

Simulation eines Geburtstagsproblems

Jürgen Appel

Kurzfassung des Inhalts:

Bei der Aufgabe handelt es sich um eine einfache Variante eines Geburtstagsproblems mit drei Personen. Die Wahrscheinlichkeit wird zuerst näherungsweise mit Hilfe einer Simulation mit dem GTR bestimmt. Zudem wird die exakte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Pfadregel berechnet und mit dem zuvor erhaltenen Näherungswert verglichen.

Klassenstufe(n):

Klasse 8 bzw. 9

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- die Pfadregeln wiederholen und anwenden;
- erkennen, dass je größer der Stichprobenumfang ist, desto genauer ist der Näherungswert, den man mit Hilfe einer Simulation erhält;
- den Einsatz des GTR als Simulationsgerät weiter vertiefen.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

- Erzeugung einer Liste von ganzzahligen Zufallszahlen im *STAT*-Menü;
- Vergleich mehrerer Listen auch mit Hilfe der logischen Operatoren *and* und *or*;
- Bildung der Summe von Listeneinträgen.

Zeitbedarf:

Eine Unterrichtsstunde (45 Minuten)

Sonstige Materialien:

Keine

Begleittext

Geburtstagsprobleme gibt es in verschiedenen Varianten. Je nach Altersstufe kann man deren Schwierigkeitsgrad einfach variieren. Zudem sind die meisten Schülerinnen und Schüler sehr überrascht, wenn sie die Lösung mit ihren zuvor gemachten Schätzungen vergleichen. Für die Klassenstufe 8 wurde ein einfaches Problem mit drei Personen gewählt. Dieses Problem lässt sich relativ einfach simulieren und anschließend mit Hilfe der Pfadregel auch theoretisch erklären. Später kann man auch zu komplexeren Problemen übergehen, bei denen nach der Mindestanzahl der Personen gefragt wird, um eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit zu überschreiten.

Die Simulationsmöglichkeiten sind größer, wenn man den Schülerinnen und Schülern zuvor gezeigt hat, wie man einen Vergleich von Listen mit Hilfe von logischen Operatoren durchführt.

Aufgabenstellung

Antje, Benjamin und Clara treffen sich auf dem Schulhof. Antje behauptet:

„Ich wette, dass mindestens zwei von uns am selben **Wochentag** Geburtstag haben.“

Würdest du dagegen wetten?

- a) Führe eine Simulation ($n = 500$) mit dem GTR durch.
- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Schülerinnen und Schüler am selben Wochentag Geburtstag haben.
- c) Vergleiche deine Simulation mit deinem Ergebnis aus b).

Bezug zu den KMK-Standards

In der Leitidee L5 „Daten und Zufall“ findet man:

- Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten;
- Außerdem werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen (K2) „Probleme mathematisch lösen“, (K3) „Mathematisch modellieren“ und (K5) „Mathematische Werkzeuge sinnvoll einsetzen“ durch die vorliegende Simulation angesprochen.

Voraussetzungen bezüglich des GTR

Die Klasse hatte den GTR bereits seit einem Jahr und schon mehrfach Simulationen im *STAT*-Menü durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler wussten bereits, wie man mit Hilfe der logischen Operatoren *and* bzw. *or* Listen vergleichen kann.

Methodische Hinweise

Die Aufgabe wurde den Schülerinnen und Schülern in der Mathematikstunde als Partnerarbeit gestellt.

Die Teilaufgabe b) ist eine typische Anwendung der Pfadregel, bei der die Schülerinnen und Schüler über das Gegenereignis argumentieren müssen.

Bei der Simulation in der Teilaufgabe a) gehen die Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen nicht über das Gegenereignis, sondern suchen einen direkten Weg, um zum Ziel zu kommen.

Zum einen liefert die Simulation die richtige Größenordnung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Zum anderen können bei $n = 500$ die unterschiedlichen Simulationen doch deutlich voneinander abweichen. Dies zeigt den Schülerinnen und Schülern nochmals, dass für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, die man mittels einer Simulation bestimmen will, die Anzahl n groß sein sollte.

Damit die Schülerinnen und Schüler mehr Variationsmöglichkeiten für ihre Simulation haben, sollten sie zuvor zumindest einmal einen Listenvergleich von mehreren Listen mithilfe der logischen Operatoren *and* bzw. *or* durchgeführt haben.

Im Anschluss an diese Aufgabe bietet sich, ohne Simulation, die Erweiterung zum klassischen Geburtstagsproblem an, etwa in der Form: „Wie viele Personen muss man mindestens befragen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?“

Dabei kann man entweder im *RUN*-Menü die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis durch sukzessives Multiplizieren erhalten oder man verwendet hier die Tabellenkalkulation (*S-SHEET*).

Zeitbedarf

Für die Aufgabe „Das Geburtstagsproblem“ hatten die Schülerinnen und Schüler 20 Minuten Bearbeitungszeit. Die Besprechung inklusive einer kurzen Diskussion über die Streuung der Simulationsergebnisse dauert ca. 15 Minuten.

Zur Rolle des GTR

Für das Ergebnis der Teilaufgabe b) spielt der GTR keine große Rolle, da die Aufgabe ja mittels der Pfadregel relativ einfach zu bewältigen ist. Lediglich das Berechnen der Wahrscheinlichkeit (Multiplikation von Brüchen im *RUN*-Menü) wird erleichtert.

Bei der Teilaufgabe a) kann die Simulation auf unterschiedliche Arten erfolgen, da der GTR hier mehrere Möglichkeiten zulässt (s. Lösungsvorschlag).

Für die Simulation spielt der GTR natürlich die zentrale Rolle, da ohne GTR-Einsatz eine Simulation mit $n = 500$ jeden üblichen zeitlichen Rahmen sprengen würde.

Durchführung

Die Aufgabe wurde der Klasse gleich zu Beginn der Unterrichtsstunde ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler durften sich einen Partner suchen, mit dem sie gemeinsam die Aufgabe lösen sollten. Der Zeitrahmen von 20 Minuten wurde ebenfalls zu Beginn mitgeteilt.

Alle führten die Simulation im *STAT*-Menü durch. Dabei benötigten einige Schülerinnen und Schüler Hilfe von ihrem Partner bzw. vom Lehrer. Insbesondere waren einige nicht

mehr mit dem logischen *or* vertraut. Das Erzeugen dreier Listen mit natürlichen Zufallszahlen von 1 bis 7 bereitete keinerlei Schwierigkeiten. Auch die Berechnung der relativen Häufigkeiten gelang den meisten Zweiertteams eigenständig.

Bei der Besprechung der Aufgabe im Plenum ergab sich, dass die Simulationsergebnisse zwischen 0,35 und 0,416 schwankten. Der Durchschnitt aller 25 Simulationen ($n = 12\,500$) ergab einen Wert von ca. 0,384 für die relative Häufigkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Wochentag Geburtstag haben.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis mit Hilfe der Pfadregel gelang zunächst nicht allen Schülerinnen und Schülern. Dies lag zumeist daran, dass sie die Baumdiagramme zu umfangreich zeichneten (bzw. ansetzten). Die Idee, den ersten Schüler, der ja an irgendeinem beliebigen Wochentag Geburtstag haben kann, im Prinzip wegzulassen ($p = \frac{7}{7} = 1$) hatten nicht alle Teams. Daher wurde den Teams, auf deren Nachfrage, vom Lehrer der Tipp gegeben, zunächst das Gegenereignis zu betrachten bzw. den ersten Schüler bei der Betrachtung wegzulassen.

Die letzten zehn Minuten der Unterrichtsstunde wurde noch das klassische Geburtstagsproblem angesprochen. Dabei lagen die Schülerinnen und Schüler mit ihren Schätzungen, wie erwartet, deutlich daneben. Sie waren sehr erstaunt, dass schon bei einer Gruppe von 23 Personen die Wahrscheinlichkeit über 50 % liegt. Tatsächlich hatten auch zwei Schüler in dieser Klasse am selben Tag (17.10.) Geburtstag.

Mathematik Klasse 8 (AP)

Das Geburtstagsproblem

Antje, Benjamin und Clara treffen sich auf dem Schulhof.

Antje behauptet:

„Ich wette, dass mindestens zwei von uns am selben **Wochentag** Geburtstag haben.“

Würdest du dagegen wetten?

- a) Führe eine Simulation ($n = 500$) mit dem GTR durch.
- b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Schülerinnen und Schüler am selben Wochentag Geburtstag haben.
- c) Vergleiche deine Simulation mit deinem Ergebnis aus b).

Lösungsvorschlag: Simulation im Statistik-Menü

Zunächst müssen (mit Hilfe des *RanInt#*-Befehls) drei Listen (für jedes Kind eine) mit den Zufallsziffern 1 bis 7 (sieben Wochentage) angelegt werden.

Syntax: `iy(PROB)r(RAND)w(Int)`

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1				
2				
3				
4				

LIST COMPLEX CALC HYPERBL PROB

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1				
2				
3				
4				

x! nPr nCr RAND

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1				
2				
3				
4				

RanInt#(1,7,500)

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	2			
2	6			
3	3			
4	7			

RanInt#(1,7,500)

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	2	1	7	
2	6	6	4	
3	3	4	6	
4	7	7	2	

Ran# Int Norm Bin List

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	2	1	7	
2	6	6	4	
3	3	4	6	
4	7	7	2	

NUMERIC ANGLE ENG-SYM FUNCNEW LOGIC

Anschließend vergleicht man jeweils zwei dieser drei Listen miteinander. Falls mindestens einer dieser drei Vergleiche eine Übereinstimmung ergibt, dann haben mindestens zwei der drei Kinder am gleichen Wochentag Geburtstag. Für die Auswertung bietet sich das logische „**oder**“ an.

Syntax: `iu(▷)y(LOGIC)w(Or)`

Man gibt in die Liste 4 Folgendes ein: **List 1 = List 2 Or List 1 = List 3 Or List 2 = List 3**

Falls einer der drei Vergleiche übereinstimmt, steht in Liste 4 der Eintrag 1, anderenfalls der Eintrag 0.

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	2	1	7	
2	6	6	4	
3	3	4	6	
4	7	7	2	

And Or Not Xor

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	2	1	7	
2	6	6	4	
3	3	4	6	
4	7	7	2	

List 1=List 2 Or List
And Or Not Xor

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	2	1	7	0
2	6	6	4	1
3	3	4	6	0
4	7	7	2	1

And Or Not Xor

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	1	7	0	
2	6	4	1	
3	4	6	0	
4	7	2	1	

Sum Prod Cuml % ΔList ▶

Um die absolute und die relative Häufigkeit der Einsen zu bestimmen, bildet man die Summe der Einträge der Liste 4 und dividiert diese Summe durch die Anzahl n (z. B. 500) der Simulationen.

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	1	7	0	
2	6	4	1	
3	4	6	0	
4	7	2	1	

Sum List 4÷500

	List 2	List 3	List 4	List 5
SUB				
1	1	7	0	0.378
2	6	4	1	
3	4	6	0	
4	7	2	1	

Sum Prod Cuml % ΔList ▶

Variante:

Simuliert man das Problem mit Hilfe der Tabellenkalkulation (*S-SHEET*), dann hat man den Vorteil, dass man sehr schnell einen neuen Wert für die relative Häufigkeit erhält, indem man die Simulation neu startet. Aber dabei sollte man Folgendes beachten: Wenn man $n = 500$ wählt, dann kommt die Fehlermeldung „Speicherfehler“. Bei $n = 250$ liefert der GTR jedoch die gewünschte Simulation. Daher bietet es sich an, zweimal mit $n = 250$ zu arbeiten.

Theoretischer Wert mit Hilfe der Pfadregel

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Schülerinnen und Schüler an einem anderen Wochentag Geburtstag haben beträgt: $p^* = \frac{7}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{49}$. Demnach beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei am gleichen Wochentag Geburtstag haben $p = 1 - p^* = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49} \approx 0,388 = 38,8 \%$.