CASIO forum

Schul- und Grafikrechner • Ausgabe 1/2018

Inhalt

Editorial

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

im CASIO forum zeigen Kolleginnen und Kollegen Anregungen und Beispiele für den gewinnbringenden Unterrichtseinsatz unserer Rechner.

Wir informieren Sie in dieser Ausgabe über einige neue Möglichkeiten, die durch die Weiterentwicklung unserer technisch-wissenschaftlichen Rechner entstehen. Als Erstes erwartet Sie ein ebenso verblüffendes wie mathematisch interessantes Phänomen aus der Alltagswelt. Das Tangentenproblem aus Ausgabe 1/2016 wird vertieft und es werden Vertrauensintervalle und -wahrscheinlichkeiten berechnet. Wir schauen auf das neu konzipierte österreichische Abitur, berechnen Fraktale und werfen einen genaueren Blick auf das Newton-Verfahren. Sie finden weiterhin eine Knobelaufgabe, eine Modellierung mit Splines, den 2. Teil der Einheitenumrechnung aus der letzten Ausgabe, die Lösung des letzten Rätsels und eine auf verschiedenen Wegen lösbare Analysisaufgabe.

Zum Ausprobieren der Beispielaufgaben im Unterricht können Sie unsere Grafikrechner im Klassensatz einschließlich Zubehör kostenlos für vier Wochen ausleihen. Einen Überblick über dieses und weitere Angebote finden Sie auf unserer Internetseite im Bereich Lehrersupport. Über Rückmeldungen zur Umsetzung der Aufgaben im Unterricht oder Anregungen zu bestimmten Themen freuen wir uns! Auch Beiträge sind herzlich willkommen, gern als E-Mail an **education@casio.de.**

Ihr Redaktionsteam

i.A. CASIO

Analytische Geometrie

Camcarpets – Alles eine Frage der Perspektive

Autor: Michael Bostelmann, Mons-Tabor-Gymnasium Montabaur

Der folgende Artikel beschreibt ein Projekt, wie es in einer Unterrichtsreihe zur Analytischen Geometrie durchgeführt werden kann.

Einleitung

Bei Fernsehübertragungen von Fußballspielen sind oft Werbebanden zu sehen, die neben den Toren stehen. Manchmal passieren da seltsame Dinge, z.B. läuft ein Spieler wie ein Geist unverletzt durch diese Banden hindurch. Von der Seitentribüne sieht die Situation ganz anders aus.

Dabei handelt es sich um sogenannte Camcarpets (Kamerateppiche), die neben den Toren liegen. Von der Position der Hauptkamera aus sehen die Teppiche dann wie aufgestellte Banden aus. Dahinter steckt pure – und recht elementare – Mathematik.

Der räumliche Effekt entsteht dadurch, dass alle Punkte, die auf einer Geraden durch die Kameraposition K liegen, auf dieselbe Stelle des Bildschirms abgebildet werden. Liegen also K, die Punkte P_k einer (fiktiven) echten Bande und die entsprechenden Punkte P_k' des Camcarpets auf einer Geraden, dann sieht das Bild des Camcarpets in der Kamera genauso aus wie das der echten Bande.

In einem Projekt zur analytischen Geometrie im Raum sollen Schüler einen solchen Camcarpet herstellen. Im Folgenden wird die in Abb. 2 gezeigte Werbebande als Vorlage für einen Camcarpet verwendet. Zum Vergleich wird die echte Werbebande ebenfalls erstellt. Das gestrichelte Rechteck wird dann senkrecht nach hinten

Fortsetzung auf Seite 2

geklappt und bildet die Standfläche. Das Raster dient nur zur Orientierung und wird später weggelassen.

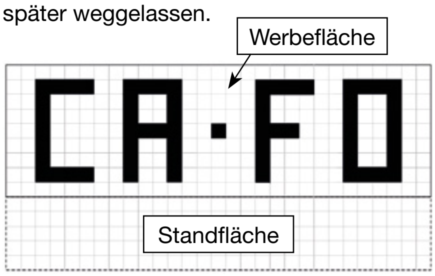


Abb. 2: Bande mit Raster (5 mm)

Erstellen des Camcarpets

Es wird gezeigt, wie zu einem Punkt P auf einer echten Bande der Punkt P' auf dem Camcarpet so bestimmt wird, dass P, P' und die Position K der Hauptkamera auf einer Geraden liegen. Der rechte untere Punkt der Standfläche wird später auch sichtbar sein, behält aber seine Koordinaten, da er in der x,y-Ebene liegt. In Abb. 3 ist das Szenario dargestellt. Die Kamera befindet sich in der Position K(400|-1000|300).

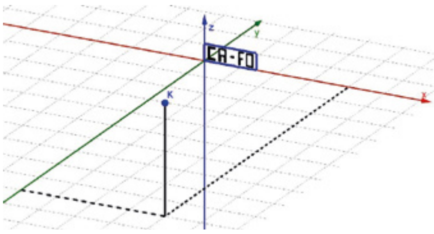


Abb. 3: Das Szenario mit Kamera und Bande

Die Werbefläche befindet sich in der x,z-Ebene, sodass die y-Koordinate bei allen Punkten null ist. Die untere linke Ecke der Werbefläche liegt im Ursprung und eine Einheit entspricht 1mm. Die obere rechte Ecke hat die Koordinaten (145|0|45) (vgl. Abb 2).

Der Buchstabe C besteht aus einem Streckenzug mit den Punkten:
C_1(10|0|5), C_2(30|0|5), C_3(30|0|10), C_4(15|0|10), C_5(15|0|35), C_6(30|0|35), C_7(30|0|40), C_8(10|0|40). Die obere rechte Ecke des Buchstabens C auf der echten Bande ist also der Punkt C_7(30|0|40).

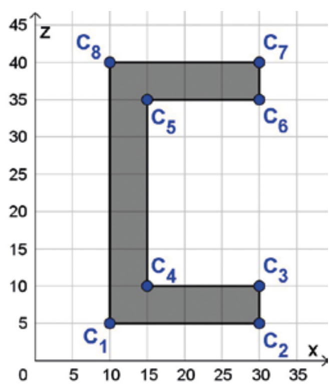


Abb. 4: Der Buchstabe C als Streckenzug

Um den Punkt C_7' auf dem Camcarpet zu ermitteln, muss die Gerade g durch K und C_7 gebildet und deren Schnittpunkt mit der x,y-Ebene berechnet werden.

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OK} + s\cdot\overrightarrow{KC_7} =$$
$$\begin{pmatrix}400\\-1000\\300\end{pmatrix} + s\cdot\left[\begin{pmatrix}30\\0\\40\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}400\\-1000\\300\end{pmatrix}\right] =$$
$$\begin{pmatrix}400\\-1000\\300\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-370\\1000\\-260\end{pmatrix}$$

Da die z-Koordinate des Bildpunktes null sein muss, ergibt sich $s=\frac{15}{13}$ und C_7' (-26,9|153,8|0) (alle Werte auf eine Nachkommastelle gerundet). Allgemein gilt mit $K(k_x|k_y|k_z)$ und $P(p_x|p_y|p_z)$:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}p_x-k_x\\p_y-k_y\\p_z-k_z\end{pmatrix} \rightarrow\ s \underbrace{=}_{p_z'=0} \frac{k_z}{k_z-p_z}$$

damit gilt $p_x' = k_x + \frac{k_z}{k_z-p_z}\cdot(p_x-k_x)$ und

$$p_y' = k_y + \frac{k_z}{k_z-p_z}\cdot(p_y-k_y) \underbrace{=}_{p_y=0} k_y - \frac{k_z}{k_z-p_z}\cdot k_y$$

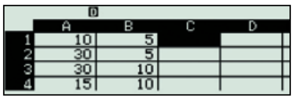
Mit K(400|-1000|300) ergibt sich dann

$$p_x' = 400 + \frac{300}{300-p_z}\cdot(p_x-400) \text{ und}$$

$$p_y' = -1000 + \frac{300}{300-p_z}\cdot 1000$$

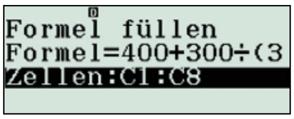
Dies ist eine typische Aufgabe für eine Tabellenkalkulation, wie sie im FX-991DE X ClassWiz integriert ist.

Mit MENU 8 in die Tabellenkalkulation wechseln. In der Spalte A die x-Koordinaten und in der Spalte B die z-Koordinaten der Eckpunkte des Buchstabens „C" eingeben.

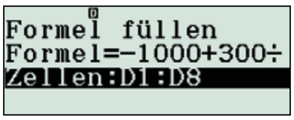


	A	B	C	D
1	10	5		
2	30	5		
3	30	10		
4	15	10		

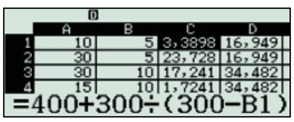
Mit OPTN 1 „Formeln füllen" wählen, die Formel für x' eingeben: 400+300/(300–B1)*(A1–400) und den Bereich festlegen.



Dann analog die Formel für y' eingeben: –1000+300/(300–B1)*1000 und den Bereich festlegen.



Das Ergebnis sollte dann so aussehen.



	A	B	C	D
1	10	5	3.3898	16.949
2	30	5	23.728	16.949
3	30	10	17.241	34.482
4	15	10	1.7241	34.482

=400+300÷(300−B1)

Auf diese Weise ergeben sich für alle Punkte der echten Bande die Koordinaten der Bildpunkte in der x,y-Ebene.

Bei einem Unterrichtsprojekt bietet es sich an, die Berechnung und Darstellung der Buchstaben auf verschiedene Gruppen zu verteilen.

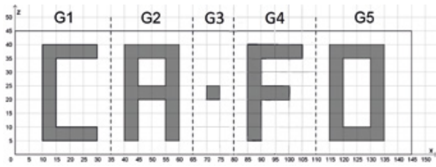


Abb. 5: Aufteilung für fünf Arbeitsgruppen

Dabei muss jede Gruppe auch ihren Teil des Rahmenrechtecks einzeichnen. Für G5 kommt noch das sichtbare Dreieck der Standfläche hinzu. Die Camcarpets der einzelnen Buchstaben können dann anschließend zusammengeklebt werden.

Der fertige Camcarpet sieht dann aus wie in Abb. 6.

Abb. 6: Der fertige Camcarpet

Zur Überprüfung wird der Camcarpet so in die x,y-Ebene gelegt, dass die linke untere Ecke im Ursprung und die Unterkante auf der x-Achse liegen. Eine Kamera muss in die Position K(400|-1000|300) gebracht werden. Da nicht klar ist, wo genau innerhalb der Kamera sich der zur Berechnung verwendete Kamerapunkt K befindet, wird die Kamera zunächst so aufgestellt, dass K etwa in der Mitte des Gehäuses liegt. In Abb. 8 sind die Fotografien der Originalbande und des Camcarpets zu sehen.

Beim linken Schriftzug ist auf dem Boden der Schatten der Bande erkennbar. Die liegende Carpet-Schrift scheint aufrecht stehend und wirkt aufgeräumter als die echte Bande. Um den Eindruck perfekt zu machen, enthalten Camcarpets in Fußballstadien zusätzlich Linien, die das Gestell hinter der Bande darstellen.

Abb. 7: Bande als Folie und Camcarpet

Abb. 8: Originalbande (links) und Camcarpet (rechts)

Neues vom Tangentenproblem

Autor: Jürgen Appel, Deutschorden-Gymnasium, Bad Mergentheim

Was bisher geschah:
Im Artikel „Ein besonderes Tangentenproblem“ (CASIO forum 1/2016) wurden Tangenten an den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{5}{3}x-\frac{5}{9}$ gesucht, die gleichzeitig auch Normalen an den Graphen von f sind. Wird dieses Tangentenproblem allgemeiner gestellt, können weitere, ebenfalls interessante Aufgabenstellungen hinzugefügt werden. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a>0)$

Aufgabenstellung 1

Für welche Parameterwerte gibt es solche Tangenten, die gleichzeitig Normalen an den Graphen von f sind?

Lösung
Die allgemeine Tangentengleichung lautet:
$t: y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$
Der Schnitt der Tangente mit dem Graphen liefert die Lösungen:
$x_1=u$ (doppelte Nullstelle) und
$x_2=-(\frac{b}{a}+2u)=v$
Bedingung:
$f'(u)\cdot f'(v)=-1$ bzw. $f'(u)\cdot f'(-(\frac{b}{a}+2u))=-1$
Dies führt zu einer Gleichung vierten Grades für u:
$36a^2\cdot u^4+48ab\cdot u^3+(19b^2+15ac)\cdot u^2+(2\frac{b^3}{a}+10bc)\cdot u+\frac{b^2c}{a}+c^2+1=0$
Die erste Substitution
$u=\tilde{u}-\frac{b}{3a}$ liefert folgende biquadratische Gleichung:
$36a^2\cdot\tilde{u}^4+5(3ac-b^2)\cdot\tilde{u}^2+\frac{b^4}{9a^2}-\frac{2b^2c}{3a}+c^2+1=0$
Die zweite Substitution $z=\tilde{u}^2$ führt zur quadratischen Gleichung:
$36a^2\cdot z^2+5(3ac-b^2)\cdot z+\left(\frac{b^2}{3a}-c\right)^2+1=0$
Diskriminante:
$$D=25(3ac-b^2)^2-144a^2\cdot\left[\left(\frac{b^2}{3a}-c\right)^2+1\right]=9(3ac-b^2)^2-144a^2$$
Demnach gibt es nur Lösungen für $D\geq 0$, d.h. für $9(3ac-b^2)^2\geq 144a^2$
Somit muss gelten: $|3ac-b^2|\geq 4a$ **[1]**
$$z_{1;2}=\frac{-5(3ac-b^2)\pm\sqrt{9(3ac-b^2)^2-144a^2}}{72a^2}$$
Da es für negative Werte von z keine Lösungen ũ gibt (Resubstitution), folgt:
$3ac-b^2<0$ (da die Wurzel kleiner $|3\cdot(3ac-b^2)|$ ist) **[2]**

Aus **[1]** und **[2]** folgt:
Es gibt nur Lösungen für $3ac-b^2\leq -4a$.
(bzw. $c-\frac{b^2}{3a}\leq-\frac{4}{3}$)

In der Regel gibt es vier Lösungen. Zwei Lösungen gibt es genau dann, wenn $D=0$ (d.h. $3ac-b^2=-4a$) ist. Eine Lösung gibt es nicht, denn dann müsste $z=0$ sein (also $b^2=3ac$) $\longrightarrow u=-\frac{b}{3a}$. Das wäre die Wendetangente (Symmetrie), die kann jedoch nie Normale sein, da sie den Graph nicht mehr schneidet (die Wendestelle ist dreifache Nullstelle).

Aufgabenstellung 2

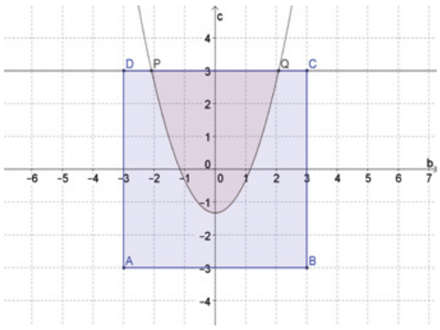
Es gilt $a=\frac{1}{3}$, die Koeffizienten b und c werden mithilfe eines Zufallsexperiments unabhängig voneinander bestimmt.
Dabei soll gelten: $-3\leq b\leq 3$ und $-3\leq c\leq 3$

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Tangente auch Normale ist.

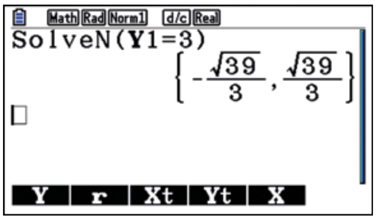
Lösung
Lösungen gibt es nur, falls die Bedingung $3ac-b^2\leq-4a$ erfüllt wird:
Mit $a=\frac{1}{3}$ folgt:
$3\cdot\frac{1}{3}\cdot c-b^2\leq-4\cdot\frac{1}{3}$ d.h. $c-b^2\leq-\frac{4}{3}$

$c\leq b^2-\frac{4}{3}$ **[1]**

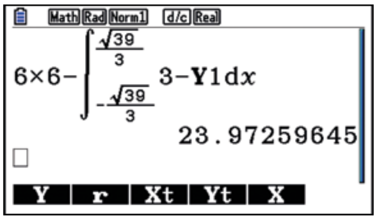
Grenzfall: $c=b^2-\frac{4}{3}$
Die Situation graphisch dargestellt:



Wird nun noch das Quadrat ABCD eingezeichnet, kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Flächeninhalt interpretiert werden. Da $c\leq b^2-\frac{4}{3}$ gelten muss, liegen die Punkte (b|c), die Lösungen des Tangentenproblems repräsentieren, unterhalb der Parabel $c=b^2-\frac{4}{3}$. Alle Punkte (b|c), die Lösungen des Tangentenproblems repräsentieren, müssen zudem innerhalb des Quadrats als auch unterhalb der Parabel liegen. Alle Punkte (b|c), für die es Lösungen gibt, liegen in der blau getönten Fläche.
Aus $c=3$ folgt:
$P(-\frac{\sqrt{39}}{3}\,|\,3)$ und $Q(-\frac{\sqrt{39}}{3}\,|\,3)$



Für den Flächeninhalt F der blau getönten Fläche gilt:
$$F=6\cdot6-\int_{-\frac{\sqrt{39}}{3}}^{\frac{\sqrt{39}}{3}}3-(b^2-\frac{4}{3})db\approx$$
$36-12{,}027=23{,}973$ (GTR)



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist der Quotient aus F und dem Flächeninhalt F* des Quadrats ABCD.
$p=\frac{F}{F^*}\approx\frac{23{,}973}{36}\approx 0{,}6659$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt demnach ca. 66,6 %. Bemerkung: Dieses Zufallsexperiment kann auch mithilfe einer Tabellenkalkulation simuliert und die Werte mit dem berechneten Wert verglichen werden.

Variante
Interessant ist auch folgende Verallgemeinerung des Zufallsexperiments: Sei $a=\frac{1}{3}$. Die Koeffizienten b und c werden mithilfe eines Zufallsexperiments unabhängig voneinander bestimmt. Dabei soll gelten:
$-k\leq b\leq k$ und $-k\leq c\leq k$; $(k\in\mathbb{R}^+)$. Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass es Tangenten gibt, die gleichzeitig auch Normalen sind, mit wachsendem k?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist erneut der Quotient aus dem Flächeninhalt F der blau getönten Fläche und dem Flächeninhalt F* des Quadrats ABCD. Beide Flächeninhalte streben für $k\to\infty$ gegen unendlich. Der Flächeninhalt F für allgemeines b und c wird mithilfe der Integralrechnung bestimmt.

Es gilt: $F=(2k)^2-\int_{-r}^{r}k-(b^2-\frac{4}{3})db=$
$4k^2-\int_{-r}^{r}k+\frac{4}{3}-b^2db$
$F=4k^2-2\cdot\int_{0}^{r}k+\frac{4}{3}-b^2db$
Dabei ist r festgelegt über: $k=r^2-\frac{4}{3}$ (mit $r>0$);
also: $r=\sqrt{k+\frac{4}{3}}$
Das Integral hat den Wert:
$$\int_0^r k+\frac{4}{3}-b^2db=\frac{2}{3}\cdot\left(k+\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
Damit folgt:
$$F=4k^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(k+\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=4k^2-\frac{4}{3}\cdot\left(k+\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$
Für den Flächeninhalt F* des Quadrats gilt:
$F^*=(2k)\cdot(2k)=4k^2$. Somit gilt:
$$p=\frac{F}{F^*}=\frac{4k^2-\frac{4}{3}\cdot\left(k+\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{4k^2}=1-\frac{\left(k+\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{3k^2}$$
Für $k\to\infty$ folgt: $\lim\limits_{k\to\infty}p=1$.

Ermitteln von Vertrauensintervallen mithilfe des CASIO FX-991DE X

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

Im Fachlehrplan Gymnasium/Fachgymnasium Mathematik fordert das Kultusministerium von Sachsen-Anhalt im Schwerpunkt „Beurteilende Statistik“, dass die Schüler Schätzwerte für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln und Vertrauensintervalle um diese Schätzwerte zu konkreten Vertrauenswahrscheinlichkeiten angeben. Als grundlegende Begriffe werden dort „Vertrauenswahrscheinlichkeit“ und „Vertrauensintervall“ genannt (vgl. ebenda Seite 63).

Eine typische Aufgabe in diesem Zusammenhang könnte lauten: Bei der Qualitätskontrolle eines Massenartikels waren von 187 überprüften Teilen 11 defekt. Ermitteln Sie das 75%-Vertrauensintervall für die unbekannte Ausschussquote.

Zur Lösung dieser Aufgabe können folgende Überlegungen führen. Die relative Häufigkeit der defekten Teile in dieser Stichprobe beträgt $h=\frac{11}{187}=\frac{1}{17}$.

Der unbekannte Anteil an defekten Teilen in der Grundgesamtheit wird mit p bezeichnet. Die Zufallsgröße X möge die Anzahl der defekten Teile in einer Zufallsstichprobe von 187 Teilen angeben. Die Zufallsgröße X ist dann binomialverteilt mit den Parametern $n=187$ und der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit p. Unter bestimmten Bedingungen ist es vernünftig, X als normalverteilt mit den Parametern μ und σ anzunehmen. Dann gilt die Beziehung
$P(|x-\mu|\le t\cdot\sigma)=2\Phi(t)-1$ mit Φ als Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.
Wird nun $\mu=E(X)$ und $t\cdot\sigma=c$ gesetzt, so ergibt sich

$$P(|x-E(X)|\le c)=2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Gleichung

$$P\left(\left|\frac{x}{n}-\frac{E(X)}{n}\right|\le\frac{c}{n}\right)=2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1.$$

Hier ist $n=187$ der Umfang der Stichprobe, damit ist $\frac{x}{n}=\frac{1}{17}$ die Realisierung des unbekannten Anteils $p=\frac{E(X)}{n}$.

Mit der Wahrscheinlichkeit von $2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1$ darf darauf vertraut werden, dass der gesuchte Anteil p von der beobachteten relativen Häufigkeit $\frac{x}{n}$ um höchstens $\frac{c}{n}$ abweicht.

Wird für diese Vertrauenswahrscheinlichkeit $2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1$ nun ein fester Wert β gewählt, so lässt sich um $\frac{x}{n}$ ein Vertrauensintervall $p_1\le p\le p_2$ für p angeben, sodass p mit der gewählten Vertrauenswahrscheinlichkeit in diesem Intervall liegt. In diesem Fall ist $\beta=0{,}75$. Das Vertrauensintervall ergibt sich somit aus der Gleichung:

$$P\left(\left|\frac{1}{17}-p\right|\le\frac{c}{187}\right)=2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1=0{,}75.$$

Aus der rechten Gleichheit folgt:

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)-1=0{,}75,\ <=>\ \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)=\frac{1+0{,}75}{2},$$

$$\frac{c}{\sigma}=\Phi^{-1}(0{,}875),<=>\ \frac{c}{\sigma}\approx 1{,}1503,\ <=>c\approx 1{,}1503\sigma.$$

Da X als binomialverteilt angenommen werden kann, wird daraus

$$c=1{,}1503\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=1{,}1503\cdot\sqrt{187\cdot p\cdot(1-p)}.$$

Das zugehörige Vertrauensintervall ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\left|\frac{1}{17}-p\right|\le\frac{1{,}1503\cdot\sqrt{187\cdot p\cdot(1-p)}}{187}.\quad (*)$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left(\frac{1}{17}-p\right)^2\le\frac{1{,}1503^2\cdot p\cdot(1-p)}{187}$$

Mit Näherungswerten folgt:

$$142{,}3251p^2-17{,}6264p+0{,}4890\le 0,$$

$$p^2-0{,}1238p+0{,}003436\le 0.$$

Die Lösungsmenge der letzten Ungleichung ist ein abgeschlossenes Intervall, dessen Grenzen die Lösungen p_1 und p_2 der quadratischen Gleichung $p^2-0{,}1238p+0{,}003436=0$ sind: $p_1\approx 0{,}0420$ und $p_2\approx 0{,}0819$. Deswegen liegt mit 75%iger Sicherheit der tatsächliche Anteil an defekten Teilen zwischen 4,20 % und 8,19 %.

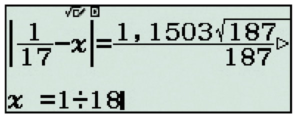
Zur Lösung dieser Aufgabe kann der CASIO FX-991DE X an zwei Stellen vorteilhaft eingesetzt werden.

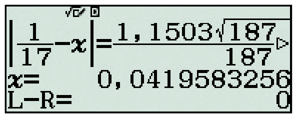
(1) Zur Ermittlung von $\frac{c}{\sigma}$ kann auf die Umkehrfunktion Φ^{-1} der Standardnormalverteilung zurückgegriffen werden, die sich im Menü „7: Verteilungsfkt.“ als „3: Inv. Normal-V.“ befindet.

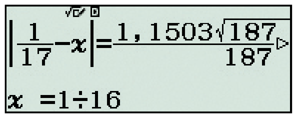
(2) Die Ungleichung (*) kann mithilfe des Befehles SOLVE gelöst werden. Die Intervallgrenzen p_1 und p_2 werden als Lösungen der Gleichung

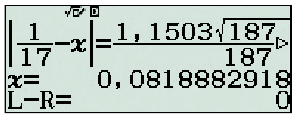
$$\left|\frac{1}{17}-p\right|=\frac{1{,}1503\cdot\sqrt{187\cdot p\cdot(1-p)}}{187}\quad \text{ermittelt.}$$

Die vom SOLVE-Befehl gefundenen Lösungen sind in starkem Maße von den Anfangswerten abhängig. Wird der Startwert kleiner als $\frac{1}{17}$ gewählt, wird als Lösung p_1 angezeigt, ist der Startwert größer als $\frac{1}{17}$, ist es p_2.









Wird in der Ungleichung (*) der Wurzelausdruck $\sqrt{187\cdot p\cdot(1-p)}$ durch $\sqrt{187\cdot\frac{1}{17}\cdot\left(1-\frac{1}{17}\right)}$ ersetzt, ergibt sich als Näherung für das Vertrauensintervall

$$p_1=\frac{1}{17}-\frac{1{,}1503}{187}\cdot\sqrt{187\cdot\frac{1}{17}\cdot\frac{16}{17}}\approx 0{,}05759$$

und

$$p_2=\frac{1}{17}+\frac{1{,}1503}{187}\cdot\sqrt{187\cdot\frac{1}{17}\cdot\frac{16}{17}}\approx 0{,}0601.$$

Statt „Vertrauensintervall“ und „Vertrauenswahrscheinlichkeit“ wird auch vom „Konfidenzintervall“ bzw. dem „Konfidenzniveau“ gesprochen; vertrauen heißt im Lateinischen confidere.

Dieses Beispiel lässt sich zu folgendem Algorithmus verallgemeinern: Wenn bei einer Bernoullikette der Länge n die relative Häufigkeit h beobachtet wird, dann bestimmt man die Grenzen des Vertrauensintervalls $I=[p_1;p_2]=\{x\,|\,p_1\le x\le p_2\}$ exakt zu einer vorgegebenen Vertrauenswahrscheinlichkeit β, indem die Gleichung

$$|h-p|=C\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

nach p aufgelöst wird.
Dabei ist $C=\Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$. Die Näherungslösungen sind

$$p_1\approx h-C\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\quad\text{und}\quad p_2\approx h+C\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}.$$

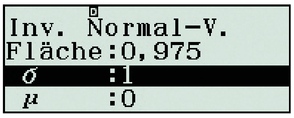
Eine Anwendung dieses Algorithmus mit dem CASIO FX-991DE X wird an der folgenden **Aufgabe** demonstriert:

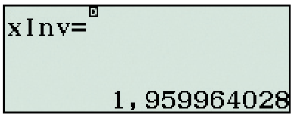
Durch eine Kontrolle wurde festgestellt, dass von 548 Fahrern nur 411 den Sicherheitsgurt anlegten. Bestimmen Sie das Vertrauensintervall, in dem mit 95 % Sicherheit der Anteil derjenigen unter allen Autofahrern liegt, die sich anschnallen.

Lösung
Der Aufgabe wird entnommen: $n=548$; $h=\frac{411}{548}$ und $\beta=0{,}95$.

Zunächst wird $C=\Phi^{-1}\left(\frac{1+0{,}95}{2}\right)$ berechnet und im Speicher C abgelegt:

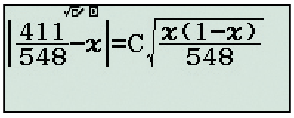
[MENU] [7] [3] [(] [1] [+] [0] [,] [9] [5] [)] [÷] [2] [=] [=] [STO] [x^{-1}]



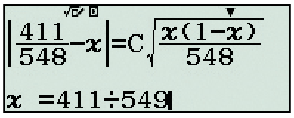


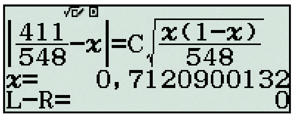
Anschließend in das Menü „1:Berechnungen“ wechseln und mithilfe von SOLVE die Lösungen der Gleichung $\left|\frac{411}{548}-x\right|=C\sqrt{\frac{x(1-x)}{548}}$ ermitteln:

[MENU] [1] [SHIFT] [(] [▭/▭] [4] [1] [1] [▼] [5] [4] [8] [▶] [−] [x] [▶] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [x^{-1}] [√▭] [▭/▭] [x] [(] [1] [−] [x] [)] [▼] [5] [4] [8]

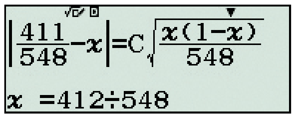


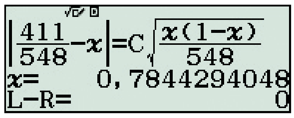
[SHIFT] [CALC] [4] [1] [1] [÷] [5] [4] [9] [=] [▲] [=]





[=] [SHIFT] [CALC] [4] [1] [2] [÷] [5] [4] [8] [=] [▲] [=]





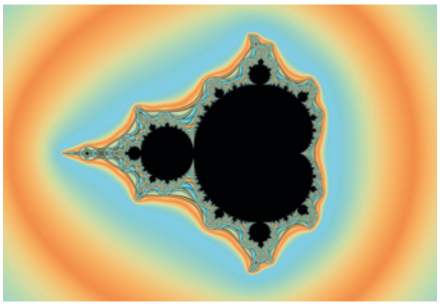
Nach der Eingabe des Startwertes für x und der Bestätigung durch [=] ist die Eingabe für C möglich; angezeigt wird der Wert, der sich im Speicher C befindet. Mittels [▲] muss zur Variablen x zurückgekehrt werden, weil die Gleichung für die Variable gelöst wird, die als letzte angezeigt wurde.

Mit 95 % Sicherheit liegt der Anteil der Gurtbenutzer unter allen Autofahrern im Vertrauensintervall $I=[p_1;p_2]=[0{,}7121;\,0{,}7844]$.

Fraktale in der Tabellenkalkulation

Die Darstellung der Mandelbrotmenge

Autorin: Caroline Duttiné, Universität St. Andrews, Schottland



Die Mandelbrotmenge, benannt nach dem Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924–2010), gehört wohl zu den schönsten Gebilden, die die Mathematik zu bieten hat, schließlich besticht sie schon allein durch ihre Farbpracht. Doch: Was genau verbirgt sich hinter der bunten Fassade und wie kann ein ClassPad Schülern die Entstehung des sogenannten „Apfelmännchens“ näherbringen?

Um dies zu verstehen, ist ein Blick auf Fraktale und komplexe Zahlen unerlässlich.

Wird die Mandelbrotmenge genauer betrachtet, lässt sich feststellen, dass diese in ihrem Rand Selbstähnlichkeit aufweist. Unter dem Begriff der Selbstähnlichkeit verstehen Mathematiker die Tatsache, dass einzelne Teile eines Gebildes – in unserem Fall der Mandelbrotmenge – eine starke Ähnlichkeit mit dem Gesamten aufweisen. Selbstähnliche Objekte verfügen oft über eine gebrochene Dimension. Daher handelt es sich bei ihnen um sogenannte „Fraktale“. Auch die Mandelbrotmenge ist ein Fraktal. Weitere Beispiele sind der Menger Schwamm, das Sierpinski-Dreieck oder der Pythagoras Baum. Fraktale gibt es auch in der Natur: Farne, Blumenkohl oder Romanesco sind selbstähnlich. Auch die Flachsfaser ist eine fraktale Faser.

Um dies im Unterricht intensiver zu behandeln, ist die Einführung in die komplexen Zahlen nötig. Komplexe Zahlen bestehen stets aus einem Real- und einem Imaginärteil. Eine komplexe Zahl entspricht der Zahl $z=a+bi$, wobei a den Realteil und b den Imaginärteil angibt. Bei i handelt es sich um die imaginäre Einheit. Die Darstellung komplexer Zahlen erfolgt mithilfe der sogenannten Gauß'schen Zahlenebene, bei der das Koordinatensystem aus der Imaginärachse (vertikaler Achse) und der Realachse (horizontaler Achse) besteht.

Der Ausgangspunkt der Mandelbrotmenge ist die Gleichung $z_{n+1}=(z_n)^2+c$, als Ausgangsglied eignet sich $z_0=0$. Im Folgenden werden nun mehrere Iterationsschritte hintereinander durchgeführt, indem stets der vorhergehende Wert für z_n quadriert und c hinzuaddiert wird. Der Wert für c kann verändert werden. Um die Iterationsschritte nicht mühsam „zu Fuß“ berechnen zu müssen, lohnt die Verwendung des ClassPads. Im Menü „Tabellenkalkulation“ wird die Gleichung $z_{n+1}=(z_n)^2+c$ in eine Zelle eingegeben und der Startwert $z_0=0$ sowie der Additiven c eingetragen. Dabei ist darauf zu achten, vor alle eingegebenen Gleichungen und Werte ein Gleichheitszeichen „=“ zu setzen, wie dies in Excel-Anwendungen der Fall ist. Nach dem Markieren der unter der Gleichung $z_{n+1}=(z_n)^2+c$ stehenden Zellen und der Aktion „Mit Wert füllen“ errechnet der ClassPad die folgenden Iterationsschritte.

Die Mandelbrotmenge enthält dann alle Werte von c, für die die Folge $(z_n)^2+c$ über Attraktoren verfügt. Unter Attraktoren versteht man in der Mathematik bestimmte Zustände oder Mengen von Zuständen, auf die eine Iteration zustrebt. Die Werte der Attraktoren sind unerheblich. Wichtig ist lediglich, für welche Werte von c in der Gauß-Ebene die Iteration beschränkt ist. Diese Punkte werden nun als Fläche dargestellt. Dadurch ergibt sich Schritt für Schritt die Form des Apfelmännchens und damit die Mandelbrotmenge.

Die standardisierte Reifeprüfung in Österreich und der Einfluss des Technologieeinsatzes

Autorinnen: Mag. Gritt Steinlechner-Wallbach, Mag. Sonja Kramer, Wien

Einleitung

Im Jahr 2008 wurde das Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) vom zuständigen Bildungsministerium mit der Konzipierung und Implementierung einer Prüfungsform für eine standardisierte schriftliche kompetenzorientierte Reifeprüfung beauftragt. Für das Unterrichtsfach Mathematik an Gymnasien erarbeitete eine Arbeitsgruppe am Österreichischen Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik der Universität Klagenfurt unter der Projektleitung von Werner Peschek ein Konzept basierend auf dem gültigen Lehrplan. Ausgangspunkt der Überlegungen war ein bildungstheoretischer Zugang, der nach dem Konzept der „Höheren Allgemeinbildung“ das Individuum und dessen Rolle in unserer hochdifferenzierten, arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft im Umgang mit Mathematik ins Zentrum rückt (vgl. Fischer 2001). Die als wesentlich erachteten Bereiche – sogenannte Grundkompetenzen – im Curriculum des Unterrichtsfaches wurden identifiziert und festgelegt. Im Jahr 2011 erteilte das BIFIE einer Projektgruppe unter der Leitung von Hans-Stefan Siller den Auftrag, das Klagenfurter Konzept (vgl. AECC 2009) weiterzuentwickeln und es zentral erstmals ab dem Jahr 2015 bei der Reifeprüfung Mathematik zum Einsatz zu bringen (vgl. BIFIE 2013, Konzept).

Konzept

Die der Entwicklung des Konzepts zugrunde liegende zentrale Frage lautet: „Was erwartet die Gesellschaft vom Fach Mathematik bzw. vom Mathematikunterricht?“ So standen Überlegungen im Vordergrund, welches Grundwissen für Kandidatinnen und Kandidaten notwendig sei, um mit Mathematik verständig arbeiten und in Kommunikation mit Fachleuten treten zu können.

Es wurde ein Katalog von 73 Grundkompetenzen erstellt. Diese beinhalten traditionell-pragmatische, fachliche und bildungstheoretische Aspekte. Der Katalog ist nach den vier Inhaltsbereichen Algebra und Geometrie, Funktionale Abhängigkeiten, Analysis sowie Wahrscheinlichkeit und Statistik strukturiert. Diese sind wiederum in thematische Abschnitte gegliedert, aus denen die Grundkompetenzen hervorgehen.

Die Aufgaben der standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik müssen, um in einer Klausur der gültigen Leistungsbeurteilungsverordnung gerecht zu werden, unterschiedliche Anforderungen erfüllen. Daher kommen zwei Aufgabentypen zum Einsatz, die Typ-1- und die Typ-2-Aufgaben. In der Reifeprüfungsverordnung ist der verbindliche Einsatz von höherer Technologie ab dem Schuljahr 2017/18 festgelegt. Statt der Ausführung steht die Planung von Problemlösungen im Vordergrund. Die Aufgabenentwicklung richtet sich daher nach dieser Schwerpunktverlagerung vom Operieren weg zum Nutzen von Grundkompetenzen und Reflektieren. Der Einsatz höherer Technologie soll diese Verschiebung ermöglichen.

Typ-1-Aufgaben

Jede Typ-1-Aufgabe bildet genau eine Grundkompetenz ab und wird mit „gelöst“ oder „nicht gelöst“ beurteilt. Typ-1-Aufgaben sind verfahrensbasiert und erfordern keine besondere Transferleistung.

1. Taschengeld

Tim hat x Wochen lang wöchentlich 8 €, y Wochen lang wöchentlich 10 € und z Wochen lang wöchentlich 12 € Taschengeld erhalten.

Aufgabenstellung: Geben Sie in Worten an, was in diesem Zusammenhang durch den Term $\frac{8x+10y+12z}{x+y+z}$ dargestellt wird!

Die hinter dieser Aufgabe stehende Grundkompetenz kommt aus dem Bereich der Algebra und Geometrie und lautet Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können.

2. Technetium

Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop $^{99m}_{43}$Tc (Technetium) künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden.

Aufgabenstellung: Geben Sie an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums nur noch ein Viertel vorhanden ist!

Die Grundkompetenz, der diese Aufgabe zugeordnet wird, kommt hier aus dem Bereich der funktionalen Abhängigkeiten: die Begriffe Halbwertszeit und Verdopplungszeit kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können.

Werden die Lösungsquoten dieser Typ-1-Aufgaben verglichen, so hatte die erste Aufgabe eine hohe Lösungsquote (ca. 92 %) und wurde von Mädchen und Jungen gleichermaßen gut gelöst. Die zweite Aufgabe hingegen fiel deutlich schlechter aus (ca. 66 %) und zählte zu jenen, bei denen sehr deutlich war, dass die Kandidaten mit dieser Aufgabe besser zurechtkamen als die Kandidatinnen. Gründe dafür könnten einerseits an der offenen Fragestellung, andererseits am naturwissenschaftlichen Hintergrund liegen.

Typ-2-Aufgaben

Die Typ-2-Aufgaben werden als verfahrensbildend bezeichnet. Durch die Analyse eines einleitenden Textes muss eine Lösungsstrategie entwickelt werden. Damit heben Typ-2-Aufgaben die bildungstheoretische Orientierung des Konzepts hervor und bieten darüber hinaus Anlässe zur Reflexion. Bei Aufgaben dieses Typs sollen Schülerinnen und Schüler ihre Eigenständigkeit und Fähigkeit zur Vernetzung verschiedener mathematischer Aspekte unter Beweis stellen. Das bloße Trainieren von Aufgaben mit gleichartiger Problemstellung und direkt übertragbarem Lösungsweg ist deshalb nicht zweckmäßig.

Einfluss der Technologie

Ab dem Haupttermin 2018 ist die Verwendung elektronischer Hilfsmittel mit bestimmten Mindestanforderungen verpflichtend. Dazu wurde der Grundkompetenzkatalog durch ergänzende Anmerkungen angepasst (vgl. BIFIE 2015, Konzept) und es werden Aufgaben entwickelt, bei denen höhere Technologie als Werkzeug beim Modellieren und Visualisieren sinnvoll zum Einsatz kommen kann. Die Nutzung höherer Technologie ist für den gesamten Klausurzeitraum erlaubt. An den einzelnen Schulstandorten mussten daher Entscheidungen hinsichtlich der jeweils geeigneten Software getroffen werden. Technologieeinsatz, Reflektieren und Modellbilden treten zusehends in den Fokus eines modernen Mathematikunterrichts und sind ein wesentlicher Beitrag zur Unterrichtsentwicklung. Zwar ist der Einsatz höherer Technologie seit 2004 im Lehrplan festgehalten und somit eine wichtige Grundlage für das Konzept, doch bekommt der Technologieeinsatz durch die Anforderungen bei der standardisierten Reifeprüfung 2018 mehr Gewicht. Der Unterricht, die Übungs- und Prüfungsaufgaben müssen entsprechend adaptiert und eine kritische Auseinandersetzung mit der Sinnhaftigkeit des Technologieeinsatzes angeregt werden.

Quellen: Sie finden die Quellenangaben des Artikels in der Materialdatenbank unter www.casio-schulrechner.de.

Oszillierender Newton

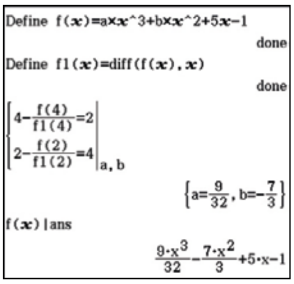
Autor: Arnold Zitterbart, Triberg

In dem neuen Mathematik-Bildungsplan für Baden-Württemberg wurde wieder ein Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungen aufgenommen. Fällt die Entscheidung auf die Erarbeitung des Newton-Verfahrens, so lohnt es sich auch darüber nachzudenken, dass bei geeigneten Beispielen das Newton-Verfahren nicht zwangsläufig konvergiert. In den Schulbüchern finden sich Beispiele, bei denen ein Startwert, der zu weit von der gesuchten Nullstelle entfernt ist, zu einem divergierenden Newton-Verfahren führt oder zu Iterationswerten, die außerhalb des Definitionsbereichs der betrachteten Funktion liegen.

Im Folgenden wird ein Beispiel konstruiert, das zwischen den beiden Werten 4 und 2 oszilliert, d.h., der Startwert $x_0 = 4$ führt auf den Iterationswert $x_1 = 2$ und dieser wiederum auf $x_2 = 4$. Wegen der Symmetrie des Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades wird in dieser Funktionenklasse nach einem geeigneten Beispiel gesucht. Das Beispiel muss die beiden folgenden Gleichungen erfüllen:

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 \quad \text{und} \quad x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_0$$

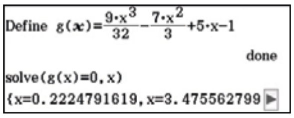
Daher wird als Ansatz eine ganzrationale Funktion 3. Grades gewählt, bei der es nur zwei Koeffizienten als Parameter gibt.



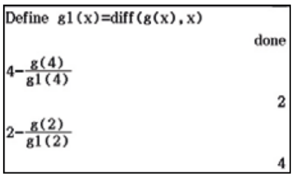
Im Folgenden wird überprüft, ob das Newton-Verfahren für die Funktion g mit

$$g(x) = \frac{9}{32}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + 5x - 1$$

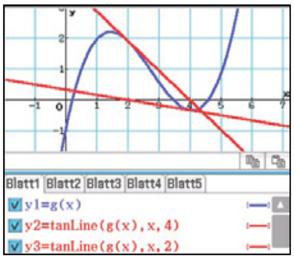
zwischen 4 und 2 oszilliert.



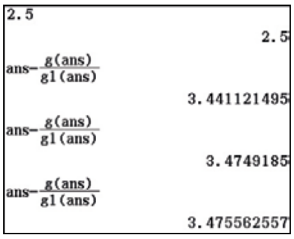
Der ClassPad liefert eine Nullstelle bei $x \approx 3{,}48$, sodass der Startwert $x_0 = 4$ für das Newton-Verfahren sinnvoll erscheint. Werden allerdings die Iterationswerte x_1 und x_2 berechnet, wird sofort deutlich, dass das Verfahren zwischen den Werten 4 und 2 alterniert.



Visualisierung:



Wird das Newton-Verfahren mit dem Startwert 2,5 durchgeführt, konvergiert der Algorithmus:



Mathematik verstehen

Nachdem letztes Schuljahr bereits zwei Bände CASIO Technologietraining für die 9. und 10. Schulstufe (in Österreich 5. und 6. Schulstufe) zur Lehrbuchserie „Mathematik verstehen" des öbv-Verlages erschienen sind, gibt es nun auch die Bücher für die Schulstufen 11 und 12.

Jedes Heft begleitet das entsprechende Schulbuch in idealer Weise anhand des ClassPad II. Der Umgang mit dem Gerät wird für sämtliche Themengebiete des Jahrgangs in sinnvollem Umfang und einer klaren, nachvollziehbaren Sprache dargestellt.

Durch diese „Schritt für Schritt"-Anleitung ist das Buch für das Selbststudium, die Vor- und Nachbereitung und als Nachschlagewerk geeignet. Es enthält eine Übersicht der verwendeten Befehle mit einer Musteraufgabe, das Inhaltsverzeichnis verweist auf konkrete Themenbereiche. Weil sämtliche Beispiele ausführlich erklärt und durchgerechnet werden, kann es auch unabhängig vom Lehrwerk eingesetzt werden.

Fahrenheit und Celsius

Autor: Prof. Dr. Heinrich Hemme, Fachhochschule Aachen

Die Fahrenheitskala wurde um 1714 von dem deutschen Physiker und Instrumentenbauer Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736) entwickelt. Bei dieser Temperaturskala sind der Gefrier- und der Siedepunkt des Wassers mit 32° F und 212° F festgelegt. Sie ist heute nur noch in Nordamerika gebräuchlich. Bei der Celsiusskala hingegen entsprechen dem Gefrier- und dem Siedepunkt des Wassers Temperaturen von 0° C und 100° C. Sie wurde 1742 von dem schwedischen Astronomen Anders Celsius (1701-1744) eingeführt. Daraus resultiert die Umrechnungsformel von einer Celsiustemperatur C in eine Fahrenheittemperatur F zu $F = 1{,}8° C + 32$.

Bestimme die positiven ganzzahligen Celsiustemperaturen, die sich in die korrekte positive ganzzahlige Fahrenheittemperatur umwandeln lassen, indem einfach die letzte Stelle der Celsiustemperatur an ihren Anfang verschoben wird. Beispielsweise würde aus 2147° C mit dieser Methode 7214° F werden. Dennoch ist dies keine Lösung der Aufgabe, denn 2147° C ist nicht die gleiche Temperatur wie 7214° F.

Die Querverbindung eines Tors wird konstruiert

Autorin: Heide Soose, Kassel

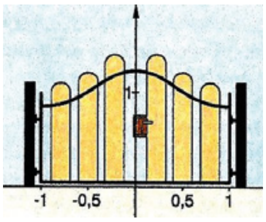


Bild 1

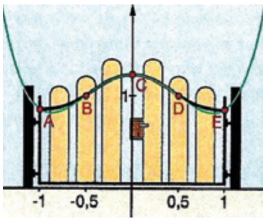


Bild 2

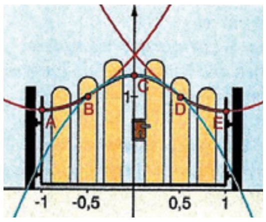


Bild 3

Das Tor im Bild 1 hat im oberen Bereich eine gebogene Querverbindung, die mathematisch modelliert werden soll. Beschreiben Sie anhand der Abbildungen 2 und 3 die verwendeten Modellansätze.

Die Punkte sind gegeben durch A(-1|0,85), B(-0,5|1), C(0|1,23), D(0,5|1), E(1|0,85). Diskutieren Sie die Qualität der Ergebnisse. Modellieren Sie den Torbogen mithilfe eines Splines.

Lösung

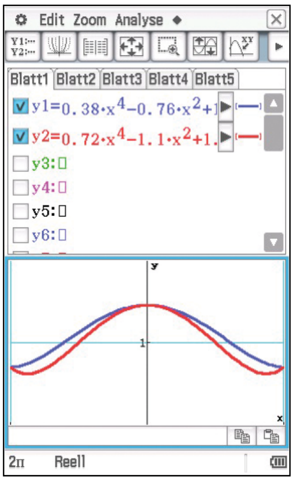
Bild 2 zeigt eine (achsensymmetrische) Funktion 4. Grades. Werden die Punkte C und E sowie die Eigenschaft, dass bei E ein Tiefpunkt vorliegen soll, benutzt, ergibt sich die Funktion

$f(x) = 0{,}38x^4 - 0{,}76x^2 + 1{,}23$

Bei den Punkten C, D und E ergibt sich

$f(x) = 0{,}72x^4 - 1{,}1x^2 + 1{,}23$

Als Ergebnis sollten die Schüler erkennen, dass es bei der Rekonstruktion nicht unerheblich ist, welche Bedingungen benutzt werden!



Bei Bild 3 soll die Querverbindung durch drei quadratische Funktionen beschrieben werden.

Funktion 1: Scheitelpunkt bei A, der Punkt B liegt auf dem Graphen

$p1(x) = 0{,}6(x+1)^2 + 0{,}85$

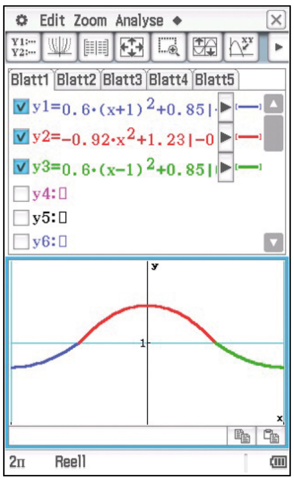
Funktion 2: Scheitelpunkt bei C, Punkt B liegt auf dem Graphen

$p2(x) = -0{,}92x^2 + 1{,}23$

Funktion 3: Scheitelpunkt bei E, und Punkt D liegt auf dem Graphen

$p3(x) = 0{,}6(x-1)^2 + 0{,}85$

Hier ist gut zu erkennen, dass die Übergänge der Funktionen nicht optimal sind.



Der Torbogen kann auch mithilfe kubischer Splines modelliert werden. Hierzu werden vier Funktionen dritten Grades benötigt, z.B.

$f(x) = r_1x^3 + s_1x^2 + t_1x + u_1$
$g(x) = r_2x^3 + s_2x^2 + t_2x + u_2$
$h(x) = r_3x^3 + s_3x^2 + t_3x + u_3$
$i(x) = r_4x^3 + s_4x^2 + t_4x + u_4$

Diese werden mit dem ClassPad definiert, ebenso deren Ableitungen.

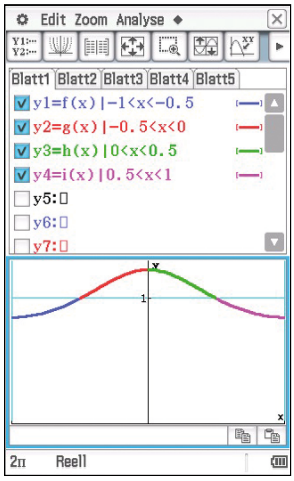
Mithilfe eines LGS

$f(-1) = 0{,}85$, $f(-0{,}5) = g(-0{,}5) = 1$, $f'(-0{,}5) = g'(-0{,}5)$, $f''(-0{,}5) = g''(-0{,}5)$, $g(0) = h(0) = 1{,}23$, $g'(0) = h'(0)$, $g''(0) = h''(0)$, $h(0{,}5) = i(0{,}5) = 1$, $h'(0{,}5) = i'(0{,}5)$, $h''(0{,}5) = i''(0{,}5)$, $i(1) = 0{,}85$, $f''(-1) = 0$, $i''(1) = 0$ mit 16 Variablen (!!) können diese bestimmt werden. Es ist hilfreich, über Listen die Ergebnisse des LGS den Variablen zuzuordnen.

Es ergibt sich:

$f(x) = -0{,}12x^3 + 0{,}3x^2 + 0{,}96x + 1{,}39$
$g(x) = -1{,}4x^3 - 1{,}62x^2 + 1{,}23$
$h(x) = 1{,}4x^3 - 1{,}62x^2 + 1{,}23$
$i(x) = 0{,}12x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}96x + 1{,}39$

An dieser Stelle kann nun thematisiert werden, wie sich aufgrund der Symmetrie die beiden Funktionen h(x) und i(x) aus f(x) und g(x) erschließen lassen.



Im Anschluss können auch die Modellierungen mit den Polynomen 4. Grades und die Splinemodellierung verglichen werden.

Eine andere Möglichkeit ist es, aus den gegebenen Punkten mittels Regression eine Funktionsgleichung zu erstellen: $f(x) = 0{,}72x^4 - 1{,}1x^2 + 1{,}23$. Dies entspricht der Funktion, die sich bei der Rekonstruktion durch die Punkte C, D und E ergibt.

Da der Torbogen sowohl durch Rekonstruktion (hier mit Funktionen 4. bzw. 2. Grades), Regression als auch durch Splines modelliert werden kann, ist auch eine Aufteilung der Schulklasse in Gruppen mit unterschiedlichem Arbeitsauftrag gut vorstellbar. Eventuell kann auch noch eine Rekonstruktion durch eine Kosinusfunktion in Betracht kommen.

Die Ergebnisse sollten auch hinsichtlich des Aufwandes zur Lösungsfindung verglichen werden. Aufgrund der Komplexität ist die Behandlung von Splines eher für den Leistungskurs geeignet.

Quelle:
Neue Wege Analysis, Schroedel 2010, S.152

ClassWiz: Übersicht zur Umrechnung verschiedener Einheiten (Teil 2)

Autor: Lutz Blöser, Frankfurt

Schaut man im ClassWiz unter „CONV“ (Shift 8) nach, öffnet sich ein umfangreiches Menü mit 21 Unterpunkten zur Umrechnung verschiedener Einheiten. Im letzten CASIO forum waren die Umrechnungen zu Länge, Winkel und Beschleunigung erklärt. Hier folgen nun Fläche und Volumen: Abschnitt 6 zur Masse finden Sie in der Materialdatenbank.

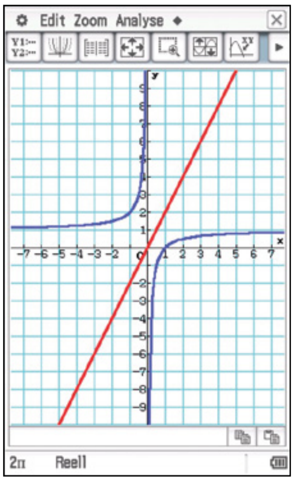
ClassWiz (engl.)	Anwahl	Abkürzung	deutsch	Erklärung	Umrechnung in SI-Einheiten (mks-System, Meter-Kilogramm-Sekunde)
4. Fläche					
acre (usw)	↑8.2.1	acre (ac)	Acre	Acre (Acker) ist ein Flächenmaß des englischen Maßsystems, basiert auf dem u.s.survey-foot (= 0,3048006m) 1 acre = 4840 square yards = 43560 square feet	1 acre = 4046,856 m²
barn	↑8.4.3	b	Barn	Barn war bis 31.12.1977 eine gesetzliche Einheit für die Angabe von Wirkungsquerschnitten in der Kernphysik	1 b = $1\cdot10^{-28}$ m²
are	↑8.4.5	a	Ar	Ar ist ein metrisches Flächenmaß bei der Angabe der Fläche von Grundstücken (Quadratdekameter) 1 a = 1 dam² = 100 m²	1 a = $1\cdot10^{2}$ m²
hectare	↑8.4.7	ha	Hektar	Ein Hektar ist das Hundertfache eines Ar. 1 ha = (100m)² = 100 a	1 ha = $1\cdot10^{4}$ m²
square feet	↑8.4.9	ft²	Quadratfuß	Quadratfuß entspricht der Fläche eines Quadrates mit 1 Fuß Seitenlänge. 1 ft² = 144 in²	1 ft² = 0,09290304 m²
square inch	↑8.4.B	in²	Quadratzoll	Quadratzoll ist eine Flächeneinheit und entspricht der Fläche eines Quadrats mit einem Zoll Kantenlänge.	1 in² = 6,4516 cm²
square miles	↑8.2.↓.1	mile²	Quadratmeile	Als square mile wird sie vor allem in den USA angewandt. Eine Quadratmeile ist dort die Fläche eines Quadrates mit der Kantenlänge 1 Meile („statute mile“; im Gegensatz zur „nautical mile“ → Seemeile) 1 mile² = 640 acre = 27878400 ft²	1 mile² = 2,589988 km²
5. Volumen					
gallon (US)	↑8.3.1	gal (us)	amerikanische Gallone	Die US-amerikanische Gallone basiert auf einem mittelalterlichen englischen Weinmaß, das als ein Zylinder mit der Höhe 6 Zoll und dem Durchmesser 7 Zoll definiert wurde. π wurde mit 22/7 approximiert. 1706 wurde die Weingallone redefiniert als Quader mit einer Abmessung von (3 × 7 × 11) inch³, was dem alten Zylindervolumen, entspricht (π = 22/7). 1 gal (us) = 128 fl oz (us) = 231 in³	3,785412 L = $3{,}785412\cdot10^{-3}$ m³
gallon (UK)	↑8.3.3	gal (uk)	englische Gallone	Die britische Gallone basiert auf einem mittelalterlichen englischen Biermaß. 1824 neu definiert als das Volumen von 10 englischen Pfund destilliertem Wasser bei 62° F (17° C), gemessen mit Messingstücken einer definierten Zusammensetzung bei festgelegtem Luftdruck. 1985 Neudefinition basierend auf dem metrischen Liter. 1 gal (uk) = 160 fl oz (uk) = 568261250/2048383 in³	4,54609 L = $4{,}54609\cdot10^{-3}$ m³
Liter	↑8.3.5	L	Liter	Ein Liter entspricht dem Volumen eines Kubikdezimeters (dm³). Der Liter gehört nicht zum Internationalen Einheitensystem (SI), ist zum Gebrauch mit dem SI aber zugelassen.	1 L = $1\cdot10^{-3}$ m³
bushel (US)	↑8.3.7	bu	Scheffel	Im Handel wird das Bushel heute als äquivalentes Gewichtsmaß verwendet. Da die USA zu den größten Getreideerzeugern zählen, hat „bushel“ als Maß zur Bestimmung der Masse einer Getreidemenge weltweite Bedeutung. Wenn Getreidepreise pro Scheffel angegeben werden, ist dieses „bushel“ gemeint. 1 bu = 2150,42 in³	1 bu = 35,23907 L = $35{,}23907\cdot10^{-3}$ m³
barrel (US)	↑8.3.9	bbl	Barrel	Barrel wird als Volumenmaß bei Erdölprodukten verwendet. Näherung für Erdöl (Dichte 0,8617 kg/L): 7,3 bbl ≈ 1 Tonne Erdöl, 1 bbl = 42 gal (US) = 9702 in³	1 bbl = 158,9873 L = $158{,}9873\cdot10^{-3}$ m³
ton, register	↑8.3.B	ton	Bruttoregistertonne (BRT)	Um ein Wertmaß für Handelsschiffe zu erhalten, werden diese vermessen. Da sich der Beladungszustand oft ändert, genügt es nicht, die Wasserverdrängung als Maßstab heranzuziehen: Der gesamte umbaute Schiffsraum wird bestimmt und die Mannschafts- und Maschinenräume subtrahiert. 1 ton = 100 ft³	1 ton = 2,831685 m³
fluid ounce (US)	↑8.3.↓.1	fl oz (US)	Flüssigkeits-Unze (us)	Die Flüssigkeits-Unze (fluid ounce) mit dem Einheitenzeichen fl oz ist ein Raummaß für Flüssigkeiten. Es findet z.B. beim Abmessen von Parfüm Verwendung. Manchmal wird nur oz geschrieben, womit eine Verwechslungsgefahr mit der Gewichtseinheit Unze (ounce) entsteht (→ Masse)1 fl oz (us) = 1/128 gal (us)	1 fl oz (US) = 29,57353 mL = $29{,}57353\cdot10^{-6}$ m³
fluid ounce (UK)	↑8.3.↓.3	fl oz (UK)	Flüssigkeits-Unze (uk)	(wie fluid ounce us) 1 fl oz (uk) = 1/160 gal (uk)	1 fl oz (UK) = 28,41306 mL = $28{,}41306\cdot10^{-6}$ m³
cubic foot	↑8.3.↓.5	ft³	Kubikfuß (auch cft)	Der englische Kubikfuß ist ein oft im Schiffsbau verwendetes Raummaß, dem der englische Fuß (0,3048 m) zugrunde liegt. 1 ft³ = 1728 in³	1 ft³ = 0,02831685 m³
cubic inch	↑8.3.↓.7	in³	Kubikzoll (auch cui)	Ein Würfel mit einem Zoll Kantenlänge besitzt das Volumen ein Kubikzoll.	1 in³ = $1{,}638706\cdot10^{-5}$ m³

Vielfältige Lösungsansätze

Autor: Gunther Gageur, CASIO Educational Team

Oft gelten Aufgaben als besonders gelungen, wenn sie sich auf unterschiedlichen Wegen lösen lassen. Auch der Einsatz von Grafik- oder CAS-Rechnern kann die Anzahl der Wege erweitern, wie sich an folgender Aufgabe zeigt:

Bestimme den Punkt auf dem Graphen von $g(x)=1-\frac{1}{x};\ x\neq 0$, der den kleinsten Abstand zur Geraden mit der Gleichung $y=2x$ besitzt. Wie groß ist dieser Abstand? (Runde auf zwei Dezimalstellen.)



1. Ansatz: Allgemeiner Abstand von Gerade und Kurve

$g(x)=2x$

$$f(a)=1-\frac{1}{a}$$

$$d^2(x)=(x-a)^2+\left(2x-\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)^2$$

$$d^{2\,\prime}(x)=0 \text{ bei } x=0{,}2a+0{,}4-\frac{0{,}4}{a}$$

$$d^2(x)=(x-a)^2+\left(2x-\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)^2$$

$$\left|\ x=0{,}2a+0{,}4-\frac{0{,}4}{a}\right.$$

$$d^2(a)=0{,}2\cdot\frac{(2a^2-a+1)^2}{a^2}$$

$$d^{2\,\prime}(a)=0 \text{ bei } a_1=-\sqrt{0{,}5} \text{ und } a_2=\sqrt{0{,}5}$$

$d(a_1)=1{,}71$ und $d(a_2)=0{,}82$

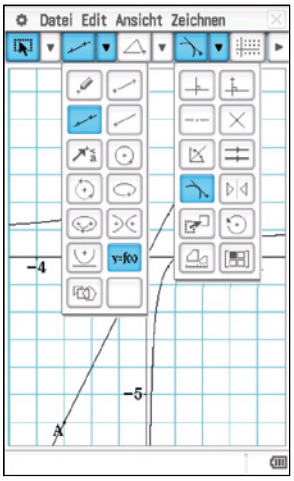
2. Ansatz: Dynamische Geometrie-Software

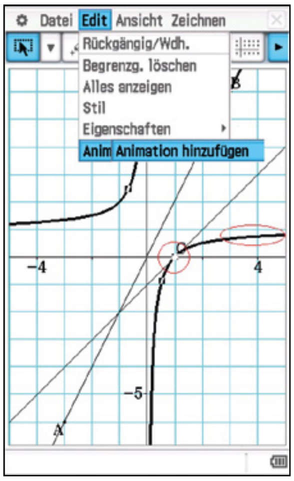
Die Aufgabe kann auch in der dynamischen Geometrie-Software gelöst werden.

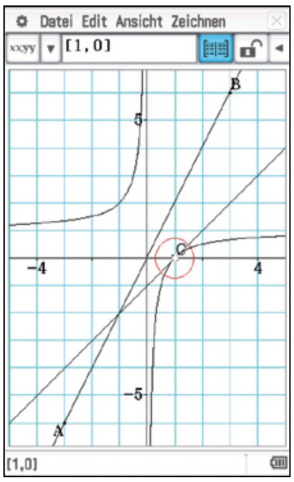
Die Gerade durch zwei Punkte sowie die Funktion zeichnen und eine Tangente an die Kurve konstruieren.

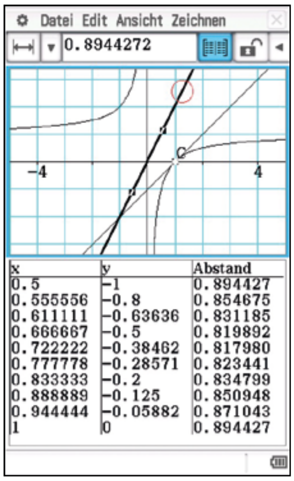
Animieren: Berührpunkt und Kurve markieren, Edit, Animieren, Animation hinzufügen.

Messen: Pfeil nach rechts, Berührpunkt markieren, Wertetabelle seiner Koordinaten erstellen, die Gerade zusätzlich markieren, eine Wertetabelle der Abstände erstellen, das Ergebnis in der Tabelle ablesen.









3. Ansatz: Tangentensteigung = Geradensteigung

So, wie der Abstand von Kurve und x-Achse minimal ist, wenn Kurventangente und Achse parallel liegen, müssen auch Kurventangente und Gerade an der Stelle des kürzesten Abstandes parallel verlaufen. Deshalb gilt es nur die Stelle zu finden, an der die Tangentensteigung gleich der Geradensteigung ist, also gleich 2.

$$f(x)=1-\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x)=2 \text{ bei } x_1=-\sqrt{0{,}5} \text{ und } x_2=\sqrt{0{,}5}$$

Aus der Berechnung des Abstandes von Punkt und Gerade im 3-dimensionalen Fall oder durch geometrische Überlegungen ergibt sich für den 2-dimensionalen Fall: Gegeben ist der Punkt P (a,b) und die Gerade $y=mx+n$. Dann ist der Abstand des Punktes von der Geraden

$$A=\frac{m\cdot a-b+n}{\sqrt{m^2+1}}\text{, also hier } A(a)=\frac{2a-1+\frac{1}{a}}{\sqrt{5}}$$

Hier ist $P_1=\left(-\sqrt{0{,}5}\,|\,1+\sqrt{2}\right)$ und

$P_2=\left(\sqrt{0{,}5}\,|\,1-\sqrt{2}\right)$, $m=2$ und $n=0$, also ist der Abstand zwischen Punkt und Geraden:

$$\frac{2\cdot(-\sqrt{0{,}5})-1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\approx -1{,}71$$

$$\frac{2\cdot(\sqrt{0{,}5})-1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\approx 0{,}82$$

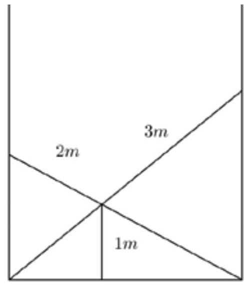
Lösung zum Rätsel der Ausgabe 2/2017

Leiteraufgaben

Autor: Dr. Wolfgang Ludwicki, Tangermünde

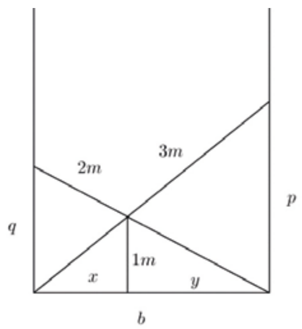
Knobelei 1

Zwei Leitern stehen quer in einem Flur und kreuzen sich in einer Höhe von 1 m. Die eine Leiter ist 2 m lang die andere 3 m. Berechne die Breite des Flures.



Lösung:

Die 2-m-Leiter lehnt in der Höhe *q* an der Wand, die andere Leiter an der anderen Wand in der Höhe *p*. Der Fußpunkt des Lotes vom Kreuzungspunkt der Leitern auf den Fußboden zerlegt die Flurbreite *b* in die Teilstrecken *x* und *y* (siehe Zeichnung).



Aufgrund des Strahlensatzes gelten: $y:1=b:q$ und $x:1=b:p$, also auch $y=\frac{b}{q}$ und $x=\frac{b}{p}$.

Nach dem Satz des Pythagoras gelten: $b^2+q^2=2^2$ und $b^2+p^2=3^2$, also

$q=\sqrt{4-b^2}$ und $p=\sqrt{9-b^2}$.

Da $b=x+y$, gilt $b=\frac{b}{p}+\frac{b}{q}$ und

$$b=\frac{b}{\sqrt{9-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{4-b^2}}.$$

Für $b\neq 0$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$1=\frac{1}{\sqrt{9-b^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-b^2}}. \qquad (*)$$

Durch zweimaliges Quadrieren folgt als notwendige Bedingung für *b* die Gleichung $b^8-22b^6+163b^4-454b^2+385=0$.

Mittels der Substitution $z=b^2$ entsteht daraus die biquadratische Gleichung

$z^4-22z^3+163z^2-454z+385=0$,

die mit dem CASIO FX-991DE X gelöst wird.

$z_1\approx 3{,}508741701,$
$z_2\approx 1{,}515818286,$
$z_{3,4}\approx 8{,}49\pm 0{,}59i.$

Damit ergeben sich als mögliche Werte für *b*

$b_1=\sqrt{z_1}\approx 1{,}8732$ und

$b_2=\sqrt{z_2}\approx 1{,}2312.$

Die Probe zeigt, dass

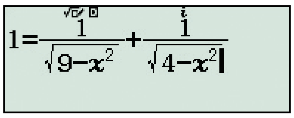
$$\frac{1}{\sqrt{9-z_1}}+\frac{1}{\sqrt{4-z_1}}\approx 1{,}85$$

und

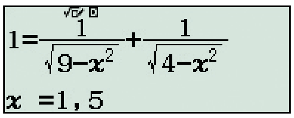
$$\frac{1}{\sqrt{9-z_2}}+\frac{1}{\sqrt{4-z_2}}=1.$$

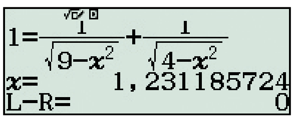
Folglich hat der Flur etwa die Breite 1,23 m.

Die Lösung der Gleichung (*) ist auch mit dem SOLVE-Befehl des FX-991DE X möglich. Die Gleichung wird dazu als



eingegeben. Da die Breite des Flures positiv und kleiner als 2 m ist, kann $x=1{,}5$ als sinnvoller Startwert gewählt werden.

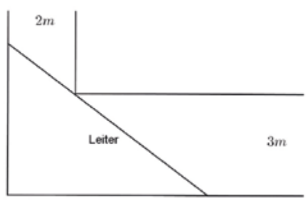




Es ergibt sich die Lösung
$x\approx 1{,}23$, also $b\approx 1{,}23\,m$.

Knobelei 2

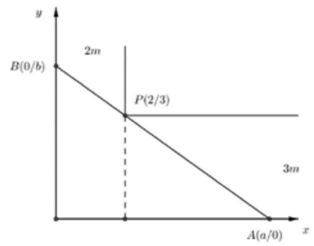
Eine Leiter soll einen Flur der Breite 3 m entlang getragen werden. Unglücklicherweise verläuft der Flur am Ende rechtwinklig mit der Breite 2 m weiter. Wie lang darf eine Leiter sein, damit sie gerade noch horizontal um die Ecke getragen werden kann?



Lösung:

Lösungsweg 1

Es wird ein Koordinatensystem eingeführt, wie in der Zeichnung angedeutet.



Es handelt sich hierbei um eine Extremwertaufgabe: Von allen Strecken *AB*, die durch den Punkt *P* gehen, ist die kürzeste gesucht. Aufgrund des Strahlensatzes gilt

$a:b=(a-2):3$, also $b=\frac{3a}{a-2}$.

Mithilfe des Satzes von Pythagoras folgt

$$|AB|^2=a^2+\left(\frac{3a}{a-2}\right)^2=\frac{a^4-4a^3+13a^2}{(a-2)^2}.$$

Da $|AB|>0$, wird $|AB|$ genau dann minimal, wenn $|AB|^2$ minimal wird. Der Wert $|AB|^2$ nimmt dort Extremwerte an, wo

$\frac{d\left(|AB|^2\right)}{d\,a}=0$ ist, also

$$\frac{d\left(|AB|^2\right)}{d\,a}=\frac{2a^4-12a^3+24a^2-52a}{(a-2)^3}=0.$$

Diese Ableitung wird genau dann null, wenn $a=0$ oder $a^3-6a^2+12a-26=0$ ist.
Der FX-991DE X zeigt an, dass die kubische Gleichung nur eine reelle Lösung $a\approx 4{,}621$ hat. Somit darf die Leiter maximal etwa

$\sqrt{4{,}621^2+\left(\frac{3\cdot 4{,}621}{4{,}621-2}\right)^2}$ lang sein,

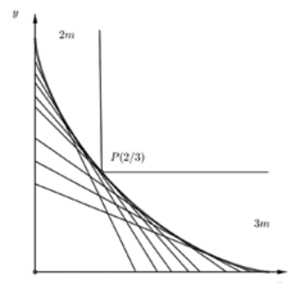
also $\approx 7{,}023$ m.

Lösungsweg 2

Die Strecken *AB* mit der festen Länge *c* sind die Einhüllenden der Astroiden (Sternkurve) mit der Gleichung
$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$.

Der Wert *c* der Astroide, die durch den Punkt *P*(2|3) geht, liefert die Länge der Leiter, die gerade noch um die Ecke getragen werden kann, d.h.

$$c=\left(2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\approx 7{,}023\,m.$$



Lehrer-Info-Service

Maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte

Die kontinuierliche Bereitstellung von Unterrichtsmaterial, das zum einen mit den Anforderungen der Lehrpläne in den Bundesländern harmoniert und zum anderen den Einsatz und die Bedienung der Schulrechner erleichtert, ist ein Herzstück des Lehrersupports von CASIO. Dafür steht CASIO in regelmäßigem Austausch mit Mathematiklehrkräften.

Informationsaussand zum Beispiel zu folgenden Themen:

- CASIO forum mit vielen Aufgabenbeispielen und Unterrichtseinheiten
- Informationen zu regionalen Veranstaltungen
- Neuerungen in den Zulassungsrichtlinien
- bundeslandspezifische Angebote
- Lehrerspezial holt reale Alltagsthemen in den Mathematikunterricht

Das Feedback aus der Lehrerschaft zeigt – ein Service, der geschätzt wird.

Anmeldung

Sie möchten ebenfalls maßgeschneiderte Informationen für Mathematiklehrkräfte erhalten – dann sind Sie herzlich beim Lehrer-Info-Service von CASIO willkommen. Ob per Post oder per E-Mail – Sie entscheiden selbst, wie Sie von CASIO kontaktiert werden möchten und haben jederzeit die Gelegenheit, sich auch wieder abzumelden.

Anmeldung im Netz

Unter dieser Web-Adresse können Sie unsere Informationen abonnieren:
www.casio-schulrechner.de/lehrer-info-service

Anmeldung per QR-Code

Scannen Sie einfach den **QR-Code**.

Kontakt

Educational Team

Unsere Spezialisten rund um das Thema Schulrechner von CASIO und deren Einsatz im Mathematikunterricht stehen Ihnen bei Fragen jederzeit zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-0
Fax: +49 (0)40/528 65-100
E-Mail: education@casio.de
Homepage: www.casio-schulrechner.de

CASIO European Support Center

Für Beratung und technische Informationen wenden Sie sich an das CASIO European Support Center:
Telefon: +49 (0)40/528 65-802
Fax: +49 (0)40/528 65-888
E-Mail: support_center@casio.de

Anfragen zu Reparaturen

Bei Fragen rund um das Thema Reparatur stehen Ihnen Experten unter folgenden Kontaktdaten zur Verfügung:
Telefon: +49 (0)40/528 65-203
Fax: +49 (0)40/528 65-242
E-Mail: repair@casio.de

Testsoftware und Updates zum Herunterladen

Übersicht über die aktuellen Betriebssystemversionen (OS)

Die Updates sowie die Testsoftware stehen zum kostenlosen Herunterladen auf unserer Internetseite bereit: **edu.casio.com**

Gerät	OS-Version
ClassPad II	2.01.2000
ClassPad 330 Plus	3.10.6000
FX-CG20/50	3.10
FX-9860GII	2.09
Software	
ClassPad II Manager Subscription (Android/IOS)	2.01.2003
ClassPad Manager	3.06.6000
FX-CG20/50 Manager	3.10
FX-Manager Plus	2.09
ClassWiz Emulator Subscription	2.00

Stand: Dezember 2017

Lehrersupport

CASIO Support für Lehrer!

Ob technisch-wissenschaftlicher Rechner oder Grafikrechner – mit dem umfangreichen Support-Programm von CASIO unterstützt Sie das Educational Team bestens bei der Auswahl des passenden Schulrechners bis hin zur Gestaltung Ihres Unterrichts.

Support-Programm

- Referenzschulen
- Lehrer-Workshops
- Lehrer-Info-Service (u.a. CASIO forum)
- Leihprogramme
- Prüfangebote
- Literatur
- Materialdatenbank

Impressum

Herausgeber:
CASIO Europe GmbH
Casio-Platz 1 • 22848 Norderstedt
Tel.: 040/528 65-0 • Fax: 040/528 65-535

Bildquellen:
S. 1: M. Mettin, Offenbach; www.m-momente.de

Redaktion:
Gerhard Glas und Armin Baeger
CASIO Educational Team • education@casio.de

Design:
CONSEQUENCE
Werbung & Kommunikation GmbH, HH

4 549526 602498
118SGR-FORUM23-DE