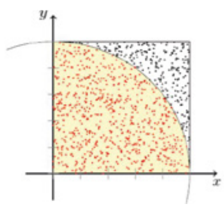


Neben der Bestimmung der Kreiszahl Pi nach Archimedes von Syrakus gibt es weitere Methoden, um Pi zu bestimmen. Eine davon ist die so genannte statistische Methode – ein Monte-Carlo-Algorithmus. Dabei wird dasjenige Viertel des Einheitskreises betrachtet, welches sich innerhalb des Einheitsquadrats des ersten Quadranten des Koordinatensystems befindet. Nun werden zufällig generierte Punkte $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ *auf das Einheitsquadrat geworfen.* Die relative Häufigkeit

$$R = \frac{\text{Treffer im Kreis}}{\text{Treffer im Quadrat}}$$

nähert sich dann gemäß dem Gesetz der Großen Zahlen immer mehr der Trefferwahrscheinlichkeit

$$\frac{\text{Fläche Kreis}}{\text{Fläche Quadrat}} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot r^2}{r^2} = \frac{\pi}{4}$$ an.



Die zufälligen Punkte können mit Hilfe der Randomfunktion des fx-991 generiert werden (SHIFT (,)). Jeweils zwei Zufallszahlen geben ein (x,y)-Paar. Berechnet man die 2-Norm eines solchen Punktes, kann entschieden werden, ob er im oder außerhalb des Kreises liegt.

$$\begin{cases} (x, y) \text{ in Kreis, falls } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ (x, y) \text{ außerhalb von Kreis, sonst} \end{cases}$$

Mit Hilfe der Table-Funktion (MODE 3) kann ohne viel Aufwand eine größere Menge an Zufallspaaren und deren Abstand zum Ursprung generiert werden.

$$f(X) = \sqrt{\text{ran\#}^2 + \text{ran\#}^2}$$

Mit dem Startwert 1, dem Endwert 30 und der Schrittweite 1 können 30 Zufallspunkten und ihre Abstände vom Ursprung generiert werden. Mit Hilfe der Pfeiltasten kann die entstehende Liste rasch durchlaufen werden. Durch Zählen der Einträge mit f(x) >= 1 erhält man die gewünschte relative Häufigkeit. Wiederholt jede(r) Schüler(in) dieses Vorgehen 10 mal erhält man schnell eine Statistik von n=10000 Punkten. Das schwache Gesetz der Großen Zahlen zeigt, welche Abweichung vom wahren Wert von Pi man bei einer solchen Stichprobenmenge erwarten kann:

$$P(|\pi_n - \pi| \geq \epsilon) \leq \frac{\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{n\epsilon^2} \cdot 16 \leq 5\%$$

Das bedeutet, dass bei n=10000 zu einer Wahrscheinlichkeit von 95% die erste Nachkommastelle von Pi mit dem wirklichen Wert übereinstimmen sollte.

Von Veedels- und Winkelzügen

Autor: Rolf Mantyk, Bezirksregierung Düsseldorf – Dezernat 45

Düsseldorf, den 6. April 2014.
Wenn jemand von einem kostümierten Kölner spricht, meint er dann unter den Kölnern einen, der kostümiert ist, oder erkundigt er sich gerade bei einer Gruppe von Kostümierten, ob da jemand aus Köln dabei sei? Oder denkt er gar zufällig an die vielen Narren, die jedes Jahr zum Rosenmontag den Karnevalszug säumen und überlegt sich, wie groß wohl die Wahrscheinlichkeit sei, unter all diesen Menschen jemanden zu treffen, der Kölner und außerdem kostümiert ist?

Die hiermit verbundenen Berechnungen prozentualer Anteile – bei auf den ersten Blick eher diffus anmutenden Verteilungen bestimmter Ausprägungen hinsichtlich verschiedener Merkmale – gehören zu den erwarteten Kompetenzen und inhaltlichen Schwerpunkten des Mathematikunterrichtes bis zum Ende der Einführungsphase.
Der Kernlehrplan für die Sekundarstufe II verweist in diesem Zusammenhang innerhalb der Stochastik auf die so genannten *Bedingten Wahrscheinlichkeiten* inklusive der Verwendung von *Vier-Felder-Tafeln*, um alle hier vorliegenden Beziehungen exakt quantifizieren zu können.
Im Folgenden stellen wir einen Lösungsansatz vor, der die in diesem Kontext beteiligten Grundgesamtheiten, sprich die 100 %-Anteile bzw. die so genannten Grundwerte[2], mit Hilfe von Flächensegmenten modelliert, die im Falle von zwei unterschiedlichen Merkmalen einerseits in einen horizontal orientierten Kontext eingebunden sind, andererseits aber auch vertikal notierten Strukturierungen genügen müssen. Damit gelingt es, die bei der Berechnung verwendeten Vier-Felder-Tafeln als unmittelbare Abstraktionen der involvierten Flächensegmente zu interpretieren bzw. zu verstehen.

Beispiel 1
In Köln findet man am Rosenmontag unter den Karnevalisten bzw. Narren entlang des Zugweges 7mal so viele Touristen wie Einheimische. 80% der Einheimischen tragen ein Kostüm. Darunter versteht man hier im Allgemeinen etwas mehr als eine Pappnase. Dagegen ist nur jeder vierte Tourist – in Köln auch „Imi" genannt – in diesem Sinne kostümiert. Kaum haben wir uns in den Trubel auf der Domplatte gestürzt, winkt uns bereits ein Lappen-Clown entgegen.

Die erste Frage lautet:
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Kölner bzw. ein Imi?

Um die Antwort nachvollziehbar zu formulieren, betrachten wir ein geeignet eingefärbtes Rechteck, vgl. Abbildung 1, wo zunächst nur die Anteile der Kölner, respektive der Imis übersichtlich und horizontal orientiert darstellt sind.

Abbildung 1: Es gibt 7mal so viele Imis wie Kölner

Anschließend ergänzen wir Abbildung 1 hinsichtlich des vertikal orientierten Merkmals Kostümierung durch die Ausprägungen **mit** bzw. **ohne** Kostüm, wobei wir den jeweils vorliegenden Anteil zusätzlich durch die Größe der Segmente illustrieren:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	o	o	o	o
2	m	m	m	m	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	m	m	m	m	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	m	m	m	m	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5	m	m	m	m	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6	m	m	m	m	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
7	m	m	m	m	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
8	m	m	m	m	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

Abbildung 2:
Kölner *Imis*
m = roter Winkel, alle Kostümierten Kölner und Imis
o = alle ohne Kostüm

Offenbar können wir – jetzt, wo sämtliche Anteile bekannt sind – die oben notierte Frage endlich beantworten. Ausschließlich unter den Kostümierten suchen wir nach einem Kölner bzw. nach einem Imi. Die graphische Verdeutlichung der relevanten Grundgesamtheit geschieht dabei weder durch einen vertikalen, noch durch einen horizontalen Streifen. Stattdessen ist eine Kombination beider Darstellungsformen in Gestalt eines roten Winkels (≈ 100 %) angesagt[3].

Wir finden schließlich[4]:

P(Kölner|mit Kostüm ≈ 100 %) =

$\frac{16}{16+35} = \frac{16}{51}$ = 31,37 % bzw.

P(Imi|mit Kostüm ≈ 100 %)

$\frac{35}{16+35} = \frac{35}{51}$ = 68,63%

Entsprechend erhalten wir bezogen auf den blauen Winkel (100 %):

P(Kölner|ohne Kostüm ≈ 100 %) =

$\frac{4}{4+105} = \frac{4}{109}$ = 3,67 % bzw.

P(Imi|ohne Kostüm ≈ 100 %) =

$\frac{105}{4+105} = \frac{105}{109}$ = 96,33 %

Wir haben die betreffende Wahrscheinlichkeit zweifarbig als 31,37 % formatiert, was sich von der zweifarbigen Darstellung für die Wahrscheinlichkeit einen Kostümierten unter den Kölnern (100 %) zu treffen, das heißt: P(Kostümierten|Kölnern ≈ 100 %) = 80 %, farblich offenbar nicht unterscheidet

		mit Kostüm	ohne Kostüm	Summe
	Kölner	4/5		1
7/8	Imis			
		1/4		1
1	Summe			

Abbildung 3: Eingangsdaten für die Vier-Felder-Tafel

Die Ausdifferenzierung aller vorliegenden Situationen allein mithilfe von zwei Farben stößt mitunter an ihre Grenzen. Denn wir notieren sowohl die Wahrscheinlichkeiten

P(Kölner|mit Kostüm) = $P_{\text{mit Kostüm}}$(Kölner), als auch

P(mit Kostüm|Kölner) = $P_{\text{Kölner}}$(mit Kostüm) und die Variante

P(Kölner ∩ Kostümierten) jeweils in derselben Fassung als p%[5].

Damit sind Rückschlüsse von der farblichen Kennzeichnung auf die vorliegende Situation nicht immer eindeutig möglich, weil unter Umständen mehr als zwei Alternativen

2 Im Sinne des 100%-Anteils innerhalb der Prozentrechnung.
3 Die Gesamtheit aller Kostümierten wird in Abbildung 2 durch einen roten Winkel (≈ 100%) symbolisiert.
4 Die Schreibweise „P(Kölner|Kostümiert)" lesen wir als „Wahrscheinlichkeit für einen Kölner *unter der Bedingung*, wir haben einen Kostümierten (≈ 100%) vor uns". Kurz: Das Zeichen „|" lesen wir als „unter der Bedingung", womit wir natürlich explizit die betreffende Grundgesamtheit bzw. den relevanten Grundwert (≈ 100%) ansprechen. De facto reden wir jedoch meistens nur über den *Anteil unter*, etwa in der Form P (*Anteil* der Kölner *unter* den Kostümierten). Daneben verwenden wir Schreibweisen wir P(Kölner|Kostümiert ≈ 100%) bzw. $P_{\text{Kostümiert}}$(Kölner)

Fortsetzung auf Seite 4

vorliegen. Die Frage nach dem Anteil der Kölner unter sämtlichen Narren (100 %) hingegen lässt natürlich nur die Notation p% zu. In einem nächsten Schritt kann man Abbildung 3 leicht weiter ergänzen.

Aus

P(Imis|Narren ≈ 100%) = $\frac{7}{8}$ = 87,5%

ergibt sich:

P(Kölner|Narren ≈ 100%) = $1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$= 12,5%

Innerhalb der Kölner und Imis argumentieren wir nun vertikal im Sinne von:

P(mit Kostüm|Kölner ≈ 100%) = $\frac{4}{5}$ = 80%

führt zu

P(ohne Kostüm|Kölner ≈ 100%) = $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ = 20%

Analog findet sich mit Hilfe von:

P(mit Kostüm|Imi ≈ 100%) = $\frac{1}{4}$ = 25%

der Wert

P(ohne Kostüm|Imi ≈ 100%) = $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ = 75%

Wir relativieren somit die waagerecht notierten (grünen und gelben) Informationen (Merkmal Wohnort) in Hinblick auf ihre senkrecht verbuchten (roten und blauen) Ausdifferenzierungen (Merkmal Kostümierung).

In der 2. Fassung (Abbildung 4) wechseln wir die Perspektive und schauen zuerst auf die vertikalen Unterscheidungen. Zunächst betrachten wir den roten Winkel der Kostümierten. Dabei überlegen wir, wie groß der Anteil der Kölner bzw. der Imis unter sämtlichen Narren (100%) ist, die jeweils kostümiert sind.

Hier ergibt sich z.B. aus dem Anteil der Kölner unter den Karnevalisten (100%), hier $\frac{1}{8}$, und dem Anteil der Kostümierten unter diesen Kölnern (100%), hier $\frac{4}{5}$, der Anteil an Personen unter den Narren (100%), die gleichzeitig Kölner und kostümiert sind. Bei dieser Betrachtungsweise müssen wir zweimal auswählen. Unter allen Narren ≈ 100% fokussieren wir zunächst die Kölner und anschließend unter diesen Kölnern ≈ 100% die Kostümierten. Die Anteile der Anteile berechnen wir durch ihr Produkt.

		mit Kostüm	ohne Kostüm	Summe
1/8	Kölner	4/5	1/5	1
		1/8*4/5	1/8*1/5	
7/8	Imis	7/8*1/4	7/8*3/4	
		1/4	3/4	1
1	Summe			

Abbildung 4: Fassung der Vier-Felder-Tafel

		mit Kostüm	ohne Kostüm	Summe
1/8	Kölner	4/5	1/5	1
		16/160	4/160	
7/8	Imis	35/160	105/160	
		1/4	3/4	1
1	Summe	51/160	109/160	

Abbildung 5: Komplette Fassung der Vier-Felder-Tafel

Das heißt[6]:

P(Kölner mit Kostüm|Narren ≈ 100%) =

$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{160}$ = 10%

bzw.

P(Imis mit Kostüm|Narren ≈ 100%) =

$\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{160}$ = 21,875%

Die mittleren, hier farbig hinterlegten Felder in Abbildung 6 beschreiben demnach nicht nur den tabellarischen Schnitt des waagerecht notierten Merkmals Wohnort mit dem senkrecht angeordneten Merkmal Kostümierung, sondern bilden auch mengentheoretische Schnitte im Sinne von Kölner ∩ Kostümierte.

Die folgenden beiden dezimal notierten Vier-Felder-Tafeln (vgl. Abbildung 6 und Abbildung 7) demonstrieren darüber hinaus die Kommutativität des ∩-Operators, indem sie unter anderem den Anteil (Kostümierte ∩ Kölner) versus (Kölner ∩ Kostümierte) transparent machen. Dabei wurden natürlich die waagerechten und senkrechten Differenzierungen vertauscht.

In exakten Brüchen notiert, erhalten wir selbstverständlich ebenfalls die Gleichheit dieser beiden – auf unterschiedlichen Wegen berechneten – Wahrscheinlichkeiten: Unter allen Narren, die den Zug säumen gilt:

P(unter allen Narren einen Kölner zu treffen, der kostümiert ist) =

$\frac{20}{160}\cdot\frac{16}{20}=\frac{16}{160}$ = 10%

P(unter allen Narren einen Kostümierten zu treffen , der Kölner ist) =

$\frac{51}{160}\cdot\frac{16}{51}=\frac{16}{160}$ = 10%

	mit Kostüm	ohne Kostüm	
0,125	0,8	0,2	1
Kölner	0,1	0,025	
Imis	0,21875	0,65625	
0,875	0,25	0,75	1
1	0,31875	0,68125	1

Abbildung 6: Erste dezimale Fassung

	Kölner	Imis	
0,31875	0,31372549	0,68627451	1
mit Kostüm	0,1	0,21875	
ohne Kostüm	0,025	0,65625	
0,68125	0,03669725	0,963302752	1
1	0,125	0,875	1

Abbildung 7: Zweite dezimale Fassung

Nachdem wir somit sämtliche Beziehungen zwischen zwei voneinander abhängigen Merkmalen anhand der zugehörigen Winkelfelder und den daraus resultierenden Vier-Felder-Tafeln betrachtet haben, lenken wir unseren Blick abschließend auf das Problem von so genannten a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten, die beim wiederholten Testen auf ein bestimmtes Merkmal bzw. seine Ausprägungen hin eine entscheidende Rolle spielen.

Wir betrachten ein medizinisches Testverfahren, das bzgl. einer sehr selten auftretenden Infektionskrankheit mit einer Sicherheit von 99 Prozent korrekte Testergebnisse für bereits Infizierte liefert. Aufgrund von ausgereiften Labortechniken liegt die Fehlerquote bei Gesunden (nicht Infizierten) bei circa 2 Prozent. Andererseits kann man momentan davon ausgehen, dass unter 10 Millionen Menschen ca. 2500 Infizierte vorkommen.

Neben dem Gesundheitszustand mit den Ausprägungen krank (infiziert) und gesund (nicht infiziert) betrachten wir das Merkmal Testergebnis mit den Ausprägungen positiv und negativ.

Wir haben somit die in Abbildung 8 beschriebenen Eingangsdaten vorliegen.

		Positiver Test	Negativer Test
0,0002500	Infiziert	0,9900000	
	gesund		
		0,0200000	

Abbildung 8: Testen auf eine Infektion, Eingangsdaten

Wie weiter oben ausführlich beschrieben, gewinnen wir hieraus:

		Positiver Test	Negativer Test	Summe
0,00.025	Infiziert	0,99	0,01	1
		0,00.024.75	0,00.000.25	
0,99.975	gesund	0,01.999.5	0,97.975.5	
		0,02	0,98	1
1	Summe	0,02.024.25	0,97.975.75	1

Abbildung 9: komplettierte Vier-Felder-Tafel zum Test

Und weiter:

$\frac{0{,}00.024.75}{0{,}02.024.25}=0{,}01.222.675.065$ = 1,223%

als Wahrscheinlichkeit, unter den als positiv Getesteten (100%) einen tatsächlich Infizierten anzutreffen bzw.

5 Korrekter wäre die Notation 100·p%, weil sich damit z.B. aus p=0,25125 der Wert 25,125% ergäbe.
6 Etwas präziser wäre die Notation: P_{Narren}(Kölner mit Kostüm) = P_{Narren}(Kölner ∩ Kostümierten)

$$\frac{0{,}01.999.5}{0{,}02.024.25} = 0{,}98.777.324.94 = 98{,}78\,\%$$

als Wahrscheinlichkeit, unter den als positiv Getesteten (100%) einen Gesunden anzutreffen.

Dies ist natürlich ein ernüchterndes Resultat, zeigt es doch, dass unsere Sicherheit; unter den als positiv Getesteten einen Infizierten durch den Test auch als einen solchen zu erkennen, auf bescheidene 1,223 % angestiegen ist. Vor unserem Test durften wir – in dem zu diesem Zeitpunkt noch wesentlich größeren Testfeld – nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,025 % davon ausgehen, tatsächlich einen Infizierten vor uns zu haben.

P (infiziert|positiver Test) =	0,0122268
P (gesund|positiver Test) =	0,9877732
Testfeld	10000000
davon positiv & infiziert	2475
davon positiv & gesund	199950
Summe	202425

Abbildung 10: Ergebnisse des ersten Tests

Nichtsdestotrotz liegt die Fehlerquote für Gesunde, die irrtümlich als Infizierte klassifiziert wurden, nach dem ersten Test nun bei 98,78 %, was selbstverständlich in dieser Größenordnung weiterhin als wenig akzeptabel erscheint.

Bei einem Testfeld von 10 Millionen Personen (100 %) ergäben sich demnach 202.425 als positiv getestete Personen, wovon allerdings nur 2475 tatsächlich infiziert sind, während der Rest von 199.950 Personen in Wirklichkeit gesund ist. Als Ausweg aus diesem Dilemma bleibt nur die Möglichkeit offen, alle als infiziert klassifizierten Personen, das sind immerhin 202.425, erneut zu testen.

Der zweite Test basiert somit auf folgenden Eingangsdaten:

		Positiver Test	Negativer Test
0,0002500	Infiziert	0,9900000	0,0100000
		0,0121045	0,0001223
0,9877732	gesund	0,0197555	0,9800000
		0,0200000	0,9800000
		0,0318599	0,9801223

Abbildung 11: komplettierte Vier-Felder-Tafel zum 2. Test

Die restlichen Daten lassen sich – wie beim ersten Test dargestellt – entsprechend ergänzen und führen damit zur komplettierten Vier-Felder-Tafel bzgl. des zweiten Tests (vgl. Abbildung 12).

Wir erhalten hieraus:

$$\frac{0{,}00.024.75}{0{,}02.024.25} = 0{,}01.222.675.065 = 37{,}99\,\%$$

als Wahrscheinlichkeit, unter den nun als positiv Getesteten (100%) einen tatsächlich Infizierten anzutreffen bzw.

$$\frac{0{,}01.210.45}{0{,}03.185.99} = 0{,}62.007.21 = 62{,}01\,\%$$

als Wahrscheinlichkeit, unter den als positiv Getesteten (100%) einen Gesunden anzutreffen.

P (infiziert|positiver Test) =	0,3799279
P (gesund|positiver Test) =	0,6200721
Testfeld	202425
davon positiv & infiziert	2450
davon positiv & gesund	3999
Summe	6449

Abb. 13: Ergebnisse des zweiten Tests

Bei dem reduzierten Testfeld von 202.425 Personen (100 %) ergäben sich demnach 6449 als positiv getestete Personen, wovon jetzt 2450 tatsächlich infiziert sind, während der Rest von 3999 Personen gesund ist. Um unsere Sicherheiten weiter zu verbessern, sollten wir in einen dritten Test investieren, indem wir die verbleibenden als infiziert klassifizierten Personen, das sind inzwischen nur noch 6449, erneut testen.

		Positiver Test	Negativer Test
0,3799279	Infiziert	0,9900000	
	gesund		
		0,0200000	

Abb. 14: Eingangsdaten für den dritten Test

		Positiver Test	Negativer Test
0,3799279	Infiziert	0,9900000	0,0100000
		0,3761286	0,0037993
0,6200721	gesund	0,0124014	0,9800000
		0,0200000	0,9800000
		0,3885301	0,9837993

Abb. 15: komplettierte Vier-Felder-Tafel zum 3. Test

P (infiziert|positiver Test) =	0,9680811
P (gesund|positiver Test) =	0,0319189
Testfeld	6449
davon positiv & infiziert	2426
davon positiv & gesund	80
Summe	2506

Abb. 16: Ergebnisse des dritten Tests

Bei dem im dritten Durchgang auf 6449 Personen (100 %) reduzierten Testfeld ergäben sich 2506 als positiv getestete Personen, wovon jetzt 2426 tatsächlich infiziert sind, während der Rest von 80 Personen gesund ist.

Mit der Sicherheit von knapp 3 % für positive, falsche Ergebnisse geben wir uns zufrieden. Nach dem dritten Test ist es also gelungen, 2506 Personen als infiziert einzustufen. Darunter befinden sich nur noch 80 falsche, positive Befunde.

Bei allen drei Testergebnissen liegt die Anzahl der korrekt positiv Getesteten durchgängig bei ca. 2500 Personen und zwar unabhängig vom Umfang des Testfeldes, was ja im ersten Durchgang immerhin ein Volumen von 10 Millionen Personen aufwies. Dagegen ließ sich die Anzahl der fälschlicherweise positiv Getesteten nach jedem Test erheblich eingrenzen. Hier reduzierte sich das Volumen fast dramatisch von 199.950 über 3999 auf letztendlich 80 Personen.

Ergänzende Materialien zur Aufgabe finden Sie in unserer Materialdatenbank unter www.casio-schulrechner.de

Produktvorstellung

FX-87DE Plus

Der neue Standardrechner für Baden-Württemberg und Bayern

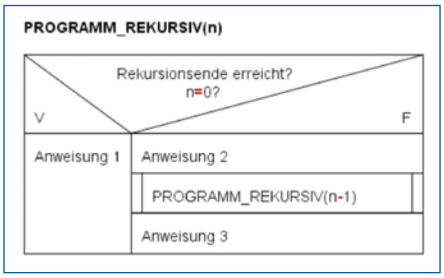
In den neuen Regularien in Baden-Württemberg ist der Einsatz eines Technisch-Wissenschaftlichen Rechners vorgeschrieben. Der Grafikrechner ist nicht mehr länger erlaubt. Obwohl diese Meldung bei nahezu 100 % der Unterrichtenden auf Unverständnis und Ablehnung gestoßen ist, wurde der Erlass des Ministeriums durchgesetzt.
Da die darin formulierten Anforderungen zu diesem Zeitpunkt von keinem im Handel erhältlichen Rechner exakt erfüllt wurden, hat CASIO schnell reagiert und nun das passende Werkzeug: Den FX-87DE Plus.
Basierend auf den erfolgreichen und beliebten Rechnern der DE-Plus Serie bietet „der Neue“ eine vertraute Umgebung und eine einfache Bedienung. Zusätzlich zu unserem bekannten FX-86DE Plus bietet der FX-87DE Plus die Möglichkeit mit Verteilungsfunktionen zu arbeiten, sowohl Variablen- als auch Listenbasiert.
Damit deckt sich der Funktionsumfang des FX-87DE Plus ebenfalls mit den Anforderungen des bayrischen Gymnasiums an einen Technisch-Wissenschaftlichen Rechner.

Rekursives Programmieren

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie mithilfe der Programmiersprache des ClassPad rekursiv programmiert werden kann. Damit wird auch das Verwenden von Unterprogrammen demonstriert.

Das Wesen rekursiver Programmierung besteht in der Erzeugung von Schleifen durch den Selbstaufruf von Funktionen oder Unterprogrammen.
Da in der Programmiersprache des ClassPad das Definieren selbstdefinierter Funktionen nur aus genau einem arithmetischen Ausdruck bestehen darf, ist eine Realisierung von rekursiven Funktionen beim ClassPad nicht möglich. Bleiben also nur rekursive Unterprogramme. Deswegen muss der Weg über rekursive UP gewählt werden.
Das folgende Struktogramm zeigt den Aufbau eines rekursiven Unterprogramms.



Wird angenommen, dass der Aufruf dieses Unterprogramms vom Hauptprogramm durch den Befehl *PROGRAMM_REKURSIV(2)* erfolgt, dann wird folgendes geschehen:

- Da das Rekursionsende noch nicht erreicht ist, wird die Anweisung 2 ausgeführt;
- es erfolgt der Aufruf *PROGRAMM_REKURSIV(1)*;
- die noch nicht ausgeführte Anweisung 3 wird in einem Stapelspeicher (Stack) abgelegt.
- Da das Rekursionsende noch nicht erreicht ist, wird die Anweisung 2 ausgeführt;
- es erfolgt der Aufruf *PROGRAMM_REKURSIV(0)*;
- die noch nicht ausgeführte Anweisung 3 wird im Stack abgelegt. (Bis hierhin wird der Vorgang rekursiver Abstieg genannt, er endet mit dem Erreichen des Rekursionsendes.)
- Da jetzt das Rekursionsende (*n=0*) erreicht ist, wird Anweisung 1 ausgeführt.
- Anschließend wird der Stack nach dem LIFO-Prinzip (last in first out) geleert. Die zuletzt abgelegte Anweisung 3 wird ausgeführt, danach die zuerst abgelegte Anweisung 3. (Dieser Vorgang wird rekursiver Aufstieg genannt.)

Somit wird die Anweisung 2 zweimal beim rekursiven Abstieg ausgeführt. Die Anweisung 1 wird einmal beim Erreichen des Rekursionsendes ausgeführt und die Anweisung 3 wird zweimal beim rekursiven Aufstieg ausgeführt.

Unterprogramme dieser Art lassen sich mit dem ClassPad verwirklichen.
Mit dem folgenden Unterprogramm Rekdemo wird genau dieses rekursive Verhalten demonstriert.

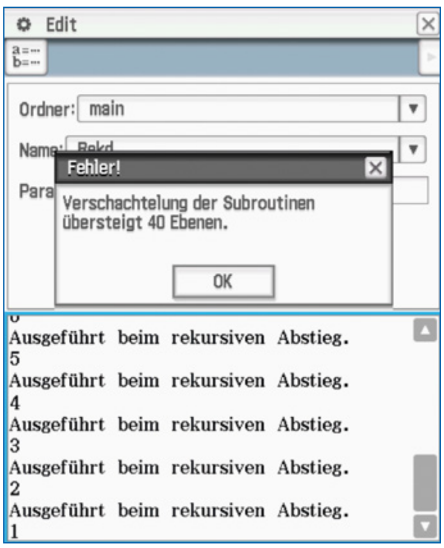
Beispiel 1:
Dem Unterprogramm *Rekdemo* muss bei seinem Aufruf ein Wert des Parameters *n* übergeben werden. Im Hauptprogramm *Rekd* erfolgt die Parameterübergabe durch den Befehl Rekdemo(a).
Wenn im Hauptprogramm *Rekd* für die Rekursionstiefe *a* der Wert 2 eingegeben wird, dann ergibt sich die rechts stehende Ausgabe.

```
Rekd        N
ClrText
Input  a, "Rekursionstiefe"
Rekdemo(a)
```

```
Rekdemo     N n
If  n=0
Then
Print  "Rekursionsende erreicht."
Else
Print  "Ausgeführt beim rekursiven Abstieg."
Print  n
Rekdemo(n-1)
Print  "Ausgeführt beim rekursiven Aufstieg."
Print  n
IfEnd
```

```
Ausgeführt beim rekursiven Abstieg.
2
Ausgeführt beim rekursiven Abstieg.
1
Rekursionsende erreicht.
Ausgeführt beim rekursiven Aufstieg.
1
Ausgeführt beim rekursiven Aufstieg.
2
```

Bei der Eingabe der Rekurtionstiefe 39 für *a* ergibt sich erstmals die Fehlermeldung



Folglich darf die Rekursionstiefe beim ClassPad 40 nicht übersteigen.

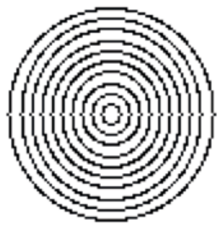
Beispiel 2:
Mit dem folgenden Unterprogramm *Kreism(d,n)* wird ein Muster von konzentrischen Kreisen von außen nach innen rekursiv erzeugt.

```
If n=0
Then
Return
Else
circle 0,0,d*n
wait 2
IfEnd
```

Der Aufruf des Unterprogramms erfolgt mit dem Hauptprogramm *Kmuster*

```
ClrGraph
Kreism(0.2,10)
```

Es entsteht von außen nach innen beim rekursiven Abstieg das untenstehende Muster. Werden im Unterprogramm *Kreism(d,n)* die Befehlszeilen „`circle 0,0,d*n`“ und „`Kreism(d,n-1)`“ miteinander vertauscht, so entsteht dieselbe Figur, aber von innen nach außen. Nun werden die Kreise erst beim rekursiven Aufstieg gezeichnet.



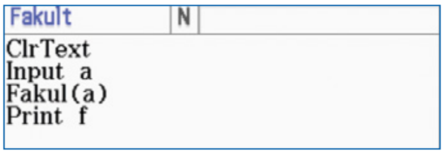
Beispiel 3:
Die rekursive Berechnung der Fakultät darf gewiss als das klassische Beispiel für Rekursion bezeichnet werden. Es soll auch hier nicht fehlen.
Als Definition für *n*! (gelesen: n Fakultät) für nicht negative ganze Zahlen gelte

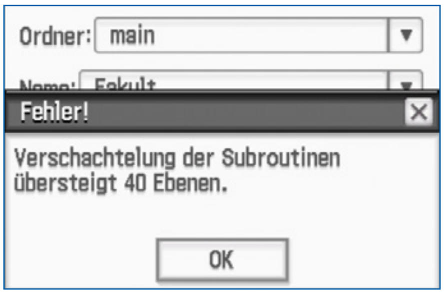
$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \end{cases}$$

Das folgende Unterprogramm verwendet genau diese Definition.
Werden für a Werte eingegeben, die größer als 38 sind, so erscheint eine Fehlermeldung, weil die Rekursionstiefe 40 übersteigt.

```
Fakul       N n
If  n=0
Then
1⇒f
Else
Fakul(n-1)
f×n⇒f
IfEnd
```

Fortsetzung auf Seite 7





Beispiel 4:
Als Quersumme einer natürlichen Zahl wird die Summe ihrer Ziffern bezeichnet.
Mit

$$q(n) = \begin{cases} n & \text{, wenn } n < 10 \\ \text{Einerziffer} + q(n \text{ ohne Einerziffer}), & \text{sonst} \end{cases}$$

oder mit ClassPad-Befehlen

$$q(n) = \begin{cases} n & \text{, wenn } n < 10 \\ \text{mod}(n,10) + q(\text{int}(n/10)), & \text{sonst} \end{cases}$$

wird die Quersumme einer natürlichen Zahl n rekursiv definiert.
Das folgende Unterprogramm *qs(n)* berechnet die Quersumme einer Zahl, die im Hauptprogramm *quer* eingegeben wird
qs(n):

```
If n≥1
Then
q+mod(n,10)⇒q
int(n/10)⇒a
qs(a)
IfEnd
```

quer:

```
ClrText
0⇒q
Input a
qs(a)
Print q
```

Beispiel 5:
Ähnlich wie die Berechnung der Fakultät einer natürlichen Zahl gehört auch die Lösung der Aufgabe „Turm von Hanoi“ zu den Standardaufgaben zur Rekursion.
Das Spiel „Turm von Hanoi“ geht zurück auf den französischen Mathematiker Édouard Lucas, der es 1883 erfunden haben soll.
Die Aufgabe besteht darin, einen Turm aus n auf dem Platz *A* übereinander liegenden Scheiben, deren Durchmesser von unten nach oben abnimmt, mit möglichst wenigen Zügen so zum Platz *B* umzustapeln, dass jeweils nur eine Scheibe bewegt wird und nie eine kleinere Scheibe auf einer größeren liegt. Dabei darf ein Hilfsplatz *H* benutzt werden. Ein Zug besteht darin, dass eine obere Scheibe von einem Platz zu einem anderen gelegt wird.
Für eine Scheibe besteht die Lösung in einem Zug; die Scheibe wird von *A* nach *B* gelegt.
Für zwei Scheiben sind genau drei Züge erforderlich:
• obere Scheibe von *A* nach *H*,
• größte Scheibe von *A* nach *B*,
• Scheibe von *H* nach *B*.

Wenn *n (n>1)* Scheiben auf dem Platz *A* liegen, dann führt der folgende rekursive Ansatz zur Lösung.

1. Baue den Turm, der aus den oberen *n* - 1 Scheiben besteht, mit möglichst wenigen Zügen von *A* nach *H* um.
2. Lege die größte Scheibe von *A* nach *B*.
3. Baue den Turm aus *n* - 1 Scheiben mit möglichst wenigen Zügen von *H* nach *B* um.

Es lässt sich zeigen, dass 2^n - 1die geringste Anzahl von Zügen ist, die für den Umbau eines Turmes aus *n* Scheiben von *A* nach *B* erforderlich sind.

Mit dem rekursiven Unterprogramm *umbau(n,A,B,H)* wird diese Lösungsstrategie umgesetzt.
Die Parameter haben die folgenden Bedeutungen:

n: Anzahl der Scheiben
A: Platz, auf dem am Anfang der Turm aus *n* Scheiben steht. Im Hauptprogramm erhält *a* den Wert 1.
B: Platz, auf dem der Turm aus *n* Scheiben am Ende stehen soll. Im Hauptprogramm erhält *b* den Wert 2.
H: Hilfsplatz, der beim Umbau benutzt werden darf. Im Hauptprogramm erhält *h* den Wert 3.

Ausgegeben werden die einzelnen Züge als zweistellige Zahlen in ihrer richtigen Reihenfolge.
So bedeutet zum Beispiel 13, dass die oberste Scheibe vom Platz 1 *(A)* zum Hilfsplatz 3 *(H)* gelegt wird.

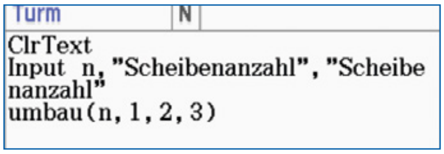
umbau(n,A,B,H):

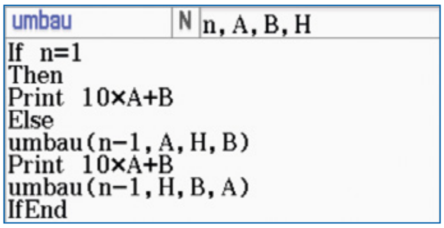
```
IF n=1
Then
Print 10a+b
Else
umbau(n-1,a,h,b)
Print 10a+b
umbau(n-1,h,b,a)
IfEnd
```

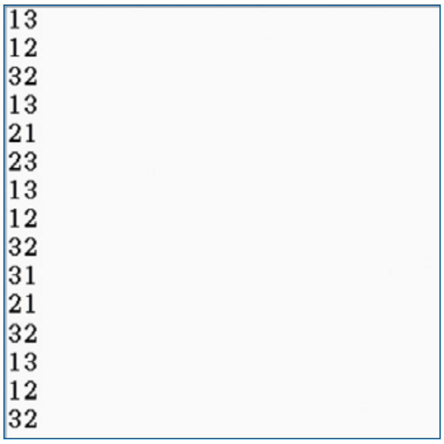
Der Aufruf des Unterprogramms *umbau (n,A,B,H)* erfolgt durch das Hauptprogramm Turm:

```
ClrText
Input n,"Scheibenanzahl",
"Scheibenanzahl"
umbau(n,1,2,3).
```

Wird im Hauptprogramm für *n* = 4 eingegeben, so ergibt sich:







Mithilfe der Programmiersprache des ClassPad lassen sich auch Fraktale, wie das Sierpinski-Dreieck oder die Kochsche Schneeflocke rekursiv erzeugen.

Buchtipp

Stochastik mit dem FX-CG20

Das Heft zum Thema Stochastik und Statistik mit dem ClassPad wurde nun vom Autor Hannes Stoppel überarbeitet und für die Verwendung mit CASIO Grafikrechnern angepasst. Extra für Mathematiklehrerinnen und Lehrer entwickelt, mit zahlreichen Arbeitsblättern, Aufgaben und Lösungen, zeigt das Buch einen gewinnbringenden Einsatz des Grafikrechners. Gerade das manchmal etwas problematische Thema Stochastik kann mithilfe des Grafikrechners und seinen Möglichkeiten an vielen Stellen deutlich anschaulicher werden. Pünktlich zum neuen Schuljahr wird das Buch beim Aulis-Verlag erhältlich sein.

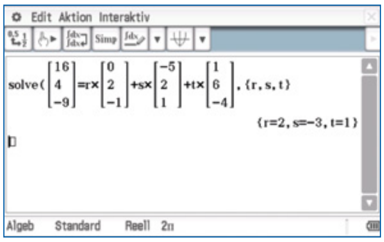
Update

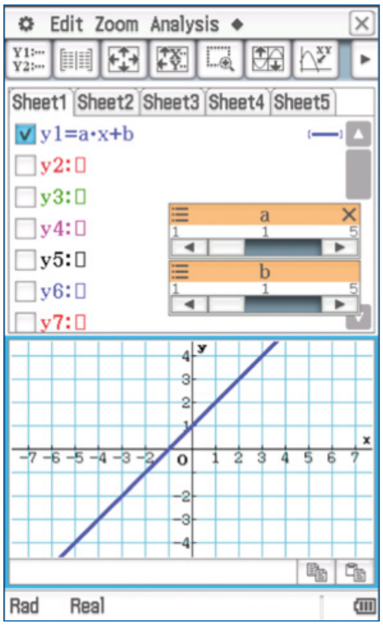
ClassPad II

Nach einem erfolgreichen Start des Class Pad II steht nun das erste große Update vor der Tür. Viele Ihrer Wünsche wurden erfolgreich in die Tat umgesetzt. Die neuen Funktionen sind unter Anderem:

- Vektorgleichungen.
  Vektorgleichungen lassen sich nun direkt eingeben und müssen nicht mehr als Gleichungssystem umgewandelt werden.
- Schieberegler für die Grafikanwendung.
  Parameter einer Funktion können in der Grafikanwendung mit Schiebereglern interaktiv verändert werden.
- Pinch In/Out (Zoomen der Grafik wie auf dem Smartphone).
  Benutzen Sie die klassische „Zwei Finger“-Geste zum Zoomen in der Grafikanwendung.
- Picture Plot.
  Bild- und Videoanalyse mit eigenen oder vorgegebenen Bildern.
- Eine neue Anwendung „Interaktive Differentialrechnung“.
  Vermitteln Sie die Differentialrechnung auf besonders anschauliche Weise. Von der Sekante zur Tangente.
- Horizontalmodus für viele weitere Anwendungen, nicht nur „Main“.
  Nun kann auch im Grafikbereich oder bei Tabellen das ClassPad II auf die Seite gelegt werden für noch mehr Bildschirminhalt.

Das Update wird ca. ab August zum kostenlosen Download zur Verfügung stehen unter:
www.casio-schulrechner.de/downloads





Abonnement

CASIO forum

Wenn Sie es wünschen, können Sie das CASIO forum gerne regelmäßig per Post bekommen! Bitte tragen Sie sich dafür in unseren Adressverteiler ein:
www.casio-schulrechner.de/lehrerinfoservice

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team umfassend bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit:
www.casio-schulrechner.de

Gerät/Software	OS-Version
ClassPad-Serie	3.06
ClassPad Manager	3.05
ClassPad II	2.0
ClassPad II Manager	2.0
FX-CG20	2.0
FX-CG20 Manager	2.0
FX-9860GII/SD	2.04
FX-Manager Plus	2.01

Stand: September 2014

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Vertriebspartner:
Österreich: Ivo Haas Lehrmittelversand und Verlag Ges.m.b.H
Saalachstraße 36 • 5013 Salzburg
Tel.: 0662/430 567-0 • E-Mail: casio@ivohaas.com
Schweiz: Campus Equipment
Georges Vorburger
Kerbelweg 2 • 9470 Buchs SG
Tel.: 081/756 75 55 • E-Mail: vorburger@taschenrechner.ch

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team
education@casio.de

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

114SGR-Forum16