Simulation des Ziegenproblems

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:
Es wird beschrieben, wie man mit dem Ziegenproblem in das Thema „Wahrscheinlichkeit“ einsteigen kann. Dabei wird das Ziegenproblem zunächst wie beim Quiz real nachgespielt und dann mit Hilfe des GTR simuliert. Die Daten werden dann mit dem GTR ausgewertet und die Ergebnisse der Simulation mit den anfänglichen Vermutungen der Schülerinnen und Schüler verglichen.

Klassenstufe(n):
Klasse 7 bis 10

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- erkennen, dass man mit Hilfe von Simulationen Probleme lösen kann;
- lernen, wie man mit Hilfe des GTR Zufallsexperimente simulieren und auswerten kann.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Die Schülerinnen und Schüler hatten noch keine Vorkenntnisse. Sie erwarben sich jedoch bei dieser Simulation folgende Kenntnisse:

- Erzeugung von ganzzahligen Zufallszahlen
- Erzeugung einer Liste im *STAT*-Menü
- Vergleich zweier Listen
- Bildung der Summe von Listeneinträgen
- Erzeugung eines Histogramms
- „Tracen“ auf einem Histogramm, um die Werte ablesen zu können

Zeitbedarf:
Zwei Unterrichtsstunden (jeweils 45 Minuten)

Sonstige Materialien:

- Zwei Ziegen aus Kunststoff und ein Spielzeugauto, um das Spiel, das zum Ziegenproblem führte, vorführen zu können.
- Einige 5-Cent-Münzen und 10-Cent-Münzen, sowie einige kleine Schachteln, damit die Schülerinnen und Schüler in Gruppen das Spiel (ohne GTR) simulieren können.

Begleittext

Das Ziegenproblem erhielt im Jahr 1990 weltweit, und nicht nur unter Mathematikern, große Aufmerksamkeit. Fast in allen Medien wurde über dieses Problem und dessen Lösung kontrovers diskutiert. Dies lag vor allem auch daran, dass die Aufgabenstellung zwar schnell verständlich ist, die Aufgabe aber oft intuitiv falsch gelöst wird.

In der Unterrichtseinheit wird beschrieben, wie man mit dem Ziegenproblem in das Thema „Wahrscheinlichkeit“ einsteigen könnte. Zum einen ist die Aufgabenstellung von den Schülerinnen und Schülern schnell zu erfassen, und zum anderen ist die Lösung für viele Schülerinnen und Schüler überraschend. Es besteht Raum zum Aufstellen von Vermutungen und Einfordern von Begründungen. Insbesondere ist es eine Lösungsstrategie das Quiz nachzuspielen bzw. zu simulieren. Man wird am Anfang das Quiz zunächst real nachspielen, damit die Schülerinnen und Schüler die Situation besser durchdringen können. Um eine genügend große Anzahl von Spielen zu erhalten, bietet sich dann eine Simulation mit dem GTR an. Dies müssen die Schülerinnen und Schüler natürlich zuerst lernen, aber da bei dieser Aufgabenstellung die Motivation im Allgemeinen sehr hoch ist, lassen sich die Schülerinnen und Schüler gerne darauf ein.

Aufgabenstellung

Bei einer Quiz-Show kann man ein Auto gewinnen. Die Spielregeln für das Quiz sind folgende:

- Es gibt drei verschlossene Tore. Hinter zwei Toren befindet sich jeweils eine Ziege und hinter einem Tor ein Auto.
- Der Quizmaster weiß, hinter welchem Tor sich das Auto befindet.
- Der Kandidat muss sich für ein Tor entscheiden (das jedoch nicht sofort geöffnet wird).
- Nachdem sich der Kandidat für ein Tor entschieden hat, öffnet der Quizmaster eines der beiden Tore, die der Kandidat nicht ausgewählt hat und hinter dem sich eine Ziege befindet.
- Anschließend fragt er den Kandidaten: Bleiben Sie bei Ihrer Wahl, oder wollen Sie das Tor wechseln?
- Befindet sich hinter dem geöffneten Tor das Auto, so gehört es ihm.

Wie soll sich der Kandidat entscheiden, damit seine Gewinnchancen steigen?
Soll er bei seiner ersten Wahl bleiben oder soll er das Tor wechseln?
Oder ist es gleichgültig, ob er wechselt oder nicht?

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall“ findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen“, (K3) „Mathematisch modellieren“ und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen“ durch die vorliegende Simulation angesprochen.

Methodische Hinweise

Zum Einstieg in das Thema Wahrscheinlichkeit wurde mit dem Ziegenproblem bewusst ein Beispiel gewählt, bei dem die Lösung intuitiv – zunächst – schwer zu verstehen ist. Die üblichen Einstiegsbeispiele wie z. B. Würfeln mit einem Würfel sind für die Schülerinnen und Schüler nicht wirklich motivierend, da die Lösung quasi auf der Hand liegt.

Beim Ziegenproblem ist zum einen die Aufgabenstellung von den Schülerinnen und Schüler schnell zu erfassen, zum anderen ist kaum einer Schülerin bzw. einem Schüler die Antwort intuitiv einsichtig. Das Beispiel regt somit zum Nachdenken und Diskutieren an und soll für den weiteren Unterrichtsgang (Festlegung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ usw.) motivieren.

Es ist auch von Vorteil, wenn man das Spiel konkret vorführt oder real durchspielen lässt. Dazu kann man z. B. zwei Ziegen aus Plastik und ein Spielzeugauto unter drei Schachteln (Toren) verstecken. Nachdem die Aufgabenstellung verstanden ist, sollte man den Schülerinnen und Schülern zunächst genügend Zeit geben, um eine Entscheidung zu treffen.

Um anschließend das Stimmungsbild innerhalb der Klasse zu erfassen, lässt man die Schülerinnen und Schüler entweder abstimmen oder man wählt z. B. (im Sinne von „bewegter Schule“) die Methode 1, 2 oder 3. Bei dieser Methode begeben sich die Schülerinnen und Schüler, je nachdem für welche der drei Antwortmöglichkeiten sie sich entscheiden, in eine von drei Ecken des Klassenzimmers. Die Schülerinnen und Schüler stimmen sozusagen mit den Füßen ab. Wenn sich alle in der von ihnen gewählten Ecke befinden, werden einzelne Schülerinnen und Schüler gefragt, warum sie sich für diese Ecke entschieden haben.

Bevor man das Ziegenproblem mit Hilfe des GTR simulieren kann, sollte man auch die Schülerinnen und Schüler das Spiel z. B. in Dreiergruppen eine Zeit lang spielen lassen. Wenn man die Gruppen entsprechend instruiert, kann man hier auch schon eine gewisse „Simulation von Hand“ durchführen lassen. So erhalten die Schülerinnen und Schüler einen ersten Hinweis zur Lösung des Problems.

Außerdem wird den Schülerinnen und Schülern dadurch die prinzipielle Vorgangsweise für die folgende Simulation mit dem GTR verständlicher. Nach dieser Simulation in Gruppen sollte man noch kurz darauf eingehen, dass man auf Basis der doch recht wenigen Simulationen noch keine relativ sichere Aussage machen kann.

Da die Schülerinnen und Schüler zum ersten Mal mit dem GTR simulieren, muss man hier im Plenum sowohl die mathematischen Aspekte der Simulation, als auch die Syntax für den GTR erläutern.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse hatte den GTR erst seit wenigen Wochen und konnte bisher lediglich im *RUN*-Menü Berechnungen durchführen. Durch die Simulation des Ziegenproblems lernten die Schülerinnen und Schüler das *STAT*-Menü und den Zufallsgenerator kennen.

Zeitbedarf

Das Ziegenproblem wurde in zwei Unterrichtsstunden (Einzelstunden) behandelt.

Zur Rolle des GTR

Der GTR wurde hier sowohl zum „Beschleunigen“ des Unterrichts als auch zum Erzeugen und Auswerten von Datensätzen verwendet (man erhält in kurzer Zeit eine große Anzahl von Simulationsergebnissen). Zudem kommt hier der GTR als Experimentiergerät zum Einsatz.

Ohne GTR-Einsatz wäre diese Aufgabe mit dem bisherigen Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler nicht lösbar. Die Idee durch hinreichend viele Simulationsergebnisse der Wahrscheinlichkeit in den drei Fällen schon recht nahe zu kommen, ist bereits ein Schritt zum Verständnis des „Gesetzes der großen Zahlen“.

Durchführung

In der ersten der beiden Unterrichtsstunden wurde zunächst das Ziegenproblem mit Hilfe zweier Ziegen aus Plastik und einem Spielzeugauto vom Lehrer handlungsorientiert eingeführt. Dabei spielte eine Schülerin die Kandidatin.

Anschließend wurde den Schülerinnen und Schülern das Schülerblatt ausgeteilt und sie bekamen fünf Minuten Zeit alleine oder zu zweit eine Entscheidung zu treffen.

Danach wurden die Abstimmungsergebnisse mit Hilfe der Methode 1,2 oder 3 erfasst. 15 der 18 Schülerinnen und Schüler gingen in die dritte Ecke („Es ist egal, wie er sich entscheidet“) die restlichen drei Schülerinnen bzw. Schüler gingen in die erste Ecke („Bei seiner Wahl bleiben“). Keine Schülerin bzw. kein Schüler ging in die zweite Ecke.

Bei der Befragung zweier Schülerinnen bzw. Schüler aus der dritten Ecke kam sofort das Argument, dass hinter einer der beiden noch geschlossenen Türen ja das Auto stehen muss und daher die Chance 50:50 wäre. Diese Schülerinnen und Schüler haben also, ohne die Regel von Laplace explizit zu kennen, intuitiv eine Wahrscheinlichkeitsaussage (50 %) getroffen, die auf der Regel von Laplace beruht (diese Regel ist bei den Schülerinnen und Schülern intuitiv angelegt). Aus der ersten Ecke wurden ebenfalls zwei Schülerinnen bzw. Schüler befragt. Sie gaben lediglich an, dass sie es vorziehen ihrer Wahl „treu“ zu bleiben. Eine mathematische Begründung wurde nicht geliefert, sondern eher eine Art „Bauchgefühl“ genannt.

Dann wurde die Klasse in sechs Dreiergruppen eingeteilt, um das Spiel zu spielen. Damit man auch gleichzeitig schon real simuliert, bekamen die Gruppen folgende Aufträge:

- Gruppe 1 und Gruppe 2: Der Kandidat muss immer bei seiner Wahl bleiben (Fall 1).
- Gruppe 3 und Gruppe 4: Der Kandidat muss immer das Tor wechseln (Fall 2).
- Gruppe 5 und Gruppe 6: Der Kandidat entscheidet durch einen Münzwurf, ob er wechselt oder nicht (Fall 3).

In jeder Gruppe sollte das Spiel zehnmal gespielt werden. Dabei war eine Schülerin bzw. ein Schüler der Quizmaster, eine Schülerin bzw. Schüler der Kandidat und eine Schülerin oder ein Schüler hielt die Ergebnisse (Kandidat gewinnt oder verliert) auf einem Blatt

Papier fest. Die Schülerinnen und Schüler spielten das Spiel mit zwei 5 Cent-Münzen (Ziegen) und einer 10 Cent-Münze (Auto). Jeder Gruppe wurden drei kleine Schachteln zum Verdecken der Münzen ausgeteilt.

Am Ende der Unterrichtsstunde wurden noch die Ergebnisse der drei Fälle zusammengefasst und aufgeschrieben.

Folgende Ergebnisse wurden erzielt:
- Fall 1: Der Kandidat hat 8 Spiele gewonnen und 12 Mal verloren.
- Fall 2: Der Kandidat hat 13 Spiele gewonnen und 7 Mal verloren.
- Fall 3: Der Kandidat hat 11 Spiele gewonnen und 9 Mal verloren.

Diese Ergebnisse hatten die Schülerinnen und Schüler erstaunt und sie waren schon gespannt, welche Ergebnisse wir wohl am nächsten Tag bei der Simulation mit dem GTR erhalten würden.

Zu Beginn der zweiten Unterrichtsstunde wurden kurz nochmals die Ergebnisse vom Vortag in Erinnerung gerufen. Danach zeigte die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern im *RUN*-Menü wie man ganzzahlige Zufallszahlen erzeugt. Dabei wurde ein Bild des Displays des GTR mittels Beamer an die Wand projiziert, damit die Schülerinnen und Schüler die Vorgehensweise besser nachvollziehen konnten.

Dann wurde den Schülerinnen und Schülern gezeigt wie man im *STAT*-Menü eine Liste mit 250 ganzzahligen Zufallszahlen (1, 2 bzw. 3) erzeugt. Nachdem jede Schülerin bzw. jeder Schüler zwei solche Listen mit dem GTR erzeugt hatte, wurde festgelegt, dass in der ersten Liste jeweils die Tornummer steht, hinter der sich das Auto befindet. In der zweiten Liste steht die Tornummer, auf die der Kandidat gesetzt hatte.

Anschließend wurde in einem kurzen Unterrichtsgespräch die Auswertung der Simulation besprochen. Dazu wurden die jeweiligen Listeneinträge verglichen und das Ergebnis dieses Vergleichs in einer dritten Liste festgehalten. In dieser Liste stand eine Eins, falls die beiden Listeneinträge übereinstimmten, anderenfalls eine Null. Um die Häufigkeit der Einträge dieser dritten Liste schnell zu erhalten, wurde den Schülerinnen und Schülern erläutert, wie man ein Histogramm dieser Liste erzeugt (s. Lösungsvorschlag).

Die Schülerinnen und Schüler haben schnell erkannt, dass der Kandidat zwei Möglichkeiten hat zu gewinnen: Wenn er bei seiner Wahl bleibt (Fall 1), gewinnt er genau dann, wenn eine Eins in der dritten Liste steht. Wenn er das Tor wechselt (Fall 2), gewinnt er genau dann, wenn in der dritten Liste eine Null steht. Man kann also die Fälle 1 und 2 gemeinsam auswerten.

Nachdem alle Schülerinnen und Schüler die Zahlen ihrem Histogramm entnommen hatten, wurden alle Ergebnisse der Klasse zusammengefasst. Somit wurde das Spiel insgesamt 4 500 Mal simuliert.

Schülerin/Schüler	Im Fall 1	Im Fall 2
1	82	168
2	86	164
3	77	173
4	83	167
5	87	163
6	85	165
7	77	173
8	81	169
9	93	157
Summe	751	1499

Schülerin/Schüler	Im Fall 1	Im Fall 2
10	79	171
11	75	175
12	81	169
13	85	165
14	79	171
15	97	153
16	81	169
17	88	162
18	76	174
Summe	741	1509

Gesamtergebnis:

Gewonnen im Fall 1: 1 492 **Gewonnen im Fall 2: 3 008**

Theoretischer Erwartungswert bei 4 500 Simulationen:

Gewonnen im Fall 1: 1 500 **Gewonnen im Fall 2: 3 000**

Die Schülerinnen und Schüler waren erstaunt, was für einen Unterschied es macht, ob man das Tor wechselt oder nicht.

Danach wurde noch der Fall 3 simuliert. Dazu musste eine vierte Liste, in der der Münzwurf simuliert wird, erzeugt werden. In dieser Liste stand eine Null für „der Kandidat bleibt bei seiner Wahl“ und eine Eins für „der Kandidat wechselt das Tor“. Jetzt mussten nur noch die Einträge aus der dritten und der vierten Liste jeweils miteinander verglichen werden. Genau dann, wenn beide Einträge übereinstimmen hat der Kandidat gewonnen. Das Ergebnis des Vergleichs wurde erneut in einer fünften Liste festgehalten.

Schülerin/Schüler	gewonnen	verloren
1	125	125
2	120	130
3	131	119
4	125	125
5	119	131
6	128	122
7	126	124
8	134	116
Summe	1013	987

Schülerin/Schüler	gewonnen	verloren
9	130	120
10	114	136
11	125	125
12	120	130
13	134	116
14	125	125
15	127	123
16	114	136
Summe	989	1011

Die Schülerinnen und Schüler erzeugten ein Histogramm (s. Lösungsvorschlag) von dieser fünften Liste und konnten so ablesen, wie oft der Kandidat gewonnen bzw. verloren hatte. Die Ergebnisse dieser 4 000 Simulationen wurden wieder im Plenum zusammengefasst.

Gesamtergebnis im Fall 3:

Gewonnen: 2 002 **Verloren: 1 998**

Theoretischer Erwartungswert bei 4 000 Simulationen im Fall 3:

Gewonnen: 2 000 **Verloren: 2 000**

Die Schülerinnen und Schüler hatten am Ende der Stunde erkannt,

- dass sich ein Torwechsel beim Ziegenproblem lohnt;
- dass die einzelnen Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler teilweise erheblich voneinander abwichen;
- dass man nur bei einer großen Anzahl von Simulationen verlässliche Aussagen erhält.

Abschließend bleibt anzumerken, dass man später, nachdem die Regel von Laplace bekannt ist, die Fälle 1 und 2 auch ohne Simulation nachvollziehen kann. Um im Fall 3 die Wahrscheinlichkeit berechnen zu können, muss man warten, bis man die Pfadregel zur Verfügung hat.

Mathematik Klasse 7 (AP)

Das Ziegenproblem

Bei einer Quiz-Show kann man ein Auto gewinnen. Die Spielregeln für das Quiz sind folgende:

Es gibt drei verschlossene Tore. Hinter zwei der Tore befindet sich jeweils eine Ziege und hinter einem der Tore ein Auto. Zum Beispiel wie abgebildet:

Tor 1	Tor 2	Tor 3
		

- Der Quizmaster weiß, hinter welchem Tor sich das Auto befindet.
- Der Kandidat muss sich für ein Tor entscheiden (das jedoch nicht sofort geöffnet wird).
- Nachdem sich der Kandidat für ein Tor entschieden hat, öffnet der Quizmaster eines der beiden Tore, die der Kandidat nicht ausgewählt hat und hinter dem sich eine Ziege befindet. (Ein solches Tor gibt es immer!)
- Anschließend fragt er den Kandidaten: Bleiben Sie bei Ihrer Wahl, oder wollen Sie das Tor wechseln?
- Befindet sich hinter dem geöffneten Tor das Auto, so gehört es ihm.

Wie soll sich der Kandidat entscheiden, damit seine Gewinnchancen steigen?

Soll er ...

☐ **bei seiner alten Wahl bleiben?**

☐ **das Tor wechseln?**

☐ **Es ist egal, wie er sich entscheidet.**

Versuche deine Entscheidung zu begründen!

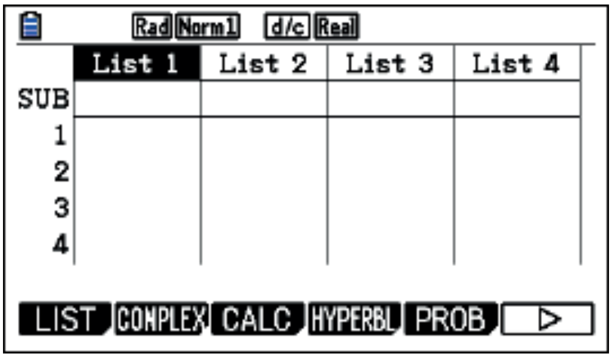
Lösungsvorschlag: Simulation im Statistik-Menü

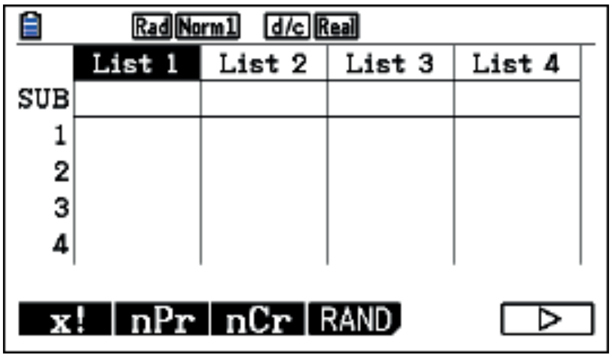
Fall 1 und Fall 2

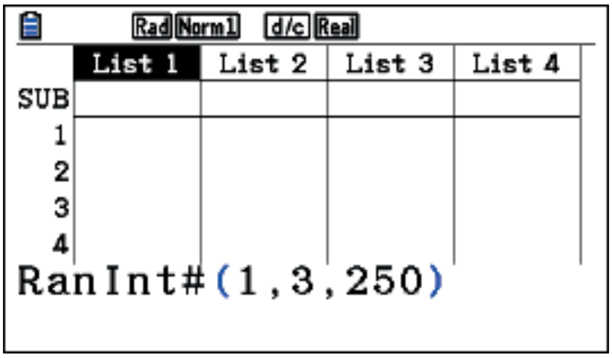
1) Im *STAT*-Menü wird eine Liste mit Hilfe des *Ranint#*-Befehls erzeugt. Dadurch entsteht eine Liste 1 mit den Zufallsziffern 1, 2 oder 3. Diese Liste umfasst 250 Werte.

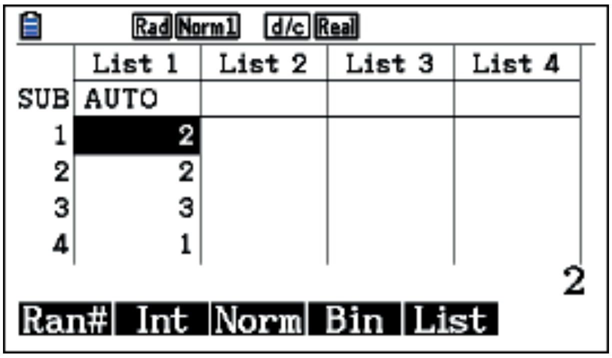
   Syntax: iy(PROB)r(RAND)w(Int)

   Liste 1 zeigt an: „Hinter welchem Tor steht das Auto?“



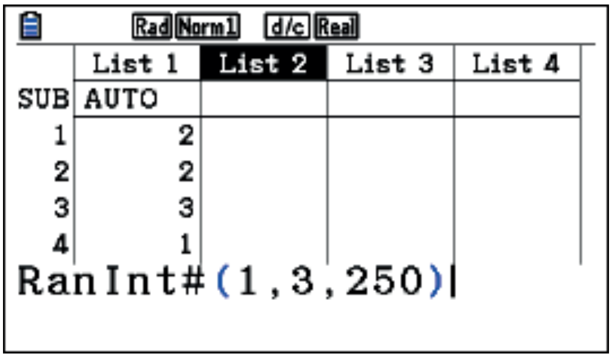


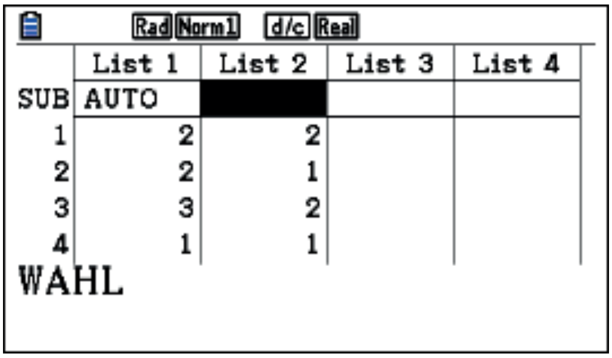




2) Danach legt man analog eine zweite solche Liste an.

   Liste 2 zeigt an: „Welches Tor wählt der Kandidat zunächst aus?“

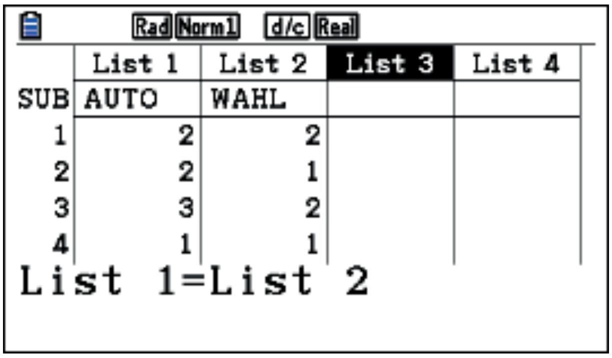


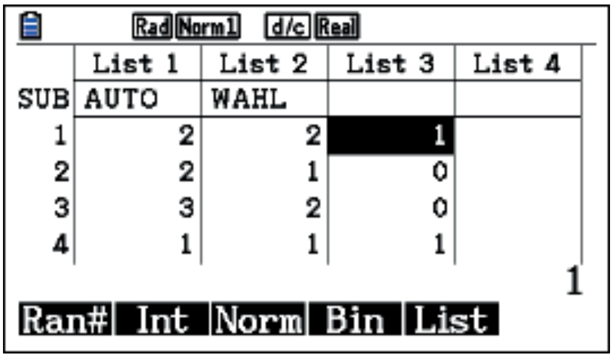


Tipp: Damit man sich leichter merken kann in welcher Liste was steht, kann man die Listen z. B. mit Hilfe der „subtitle“ AUTO und WAHL kennzeichnen.

3) Dann werden die beiden Listen 1 und 2 miteinander verglichen, indem man in die Liste 3 eingibt: *List 1 = List 2*

   In der Liste 3 steht genau dann eine 1, falls in der Liste 1 der gleiche Eintrag wie in Liste 2 steht. Ansonsten steht in Liste 3 eine 0.

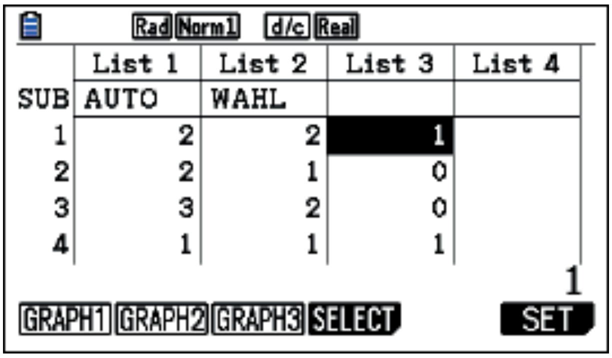


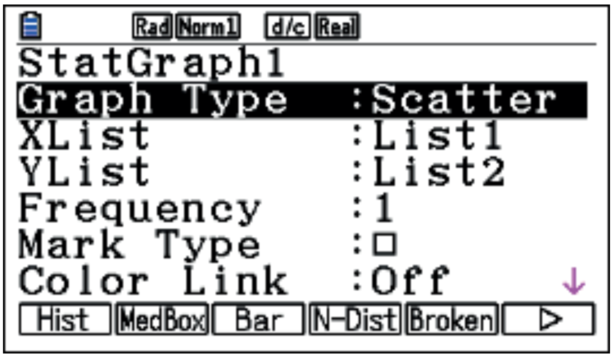


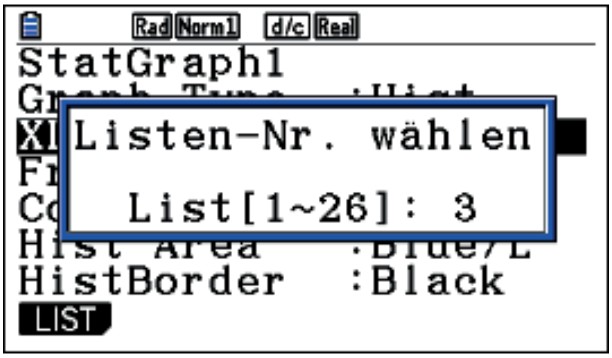
4) Demnach bedeutet nur der Eintrag 1, dass der Kandidat zu Beginn das richtige Tor ausgewählt hat.
   - Wenn der Kandidat also bei seiner Wahl bleibt (Fall 1), gewinnt er nur, falls eine 1 in der Liste 3 steht.
   - Wenn der Kandidat also das Tor wechselt (Fall 2), gewinnt er, falls in der Liste 3 eine 0 steht.

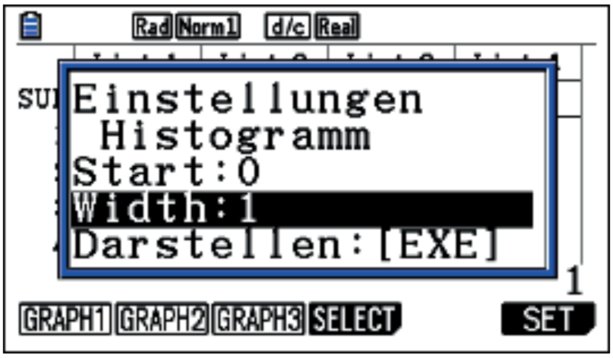
5) Um die Anzahl der verschiedenen Einträge zu bestimmen wird entweder die Summe der Listeneinträge von Liste 3 gebildet oder ein Histogramm erzeugt. Denn die Summe ergibt genau die Anzahl der Einser in Liste 3.

   Den *Graphiktyp Histogramm* kann man im *Graphik Set* einstellen. Man gelangt mit der Tastenkombination **q(GRPH)u(SET)** zum *Graphik Set*. Dort wählt man dann mit **u(▷)q(Hist)** den *Graphiktyp Histogramm* aus.



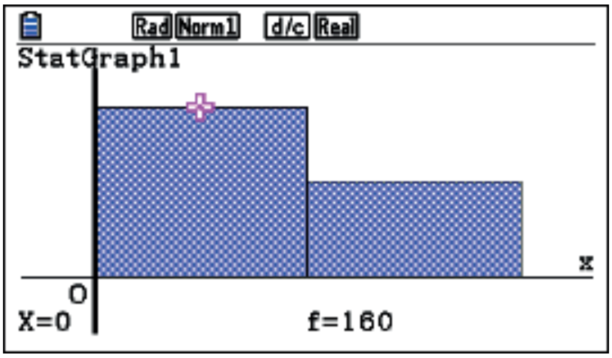


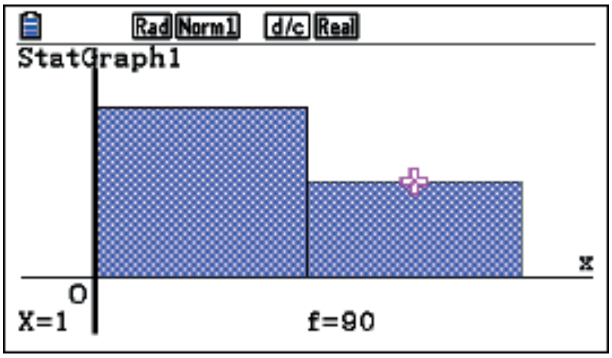




Tipp: Damit das *Histogramm* in Einerschritten durchlaufen werden kann, gibt man bei *Width* den Wert 1 ein.

Die Anzahlen kann man durch „Tracen“ **(Lq)** auf dem Histogramm leicht ablesen.



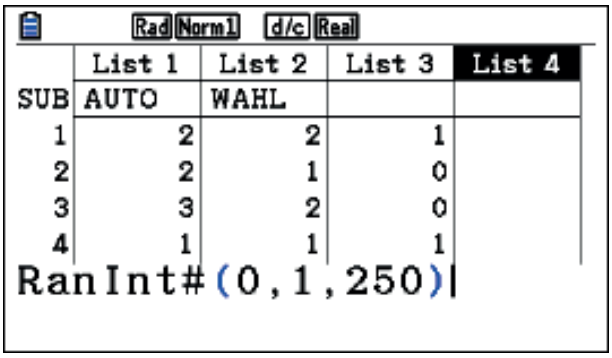


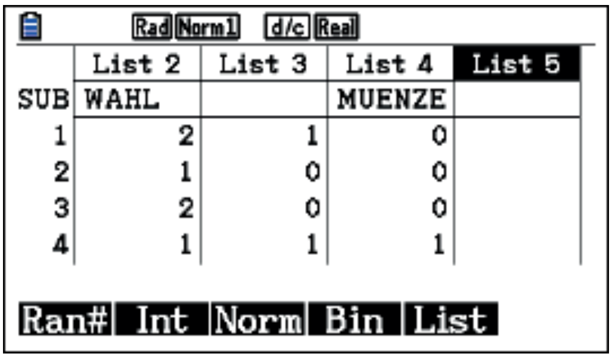
Fall 3

1) Analog wie in den Fällen 1 und 2 werden zunächst die beiden Listen 1 (AUTO) und 2 (WAHL) mit Zufallszahlen gebildet.

2) Danach werden die Listeneinträge der Listen 1 und 2 miteinander verglichen. Die Ergebnisse stehen in Liste 3 (siehe Fall 1 und 2).

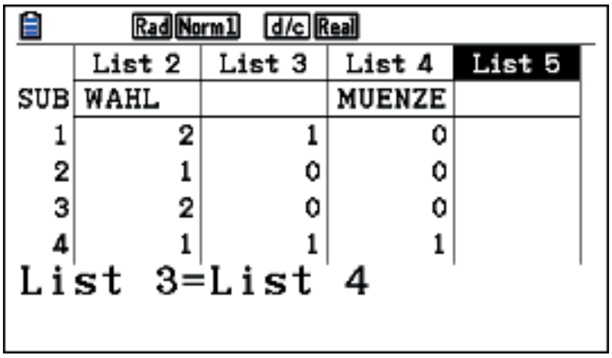
3) Anschließend wird eine weitere Liste mit Zufallszahlen erzeugt, um den Münzwurf zu simulieren, mit dessen Hilfe der Kandidat entscheidet, ob er bei seiner Wahl bleibt oder wechselt.

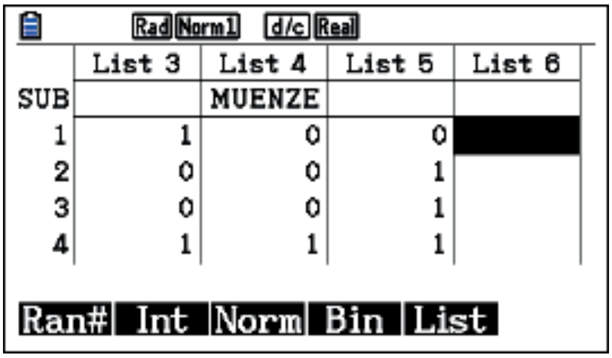




Die Liste 4 enthält 250 Zufallszahlen, wobei 1 bedeutet der Kandidat bleibt bei seiner Wahl und 0 bedeutet, dass er wechselt.

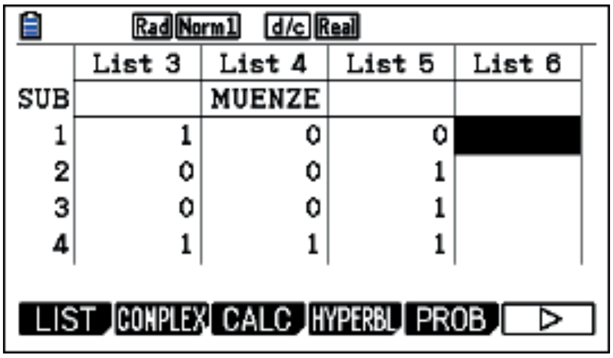
4) In Liste 5 vergleicht man dann die Einträge der Listen 3 und 4. Sind die beiden Einträge gleich, dann gewinnt der Kandidat das Auto. Anderenfalls verliert er. Somit gewinnt der Kandidat genau dann, wenn in der Liste 5 eine 1 steht.

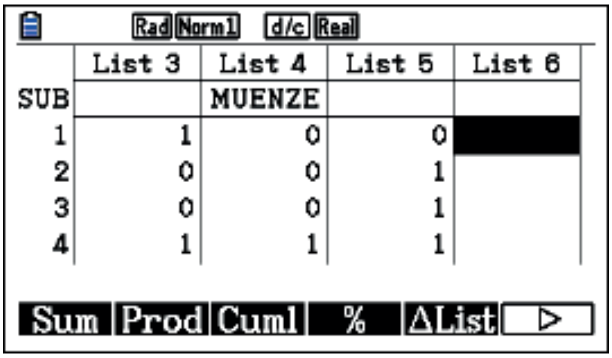


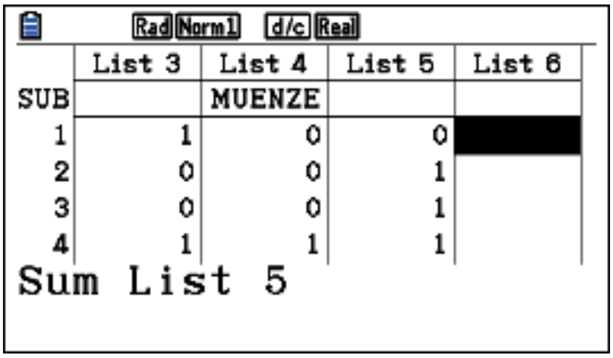


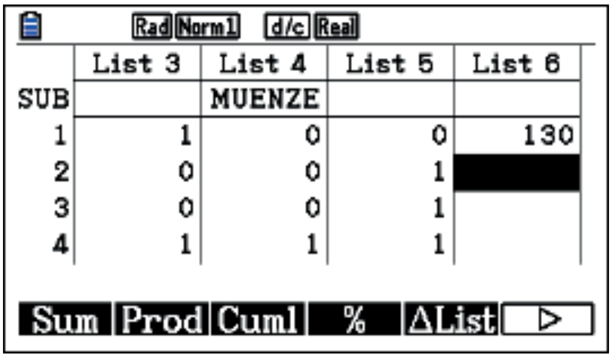
5) Um die Anzahl der verschiedenen Einträge zu bestimmen wird entweder die Summe der Listeneinträge von Liste 5 gebildet oder ein *Histogramm* erzeugt. Denn die Summe ergibt genau die Anzahl der Einser in Liste 5.

Syntax für die Summe der Listeneinträge: iq(LIST)u(▷)u(▷)q(Sum)









Variante mit Histogramm: Die Anzahlen kann man durch „Tracen" auf dem Histogramm leicht ablesen.