Historische astronomische Daten und moderne CAS-Rechner: Der Komet von 1618

Thomas Krohn, Elvira Malitte, Karin Richter

Kurzfassung des Inhalts:
Die Modellierung realer funktionaler Zusammenhänge ist oft mit einer typischen Aufgabe verbunden: Aus Messdaten soll ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden, der den gegebenen Daten „gut angepasst“ ist. CAS-Rechner stellen hierfür ein leistungsfähiges Werkzeug dar. Der vorliegende Artikel greift diese Situation für ein historisches Problem der Astronomie auf: Die Problemstellung der Funktionsergänzung und -anpassung für originale historische Messwerte zur Bahn eines Himmelskörpers, hier: eines Kometen des 17. Jahrhunderts, steht im Mittelpunkt des Projekts. Anliegen ist es, an Hand dieser realen, gut überschaubaren Datensituation Notwendigkeit und Vorgehensweisen der Funktionsapproximation erleb- und nachvollziehbar werden zu lassen und dabei die Leistungsstärke des CAS-Rechners exemplarisch zu testen.

Klassenstufe(n):
11. Jahrgangsstufe

Lernziele:
- Umgang mit Roh-Daten
- Modellierung im Kontext sphärischer Trigonometrie
- Grafische Veranschaulichung des dreidimensionalen Realmodells Himmelskugel
- Statistische Datenaufbereitung
- Funktionsanpassung, -ergänzung, -auswertung
- Nutzung geeigneter Werkzeuge unter besonderer Heraushebung des ClassPad

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Der ClassPad bietet verschiedene Menüs, die gut geeignet sind, dieses Projekt zu bearbeiten. Mit wenigen einführenden Hinweisen und knappen Übungen zu den grundlegenden Arbeitstechniken wie Eingabe von Daten, Eingabe von Formeln, Anpassung von Funktionen und grafischen Darstellungen wahlweise in den Menüs Tabellenkalkulation, Statistik oder Geometrie können die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Lösungswege erarbeiten.

Zeitbedarf:
Das Projekt ist dreistufig aufgebaut, wobei auch eine arbeitsteilige parallele Bearbeitung durch Expertengruppen mit anschließendem Austausch der Expertengruppen denkbar und möglich ist. Je Problemkreis und Abschlussdiskussion werden ca. 45 Minuten benötigt.

Sonstige Materialien:
Geogebra-3D

Methodisch-didaktische Einordnung

Das Material wendet sich an Lehrerinnen und Lehrer sowie Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe. Die Beschäftigung mit der vorgestellten astronomisch-mathematischen Problemstellung wendet sich an Schülerinnen und Schüler der 11. Jahrgangsstufe. Das Material ist so aufbereitet, dass für die Arbeit der Schülerinnen und Schüler eine eigenständige Auseinandersetzung mit den Arbeitsblättern möglich ist. Der, den Arbeitsblättern in diesem Artikel vorangestellte, Textteil dient dem ausführlichen inhaltlichen Kennenlernen und Einarbeiten und wendet sich demgemäß in erster Linie an Sie, liebe Lehrerinnen und Lehrer. Durch diese zweifache Orientierung und Nutzbarkeit bedingt, kommt es zwischen dem grundlegenden Text und den Arbeitsblättern zu gewissen inhaltlichen Überschneidungen und Wiederholungen. Dies ist beabsichtigt. Je nachdem, ob ein ausführliches Einlesen in die betrachtete Thematik oder ein selbstentdeckendes Beschäftigen aus Schülersicht das konkrete Anliegen ist, ist das eine oder das andere (Teil-)Material zu nutzen. Der ausführliche Einführungstext ist darüber hinaus auch so gestaltet, dass er für die Schülerinnen und Schüler als die Arbeitsblätter vertiefender und ergänzender Lesestoff ebenfalls geeignet ist. Gerade unter diesem Aspekt kann die gewisse formale Überschneidung zwischen Arbeitsblättern und Einführungstext hilfreich zur schnellen und sicheren Orientierung sein.

Die Arbeitsblätter sind so gestaltet, dass sie unmittelbar als Kopiervorlage genutzt werden können.

In der Einheit von einführendem Text und Arbeitsblättern mit Lösungsdarstellungen möchten wir ein Material vorlegen, das sich sowohl an Schülerinnen und Schüler als auch an Lehrerinnen und Lehrer wendet und in dieser Komposition ein interessantes und erfolgreiches entdeckendes Auseinandersetzen mit historischen Daten unter Nutzung moderner CAS-Rechner ermöglicht.

Grundlegende Begriffe und Zusammenhänge der sphärischen Trigonometrie werden bereitgestellt, um eine mathematische Erschließung der astronomischen Originaldaten und ihrer Erfassung in einem geeigneten Kartenentwurf zu ermöglichen und das Problem der astronomisch-mathematisch angemessenen Ergänzung fehlender Daten zu thematisieren. Diese astronomisch-mathematische Verankerung des CAS-Projektes lässt eine Einordnung in den Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe 11 als angemessen erscheinen.

Das Projekt ist dreistufig aufgebaut, wobei auch eine arbeitsteilige parallele Bearbeitung durch Expertengruppen mit anschließendem Austausch der Expertengruppen denkbar und möglich ist.

Problemkreis 1:	Kartenentwürfe zum Modell der Himmelskugel; (unter Einbeziehung einer eigenen 3D-(Geogebra-)Visualisierung); Zeitbedarf: ca. 45 min; arbeitsteiliges Bearbeiten ist möglich.

Problemkreis 2: Astronomische Beobachtungen als Datenquellen zur Beschreibung von Orten astronomischer Objekte: Der Große Komet von 1618.
Zeitbedarf: ca. 45 min.

Problemkreis 1 und 2 sollten bearbeitet und in der Lerngruppe reflektiert sein, bevor mit dem, auf die direkte Nutzung des CAS-Rechners gerichteten, Abschnitt des Projektes in Problemkreis 3 begonnen wird.

Problemkreis 3: Der Große Komet von 1618 – ein astronomisches CAS-Projekt.
Zentrales Anliegen ist die CAS-Funktionsanpassung für die gegebenen historischen Daten.

Drei Ansätze werden erprobt:

I. Verwendung der Tabellenkalkulation,

II. Verwendung des Statik-Menüs,

III. Verwendung des Geometrie-Menüs.

Zeitbedarf (einschließlich vergleichender und reflektierender Diskussion und themenbezogener Interpretation): ca. 90 min; arbeitsteiliges Bearbeiten ist möglich und bildet eine gute Grundlage für die erforderliche reflektierende und interpretierende Diskussion.

Die abschließende Diskussion und Interpretation zum *Gesamt*-Projekt, in der alle Expertengruppen zur Ergebnisformulierung, -fixierung und -einordnung gleichberechtigt beitragen, stellt einen unverzichtbaren Bestandteil des Projektes dar und sollte dementsprechend einen hohen Bedeutungsgrad und zeitlichen Umfang zugemessen bekommen.

Zeitbedarf: 45 min.

Als Abschluss und produktorientierte Ergebnisfixierung zum Projekt bietet sich die gemeinsame Erarbeitung eines Projektposters (mit eigenverantwortlichen Beiträgen der jeweiligen Expertengruppen) an.

Zeitbedarf: 45 min.

Auch die Führung von Lerntagebüchern durch die Schülerinnen und Schüler sowohl zu den informativen Gruppen-Arbeitsphasen als auch zu den eigenständigen Untersuchungen und der gemeinsamen abschließenden und zusammenfassenden Diskussion, Reflektion und Interpretation ist eine Möglichkeit, das Projekt und die daraus gewonnenen Einsichten und Erkenntnisse dauerhaft verfügbar zu machen.

Historische Daten auf modernen CAS-Rechnern? Ein Vorschlag

Die Aufgabe, reale funktionale Zusammenhänge zu modellieren, führt oft auf ein Standardproblem: Messdaten können gesammelt werden oder liegen vor und aus ihnen soll ein analytischer Ausdruck abgeleitet werden, der den gegebenen Daten „gut angepasst" entspricht. Für diese Aufgabe der Funktionsanpassung an gegebene Datenreihen sind moderne CAS-Rechner leistungsstarke Werkzeuge. Ohne ihre Unterstützung ist das Problem der Ergänzung weiterer Funktionswerte und das Finden und Prüfen geeigneter Funktionen zu ihrer Approximation oft ein schwieriges Unterfangen.

Insbesondere in der Astronomie ist die Frage nach dem Schluss von einzelnen beobachteten Stern- oder Himmelskörperorten auf die vollständige Bahn des jeweiligen Himmelsobjektes eine Problemstellung, die seit den Anfängen astronomischer Untersuchungen ein zentrales Anliegen darstellte und mit den Keplerschen Erkenntnissen zu den tatsächlichen Himmelskörperbahnen im 17. Jahrhundert zu einem herausragenden Forschungsschwerpunkt wurde. Im vorliegenden Beitrag wird diese prototypische Situation der Funktionsergänzung und -anpassung im Kontext historischer Messwerte zur Bahn eines Kometen aufgegriffen. Anliegen ist es, an Hand dieser realen, aber zugleich auch gut überschaubaren Datensituation die Problematik geeigneter Funktionsanpassung zu thematisieren und die Leistungsstärke des CAS-Rechners hierfür konkret zu erproben.

Eingebettet in den Kontext realer historischer, aber unvollständiger Beobachtungswerte des 17. Jahrhunderts und ihrer Beschreibung in einer Original-Text-Stelle, wird die typische Problemstellung geeigneter Datenergänzung und Funktionsanpassung exemplarisch untersucht. Insgesamt gibt es zwei Aspekte, die im Fokus stehen werden: Zum einen die überschaubare Anzahl zur Verfügung stehender, aber eben lückenhafter realer historischer Beobachtungswerte. Zum anderen die Tatsache, dass die vereinfachende Modellierung durch die scheinbare Bahn des Kometen auf der Himmelssphäre (also der vom irdischen Beobachter gedachten Himmelskugel, die die Erde konzentrisch enthält) bereits historisch gegeben ist. Durch die Nutzung eines CAS-Rechners wird mit einem modernen Werkzeug die historische Untersuchung „nur noch" technisch umgesetzt und muss dementsprechend nachvollzogen werden. Auf diese Weise eröffnet sich ein interessantes Spannungsfeld: eine überschaubare reale astronomische Situation wird durch einen nahe liegenden einfachen Modellierungsansatz beschrieben (in Übereinstimmung mit dem historischen Lösungsansatz) und mit modernen Hilfsmitteln einer Bearbeitung zugeführt. Gerade die zu Grunde gelegten historischen Beobachtungsdaten veranschaulichen einerseits den experimentellen Ausgangspunkt und zeigen andererseits die Stärke des Werkzeugs CAS-Rechner bei der Untersuchung von Standardproblemen. In diesem Fall wird die Funktionsergänzung und -anpassung, anschaulich-konkret erlebbar gemacht.

Die historische Verortung der zu untersuchenden analytischen Problemstellung erfordert es, einen kurzen Exkurs in die Geschichte der Astronomie des 17. Jahrhunderts und der sphärischen Geometrie vorzunehmen. Dadurch gewinnt man eine Plastizität der realen Situation, zu deren Untersuchung der CAS-Rechner maßgeblich genutzt werden wird.

Für die konkrete Umsetzung des Projektvorschlags dieses Beitrags bedeutet dies, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst die erforderlichen astronomischen und geometrischen Grundbegriffe und Sichtweisen kennenlernen müssen. Dafür eignet sich sowohl ein entsprechender Rechercheauftrag als auch eine gemeinsame Erarbeitung an Hand geeigneter Literatur, etwa des Buches von R. Hame „Sphärische Trigonometrie, Additum Jahrgangsstufe 11, Ehrenwirth Verlag GmbH 2007“. Auf dieser Grundlage ist dann die CAS-Auseinandersetzung mit den historischen Daten das eigentliche mathematische Anliegen. Wo früher zeitaufwendige Rechnungen und Versuche per Hand nötig waren, kann heute das Werkzeug CAS-Rechner einen entscheidenden Beitrag leisten, um schnell mit geeigneter Funktionsanpassung anschaulich-experimentell zu einer guten Annäherung von Himmelskörperbahnen zu gelangen, wie sie sich dem Auge am Himmel zeigen.

Das folgende Material für Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe besteht aus allen für das Verständnis des astronomischen Hintergrundproblems und des mathematischen Bearbeitungsansatzes nötigen Informationen. Zudem enthält es viele interessante Zusatzinformationen zum Weiterdenken, die sich nicht nur auf die eigentliche Approximation der fehlenden Daten beschränken, sondern sich auch auf grundlegende Sachverhalte erstrecken, etwa zu Bahnen astronomischer Himmelsobjekte, Kugelkoordinatensystemen oder Projektionen in die Ebene. Die Aufgabenstellungen sind als Arbeitsblätter aufbereitet. Die Aufgaben und die Lösungsvorschläge machen mit ihrer inhaltlichen Breite nicht nur die Leistungsstärke, sondern auch die Vielgestaltigkeit der Nutzungsmöglichkeiten des CAS-Rechners deutlich.

1. Die Himmelskugel – das astronomische Modell

„Weißt du wie viel Sternlein stehen an dem blauen Himmelszelt?“
Ganz selbstverständlich spricht dieses alte Kinderlied von einer ebenso fantastischen wie leistungsfähigen und grundlegenden Überlegung, um Phänomene der Astronomie einer einfachen mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen: dem Modell der Himmelskugel.

Die zentrale Idee zur Beschreibung der Bahn eines Himmelsobjektes, wie sie sich einem irdischen Beobachter „am Himmel zeigt“, ist die Modellierung mit Hilfe der sog. Himmelskugel oder Sphäre, die die zur Kugel idealisierte Erde konzentrisch enthält. Man denkt sich, wie schon in den frühsten Zeiten der Astronomie erfolgt, die Erde eingebettet in eine fiktive Kugel von nicht näher bestimmtem Radius, auf deren Oberfläche für den Erdbeobachter die Himmelskörper und deren Bahnen projiziert sind. Auf diese Weise wird es möglich, einen Stern, einen Kometen und dessen scheinbare Bahn oder andere Himmelskörper im Gesichtskreis des Beobachters zu lokalisieren. Aussagen, wie etwa die Folgende, sind dann möglich und schaffen die Voraussetzung, um z. B. einen Kometen am Nachthimmel ausfindig zu machen. „Er steht im Westen hoch über dem Horizont“ wäre eine mögliche einfache, wenn auch noch sehr ungenaue Beschreibungsmöglichkeit. Dabei wird der Begriff des Horizonts auf „augenscheinliche“ Weise verwendet.

Mathematische Definition: Der **Horizont** ist der Schnittkreis der Himmelskugel mit einer Ebene durch den Erdmittelpunkt, die parallel zur Tangentialebene an die Erde im Beobachtungspunkt (= Standpunkt des Beobachters auf der Erdoberfläche) ist.

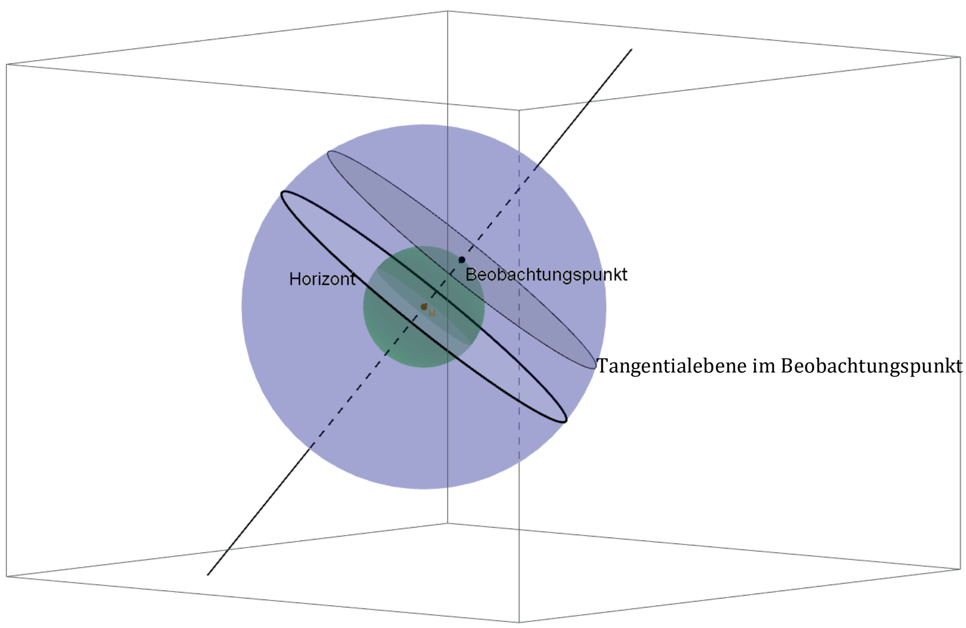


Abbildung 1: Erdkugel mit Tangentialebene und, zugehörig, Himmelskugel mit Horizont

Aber es gibt ein Problem: Bedingt durch die Rotation der Erde um ihre Achse im Verlaufe eines Tages, ändert sich für einen ortstreuen Beobachter fortwährend das Horizontsystem. Das ist der Grund, warum Sterne in der Nähe des Polarsterns auf einer scheinbaren Kreisbahn um ihn herum wandern.

Der Wunsch nach Präzisierung solcher oder ähnlicher Ortsangaben für Himmelskörper auf der Sphäre führt auf die Beschreibung vermittels geeigneter Koordinatensysteme.

Ein naheliegender Ansatz ist der folgende: Zur Orientierung auf der Himmelskugel wird diese mit einem Gradnetz, ähnlich dem der Erdkugel, überzogen. Ausgehend von einer Grundebene – etwa der Ebene des Himmelsäquators (siehe Abbildung 2) – können, parallel hierzu, Breitenkreise und, senkrecht zur Grundebene und durch die Himmelspole verlaufend, Meridiane (oder Längenkreise) betrachtet werden (siehe Abbildung 3).

Definition: Der Schnittkreis der Ebene des Erdäquators mit der Himmelskugel wird **Himmelsäquator** genannt.

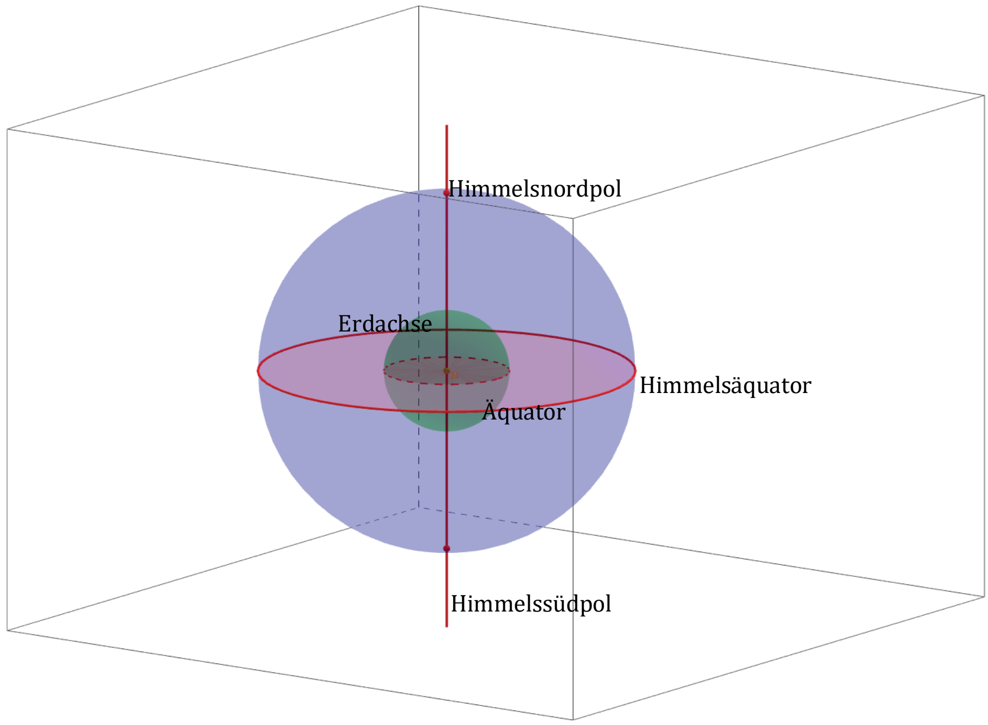


Abbildung 2: Erd- und Himmelskugel mit Himmelsäquator und Himmels-Nord- und Südpol

Wie von der Erdkugel gewohnt, haben Breitenkreise auch auf der Himmelskugel unterschiedliche Radien. Meridiane dagegen sind sämtlich Großkreise, d. h. Kreise mit dem gleichen Radius wie die Himmelskugel.

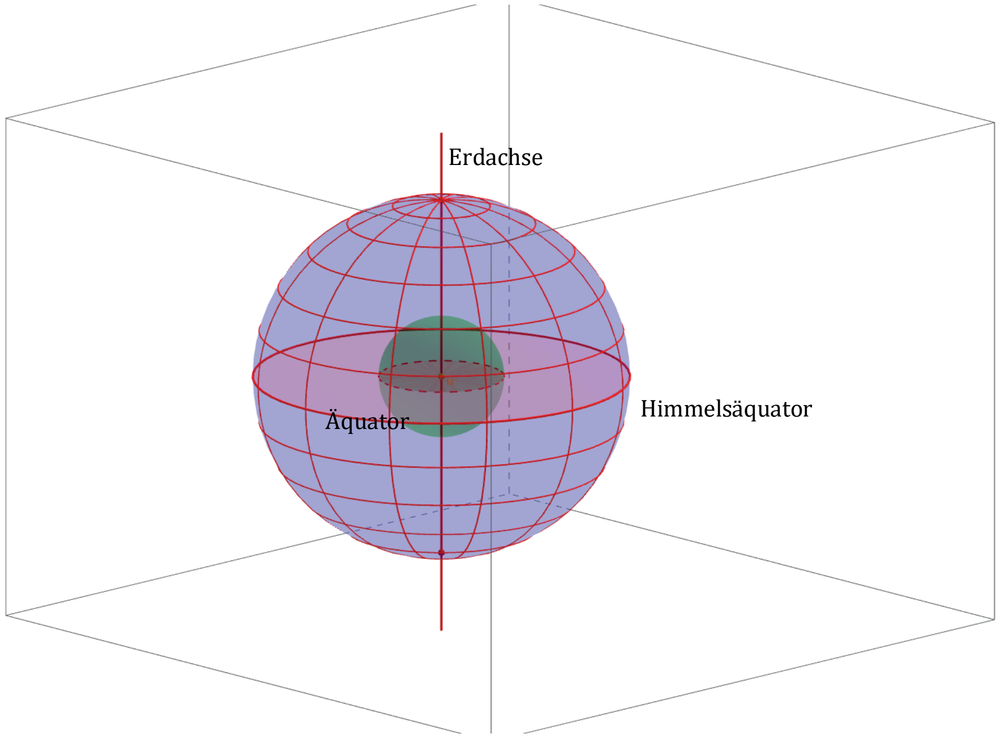
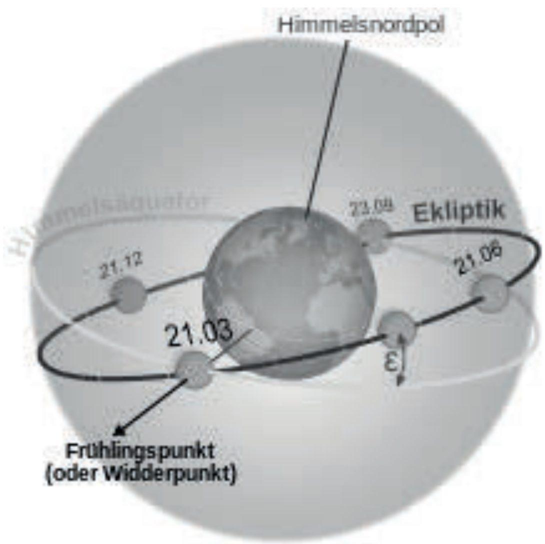


Abbildung 3: Himmelskugel mit Himmelsäquator, Himmels-Nord- und -Südpol sowie Breitenkreisen und Meridianen

Mit einer solchen Gradnetz-Festlegung lässt sich nun jeder Punkt der Himmelskugel eindeutig durch seine Koordinaten bzgl. Breitenkreis und Meridian angeben.

Heute ist es für uns selbstverständlich, den Himmelsäquator als Breitenkreis 0° zu verstehen. Früher dagegen haben fast alle astronomischen Beobachter das Himmelskoordinatensystem ausgehend von der scheinbaren Sonnenbahn als 0° Breite gewählt.

Definition: Die **Ekliptik** ist die scheinbare Bahn der Sonne im Laufe eines Jahres auf der gedachten Himmelskugel um die im Zentrum befindliche Erde.



Diese Kreislinie bildet einen Großkreis, der die 12 Sternbilder, die sog. Tier-Sternbilder, durchläuft. Daher auch die Bezeichnung Tierkreis.

Die Ebene der Ekliptik ist gegenüber der durch den Himmelsäquator definierten Äquatorebene um einen Winkel geneigt, der als Erdneigung (oder Schiefe der Ekliptik) bezeichnet wird.

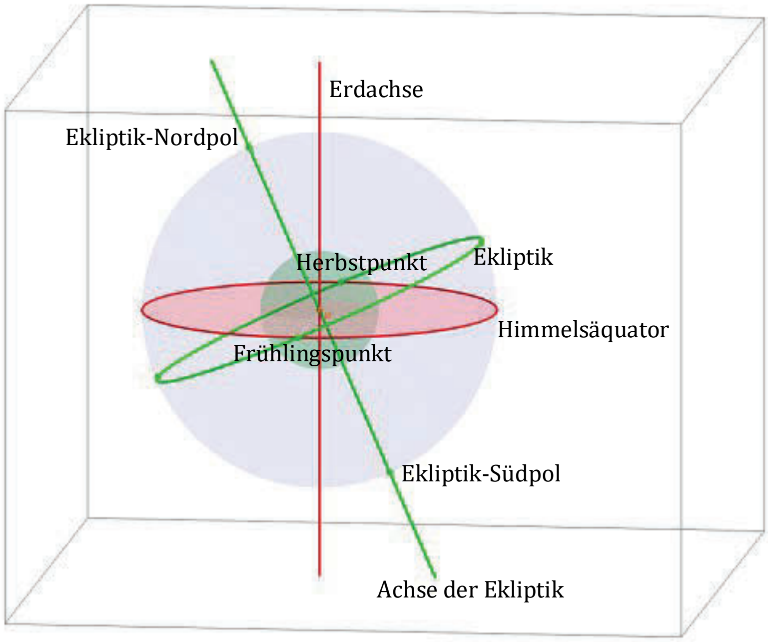


Abbildung 4: Himmelskugel mit Ekliptik, Himmelsäquator sowie Frühlings- und Herbstpunkt

Ganz ähnlich wie im Äquatorsystem kann ein Tierkreis-Koordinatensystem definiert werden: Die Ekliptikebene wird mit der Breite 0° versehen, alle weiteren Breitenkreise sind nun parallel zur Ekliptikebene. Die Meridiane sind Großkreise, die senkrecht zur Ekliptikebene verlaufen. Sie schneiden sich in den beiden Polen des Ekliptiksystems.

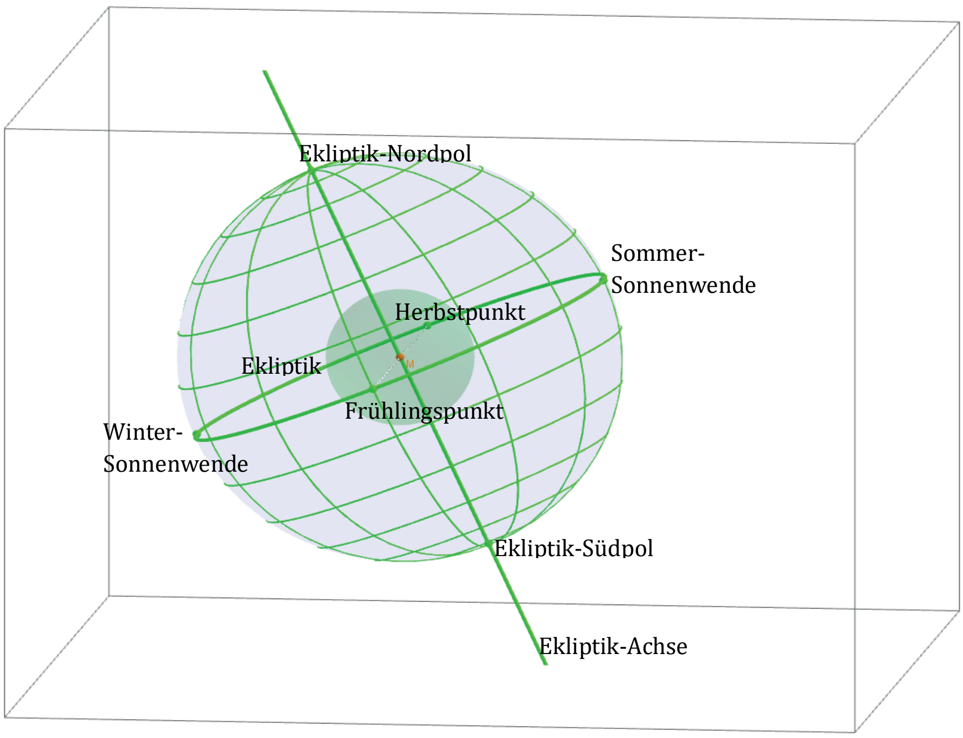


Abbildung 5: Himmelskugel mit Ekliptik sowie Breitenkreisen und Meridianen des Ekliptiksystems

2. Mathematische Himmels-Geographie: Kartenentwürfe

Eine Orientierung auf der Himmelskugel mit Hilfe eines Gradnetzes, das für jeden Punkt der Sphäre eine Charakterisierung durch den zugehörigen Breitenkreis und den entsprechenden Meridian ermöglicht, stellt ein leistungsfähiges Denkmodell dar. Eine konkrete graphische Veranschaulichung ist dagegen anspruchsvoll, ja schwierig. Auch mit Hilfe von 3D-Geometrie-Software erweist es sich als aufwendig, zu vorgegebenen Himmelkoordinaten auf der Sphäre einen Punkt oder auch Scharen von Punkten einzutragen (Vergleiche die Aufträge 3a, 3e und 3f aus Arbeitsblatt 3, die als Grundlage hierfür dienen können.) Um wie viel größer waren die Schwierigkeiten, die zur Zeit von Erasmus Schmidt im beginnenden 17. Jahrhundert diesbezüglich, allein unter Verwendung üblicher mechanischer Zeichenhilfsmittel wie Stechzirkel, Lineal und einem Himmelsglobus mit Messing Großkreis-Ring, zu überwinden waren. Der Wunsch, ebene Karten zu konstruieren, die eben diese Veranschaulichung leicht ermöglichten, war dementsprechend naheliegend.

Der einfachste Ansatz, der sich für ein ebenes Bild der Himmelskugel anbietet, betrachtet die Länge und die Breite als Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems.

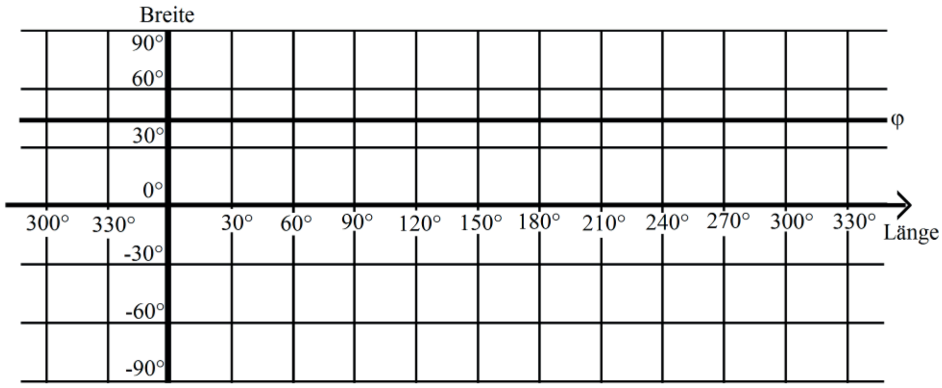


Abbildung 6: Die mit Hilfe der kartesischen Koordinaten Länge und Breite entstehende Karte wird **quadratische Plattkarte** genannt.

Die „merkwürdige“ Beschriftung der Längen-Achse wird verständlich, wenn man bedenkt, dass es nur die Längengrade *0°, ..., 360°* ≅ *0°* gibt.

Dabei kann die Länge Werte von 0° bis $360° \cong 0°$ annehmen, die Breite, wie vom Erdgradnetz gewohnt, nimmt Werte zwischen $-90°$ und $+90°$ an.

Eine nähere Analyse dieses Kartenvorschlages verdeutlicht jedoch sofort auch Probleme:

(1) Jeder φ-Breitenkreis hat auf der Sphäre den Umfang $2\pi \cdot R \cdot \cos\varphi$, wenn R den fiktiven Radius der Sphäre bezeichnet. In der Plattkarte werden aber *alle* Breitenkreise auf *gleichlange* Strecken abgebildet. Der Kartenentwurf ist also ***nicht längentreu***!

(2) Betrachtet man z. B. den Winkel, den zwei verschiedene Meridiane an einem Pol der Sphäre miteinander einschließen, und vergleicht es mit der Situation auf der Karte, so zeigt sich auch hier etwas Merkwürdiges: Die Bilder aller Meridiane sind parallele Strecken. Der Kartenentwurf ist also auch ***nicht winkeltreu***.

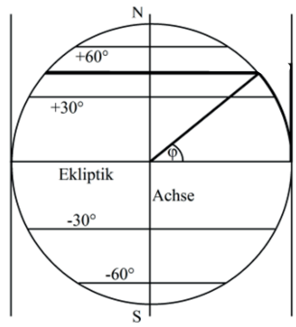


Abbildung 7: Punkt auf der Himmelskugel mit φ - und λ-Koordinate

(3) Für eine Kugelzone (oder Kugelschicht) auf der Sphäre, die von zwei Breitenkreisen mit 1° Unterschied eingeschlossen wird, lässt sich die bekannte Formel für die Mantelfläche nutzen: Ist der Abstand der beiden (zur Ekliptik) parallelen Ebenen gleich h, so gilt für den Mantel der Kugelzone: $F_{Mantel} = 2\pi Rh$. Damit folgt für die Mantelfläche der Kugelzone, die von zwei Breitenkreisen mit 1° Unterschied gebildet wird,

$$A = 2\pi \cdot R^2 (\sin(\varphi + 1) - \sin\varphi),$$

wenn der Winkel φ zum Breitenkreis gehört, der näher zur Ekliptik ist. Aus Abbildung 7 liest man ab, dass

$$h_{Winkel\varphi} = R \sin\varphi \text{ bzw. } h_{Winkel(\varphi+1)} = R \sin(\varphi + 1) \text{ gilt.}$$

Das Bild dieser Zone ist ein Rechteckstreifen auf der Karte, der den Flächeninhalt $2\pi \cdot R \cdot 1 \cdot R$ hat, also von der speziellen Wahl von φ unabhängig ist. Der Kartenentwurf ist also auch ***nicht flächentreu***.

Übrigens ...

Längentreue:
Die Längen zweier Kurven im Original verhalten sich wie die Längen der Bildkurven.

Winkeltreue:
Der Winkel, den zwei Kurven im Original miteinander einschließen, ist derselbe, wie der Winkel, den die Bildkurven miteinander einschließen.

Flächentreue:
Die Inhalte zweier Flächen im Original verhalten sich wie die Flächeninhalte der entsprechenden Bildflächen.

Der Ansatz, der auf die quadratische Plattkarte führt, ist mithin in vielerlei Hinsicht unbefriedigend. Es war naheliegend, nach Kartenentwürfen zu suchen, die zumindest einige der wünschenswerten Treue-Eigenschaften besitzen.

Die Schwierigkeiten, die sich bei einem derartigen Vorhaben auftun, sind elementar: *Denken Sie sich einen Kugel-Luftballon mit (irgend)einem (hinreichend langen) Schnitt geöffnet und versuchen Sie nun, die so geöffnete „Sphäre“ in die Ebene „zu drücken“. Wie Sie es auch versuchen, Sie müssen dabei ziehen und zerren. Wenn Sie vorher ein kleines Quadrat oder ein Dreieck auf den aufgeblasenen Ballon gezeichnet hatten, lässt sich* *exemplarisch sehen, was passiert: Quadrat und Dreieck geraten durch die Drück-und-Zieh-Aktion außer Form*. Mathematisch ausgedrückt: In jedem zweidimensionalen Kartenentwurf, der die Himmelskugel über eine geeignete Transformation in die Ebene projiziert, ist diese Abbildung stets mit Verzerrungen verbunden, die je nach der gewählten Projektionsart entsprechend unterschiedlich ausfallen. Der Versuch, die gekrümmte Sphäre ohne Verzerrungen in die Ebene abzubilden und dabei sowohl die Längen- als auch Flächen- und Winkeltreue zu erreichen, ist nicht möglich. Die Kartenentwürfe, die sich im Laufe der Jahrhunderte durchsetzten, verzichteten dementsprechend auf die eine oder andere Forderung der geometrischen Treue.

Unter der Vielzahl an gebräuchlichen Entwürfen hat sich bereits in den frühen Zeiten der Kartographie die Projektion auf Zylinder, die die Sphäre umhüllen, als besonders leicht übertragbar erwiesen.

Die Kartenfläche kann man sich als die Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders vorstellen, der die Sphäre im Großkreis der Ekliptik berührt und dessen Mittelachse durch die Pole des Ekliptik-Systems geht. Die Nahtstelle, an der beim Zusammenrollen der Karte der linke und der rechte Kartenrand aneinanderstoßen, berührt den 0°-Meridian.

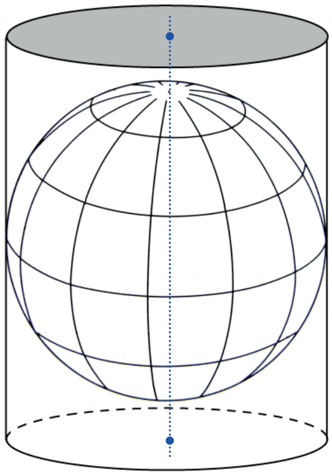


Abbildung 8: Sphäre mit umhüllendem Zylinder und blauer Projektionsachse

Stellt man sich die Achse der Sphäre durch die beiden Pole als Leuchtstab vor, so wird das Gradnetz der Sphäre durch parallele Lichtstrahlen, die senkrecht zur Achse stehen, auf die Karte projiziert. Breitenkreise gehen in waagerechte Strecken über, Meridiane in senkrechte Strecken.

Der auf diese Weise entstehende Kartenentwurf unterscheidet sich von der oben diskutierten quadratischen Plattkarte: Der Bildpunkt P' des Sphärenpunktes P mit der Länge λ und der Breite φ erhält **in der quadratischen Plattkarte** die Koordinaten

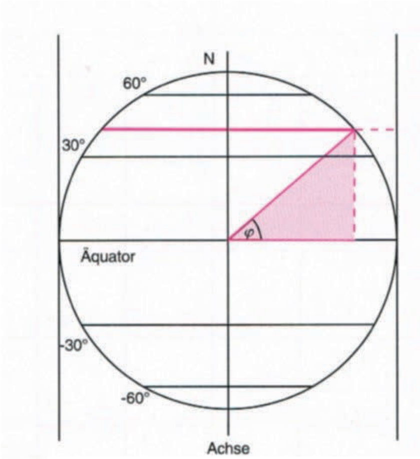


Abbildung 9: Archimedes-Projektion

$$x_{P'} = R \cdot arc(\lambda) \text{ und } y_{P'} = R \cdot arc(\varphi).$$

(Hierbei steht $arc(\dots)$ für das Bogenmaß des jeweils betrachteten Winkels.)

In der eben beschriebenen „**Archimedes-Projektion**“ der Sphäre auf den einhüllenden Zylinder ergibt sich für den Bildpunkt

$$x_{P'} = R \cdot arc(\lambda) \text{ und } y_{P'} = R \cdot sin(\varphi).$$

Winkeltreue und auch Längentreue liefert die Archimedes-Projektion ebenfalls nicht. Die gleichen Argumente wie für die Plattkarte können herangezogen werden.

Dagegen überzeugt man sich aber leicht, dass nun Flächentreue vorliegt. Bei der Betrachtung „kleiner“ Gebiete kann man also davon ausgehen, dass sich diese auf der Sphäre und auf der Karte entsprechend „verhalten“.

Beweis der Flächentreue der Archimedes-Projektion

Die wichtigsten Argumente hierfür liefern wieder Kugelzonen, die von einem φ_2-Breitenkreis und einem φ_1-Breitenkreis ($\varphi_2 > \varphi_1$) begrenzt werden. Für die Kugelzonen ergibt sich der Flächeninhalt

$$A = 2\pi \cdot R^2 (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)).$$

Das Bild dieser Zone ist ein Rechteck mit den Seitenlängen

$$R \cdot 2\pi \quad \text{und} \quad R \cdot (\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)).$$

Entsprechend überlegt man sich, dass ein Kugelviereck, das von zwei Meridianen und zwei Breitenkreisen begrenzt wird, ebenfalls diese Eigenschaft der Flächengleichheit besitzt.

Der letzte Schritt nutzt dann die Überlegung aus, dass jede beliebige Fläche auf der Sphäre durch eine Schar von Kugelvierecken der beschriebenen Art beliebig dicht angenähert werden kann.

Es gibt weitere Vorschläge für Zylinder- und andere Kartenentwürfe. Unter ihnen ist der vielleicht berühmteste die Mercator-Projektion. Der Bildpunkt *P’* des Sphärenpunktes *P* mit der Länge λ und der Breite φ hat hier die folgenden Koordinaten:

$$x_{P'} = R \cdot arc(\lambda) \text{ und } y_{P'} = R \cdot \ln\left(\tan(\frac{1}{2}\varphi + 45°)\right).$$

Dieser Kartenentwurf hat die besondere Eigenschaft, winkeltreu zu sein. Das ist der Grund, warum Kurven auf der Sphäre, die gleichen Kurswinkel haben, durch die Projektion in Geraden abgebildet werden.

Übrigens ...

Der Kartograph **Gerhard Mercator** (1512-1594) entwickelte den nach ihm benannten Kartenentwurf, um eine für die Schifffahrt benutzbare Karte der Erde zu erhalten, auf der Schiffsrouten mit konstantem Kurswinkel einfach mit dem Lineal gezogen werden konnten.

Der Ansatz für die Berechnung des φ-Breitenkreis-Bildes zeigt exemplarisch, wie durch geeignete Wahl der Transformation eine bestimmte Eigenschaft der Karte, hier die Winkeltreue, erzwungen werden kann.

3. Der Große Komet von 1618: Ein astronomisches CAS-Projekt

Die Voraussetzungen: Eine historische Beobachtungsschrift

Der Lauf der Gestirne am Himmel wurde zu allen Zeiten aufmerksam verfolgt und es zeigte sich bald, dass es neben den scheinbar harmonisch und regelmäßig verlaufenden Himmelskörpern wie den Fixsternen, Planeten, Sonne und Mond auch eine andere Kategorie von Objekten gab, über deren plötzliches Auftreten genau wie über ihre Herkunft im 17. Jahrhundert noch keine gesicherten Aussagen getroffen werden konnten. Dazu zählten auch die Kometen.

Als es im geschichtsträchtigen Jahr 1618, am Vorabend des 30-jährigen Krieges, in recht kurzen Abständen zum Auftreten gleich dreier Kometen am europäischen Nachthimmel kam, war das Interesse entsprechend groß. Neben unzähligen astrologischen Flugblättern, die vor drohendem Unheil warnten, erschienen von vielen Mathematikern Europas auch Schriften über deren exakte Beobachtung und Bahnbeschreibungen der Kometen. So auch an der Universität Wittenberg, wo von dem dort zu dieser Zeit lehrenden Mathematikprofessor Erasmus Schmidt (1570–1637) eine Kometenschrift mit Beobachtungsdaten zum Stand des Kometen überliefert ist.[1] Schmidt beobachtete den dritten und größten Kometen des Jahres 1618 (C/1618 W1) vom 21. November 1618 bis zum 5. Januar 1619 täglich, nur an den Tagen unterbrochen, an denen man den Kometen „*wegen des Gewölckes nicht* [hat] *sehen können*."[2]

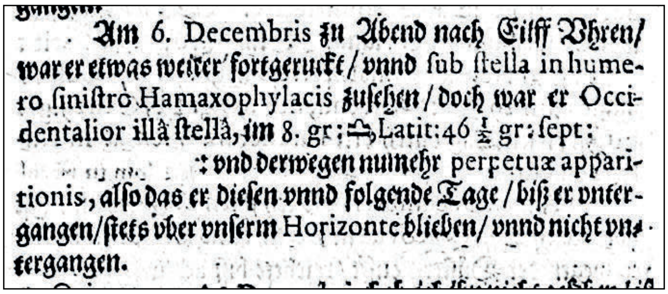
Die Angabe der von ihm beobachteten Kometen-Positionsdaten geschieht bei Schmidt als fortlaufende Beschreibung stets in gleicher Weise. Das Beispiel vom 4. Dezember soll dies verdeutlichen: (siehe nächste Seite)

[1] Vgl. Erasmus Schmidt, Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges […] Bedencken, Wittenberg, 1619.

[2] Die Datumsangaben sind im damals in den protestantischen Ländern noch gültigen julianischen Kalender erfolgt. Für eine Übertragung in den heute gültigen Kalender müssten jeweils 10 Tage hinzu addiert werden.

Am 4. Decembris/ war er uber die beyden stellulas in dorso Hamaxophylacis komen/ und stund auffs genaweste im 15 ½ gr. ♎, Latit. Sept. 40. […] *Hatte Caudam noch in der lenge/ wie vorigen tag.* *Ist noch nicht Europae verticalis gewesen.*	Begonnen wird am jeweiligen Beobachtungstag mit der ungefähren Einordnung des Kometen an der Sphäre[3] mithilfe der nahe stehenden Sternbilder, hier: der Rücken des Bärenhüters. Es folgt die Angabe seiner Position nach Länge (Longitude) und Breite (Latitude). Die Länge wird auf den Tierkreis der Ekliptik[4] bezogen, in dem jedes der zwölf Tierkreiszeichen einen Bereich von 30 Grad besitzt (hier: 15,5° im Zeichen Waage), bei der Breite erfolgt der Zusatz „septemtrionalis“ für nördlich, „australis“ für südlich (hier: 40° nördlich). Weitere Angaben betreffen die Schweiflänge und die Orte, über denen der Komet im Zenit stand.

Für den 6. Dezember findet sich folgender Eintrag:



Am 6. Decembris zu Abend nach Eilff Uhren/ war er etwas weiter fortgeruckt/ vnnd sub stella in humero sinistro Hamaxophylacis zusehen/ doch war er Occidentalior illâ stellâ, im 8. gr: ♎ Latit: 46 ½ gr: sept: : vnd derwegen nunmehr perpetuæ apparitionis, also das er diesen vnnd folgende Tage/ biß er vntergangen/ stets vber vnserm Horizonte blieben/ vnnd nicht vntergangen.

Um die Schmidt-Angaben zu verstehen, bedarf es einer „Übersetzung“:

Welche Länge und welche Breite wurden an diesem Tag gemessen?

Welcher absoluten Länge entsprechen die „Tierkreislängen“?

Die folgende Tabelle zeigt die von Schmidt in seiner Schrift zusammengestellten Beobachtungsdaten in aufbereiteter Form. Die ausgesparten Angaben für den 6.12.1618

3 Zur Erinnerung: Die Sphäre (= Himmelskugel) ist eine gedachte Kugelschale mit unendlich großem Radius, die als geozentrische Kugel die Erde umgibt. Sie dient als virtuelle „Rechenfläche“, um Koordinatenangaben insbesondere für Himmelsobjekte zu ermöglichen.

4 Zur Erinnerung: Die Ekliptik ist ein gedachter Großkreis auf der Himmelssphäre, auf dem sich die Sonne im Laufe des Jahres zu bewegen scheint. Sie ist im Vergleich zum Himmelsäquator um 23,5 Grad geneigt.

lassen sich mit Hilfe der oben gegeben Erläuterungen leicht eintragen, die absoluten Längen schnell berechnen.

Übrigens ...

Mit dieser Vorgehensweise der täglichen Beschreibung von Länge und Breite in Ekliptikkoordinaten, Aussagen zum Schweif und nahen Sternbildern, orientiert sich Schmidt inhaltlich, aber auch in der Art der Formulierungen sehr genau an einer damals üblichen Vorgehensweise der Kometenbeschreibung.

	Länge	**absolute Länge**	**Breite**
21.11.	-		8°
23.11.	10,5° ♏		12,5°
24.11.	8° ♏		18°
27.11.	0° ♏		27°
03.12.	18° ♎		39°
04.12.	15,5° ♎		40°
05.12.	13° ♎		43°
06.12.			
09.12.	3° ♎		50°
10.12.	0° ♎		53°
12.12.	26° ♍		55°
14.12.	20° ♍		57,5°
15.12.	16° ♍		58°
17.12.	12° ♍		60°
24.12.	25° ♌		-
26.12.	15° ♌		-
28.12.	11° ♌		-
05.01.	5° ♌		65°

Bedeutung der verwendeten Symbole:

Widder ♈:	0° - 30°
Stier ♉:	30° - 60°
Zwilling ♊:	60° - 90°
Krebs ♋:	90° - 120°
Löwe ♌:	120° - 150°
Jungfrau ♍:	150° - 180°
Waage ♎:	180° - 210°
Skorpion ♏:	210° - 240°
Schütze ♐:	240° - 270°
Steinbock ♑:	270° - 300°
Wassermann ♒:	300° - 330°
Fische ♓:	330° - 360°

So entspricht beispielsweise die Angabe 13° ♎ absolut einer Länge von (180° + 13° =)193°.

Für den 21.11. und vom 24.12. bis 28.12. fehlen entweder die Längen- oder die Breitenkoordinaten. Lässt sich hier eine sinnvolle Vermutung anstellen? Die folgenden Überlegungen sollen einen Weg aufzeigen, auf mathematisch wohlbegründete Weise, die fehlenden Daten mit Hilfe geeigneter Näherungsansätze zu ergänzen.

Die Analyse: Von der Kugel zum ebenen Zylinderkartenentwurf

Die Schmidt-Daten belegen deutlich, dass der beobachtete Komet eine bestimmte Bahn durchläuft. Die Astronomen stellen sich solche Bahnen als scheinbare Großkreise auf der Sphäre vor.

> **Übrigens …**
>
> Kometen und Großkreise … so ganz stimmt diese Aussage nicht, denn Kometenbahnen sind elliptischer oder hyperbolischer Natur. Dennoch ist der Verlauf für den irdischen Beobachter zum Zeitpunkt der besten Sichtbarkeit eines Kometen in Sonnennähe (Perihel) sehr ähnlich dem einer Großkreisbahn. Auch das war ein Grund, warum sich die Vorstellung einer Großkreis-Kometenbahn in der Wissenschaft viele Jahrhunderte gehalten hat.

Für ein Himmelsobjekt, das scheinbar auf einem Großkreis, der nicht parallel zur Grundebene des Koordinatensystems liegt, die Erde umläuft, bedeutet dies, dass ein Teil des Weges oberhalb der Grundebene verläuft, der anschließende unterhalb der Grundebene, dann wieder oberhalb der Grundebene, dann … .

Es handelt sich also um eine periodische Bewegung, die durch die verwendete Projektion als solche wiederzuerkennen ist.

Der Archimedes-Kartenentwurf hat die besondere Eigenschaft, dass aus einem gegen die Grundebene geneigten Großkreis auf der Sphäre in sehr guter Annäherung eine Projektions-Kurve in der Karte wird, die stark an eine bekannte, periodische Funktion mit der Periode 2π erinnert: Eine Kurve von sinusförmiger Gestalt.

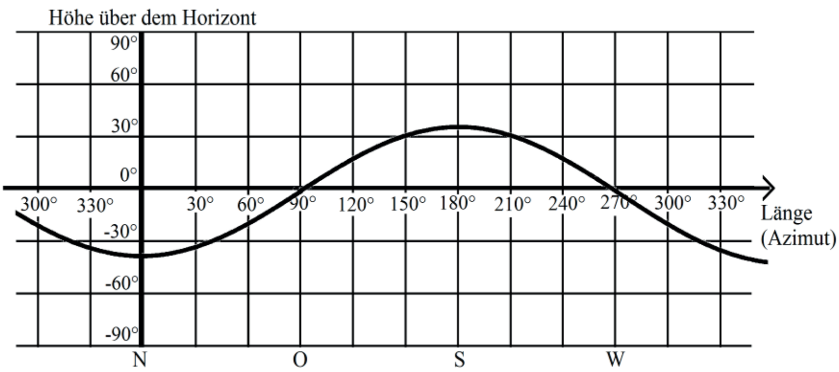


Abbildung 10: Beispiel für eine sinusförmige Bewegung eines Himmelskörpers auf einer Zylinderkarte, bei dem von einer annähernden Großkreisbewegung ausgegangen wird: Scheinbare Sonnenbahn zum Frühlingsanfang für einen Beobachter bei 50° N, wenn als Grundebene der Sphäre die Äquatorebene verwendet wird.

Ein zur Breite 0° geneigter Großkreis führt bei der Archimedes-Projektion auf eben diesen typischen periodischen Verlauf: Die sichtbare Bahn über der Breite 0° liefert den Bogen oberhalb der Achse, der nichtsichtbare Bahnverlauf den anderen Bogen der periodischen Bahn auf der Karte.

Die Übertragung dieses Gedankens auf die Schmidt-Daten ermöglicht es nun, durch die Suche nach einer geeigneten sinusförmigen Kurve, die die gegebenen Daten „gut" approximiert, ein mathematisches Werkzeug in die Hand zu bekommen, das ein sinnvolles Ergänzen nicht beobachteter Werte ermöglicht. Genauer:

Mit dem Ansatz einer sinusförmigen periodischen Bahnkurve $f(arc(\varphi)) = a \cdot \sin(b \cdot \varphi + c) + d$ in der Archimedes-Karte lassen sich durch geeignete Bestimmung der Parameter für die Näherungskurve die nicht beobachteten „Zwischenpunkte" der scheinbaren Kometenbahn sinnvoll ergänzen: Aus den in der Karte eingezeichneten originalen Daten führt die Frage nach geeigneter Bahn-Approximation durch eine Sinuskurve zur Möglichkeit, an beliebigen Zwischenstellen noch fehlende Bahnpunkte näherungsweise zu berechnen.

Diese Überlegungen ermöglichen nun die Formulierung einer **Serie von Arbeitsaufträgen** für die Schülerinnen und Schüler, die sukzessive zu bearbeiten sind, wobei eine arbeitsteilige Vorgehensweise denkbar und sinnvoll ist, woran sich dann ein Experten-Austausch nach Abschluss der Parallelbearbeitungen anschließen kann. Die am Ende des Beitrags angefügten **Arbeitsblätter 1-3** enthalten diese Arbeitsaufträge, vervollständigt um Lösungsvorschläge.

Das Ergebnis

Mit den Berechnungen haben wir nun „echte" Forschungsarbeit geleistet. Zur Zeit von Erasmus Schmidt kann man sich das Vorgehen ähnlich vorstellen – wenn auch mit anderen Hilfsmitteln. Mit trigonometrischen Tabellen und einfachen Rechenhilfen, zur mechanischen Multiplikation etwa, galt es zur Zeit von Erasmus Schmidt, die Annäherung der unvollständig gegebenen Kometenbahn zu vollziehen. Mit geeigneten Rechnungen versuchte man, möglichst „gute" Werte für fehlende Bahnangaben zu finden.

War die sinnvolle Ergänzung der Bahn eines unbekannten Himmelsobjektes wie eines Kometen früher häufig wichtig, damit daraus bestimmte vermeintliche astrologische Bedeutungen interpretativ „abgeleitet" werden konnten, steht heute vor allem die Bestimmung der wahren Bahnverläufe der himmlischen Körper im Vordergrund. Die wirkliche Rekonstruktion ist natürlich noch um einiges umfangreicher, doch bietet auch unser Ansatz einen guten Eindruck, wie man sich dieser Problemstellung innerhalb der Astronomie mit überschaubarem Aufwand nähern kann – mit erstaunlich guten Resultaten.

Literatur

Erasmus Schmidt, Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges […] Bedencken, Wittenberg, 1619.

H. G. Bigalke: Kugelgeometrie. Frankfurt am Main 1984.

R. Hame: Sphärische Trigonometrie. Additum für die Jahrgangsstufe 11. Oldenburg Schulbuchverlag, München 1995.

E. Hammer: Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1916.

W. Herget, E. Malitte, K. Richter e. a.: Neue Materialien für den Mathematikunterricht. Sinusfunktionen. Hannover 2002.

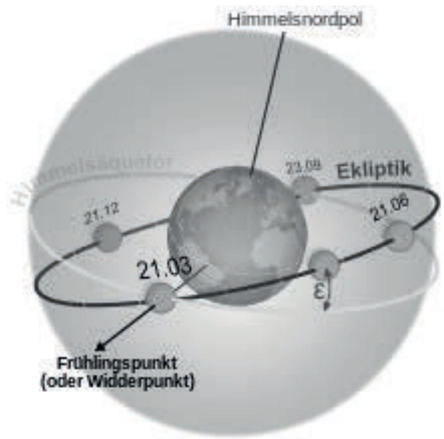
H. Kern, J. Rung: Sphärische Trigonometrie. München 1986.

Arbeitsblatt 1: Kartenentwürfe zum Modell der Himmelskugel

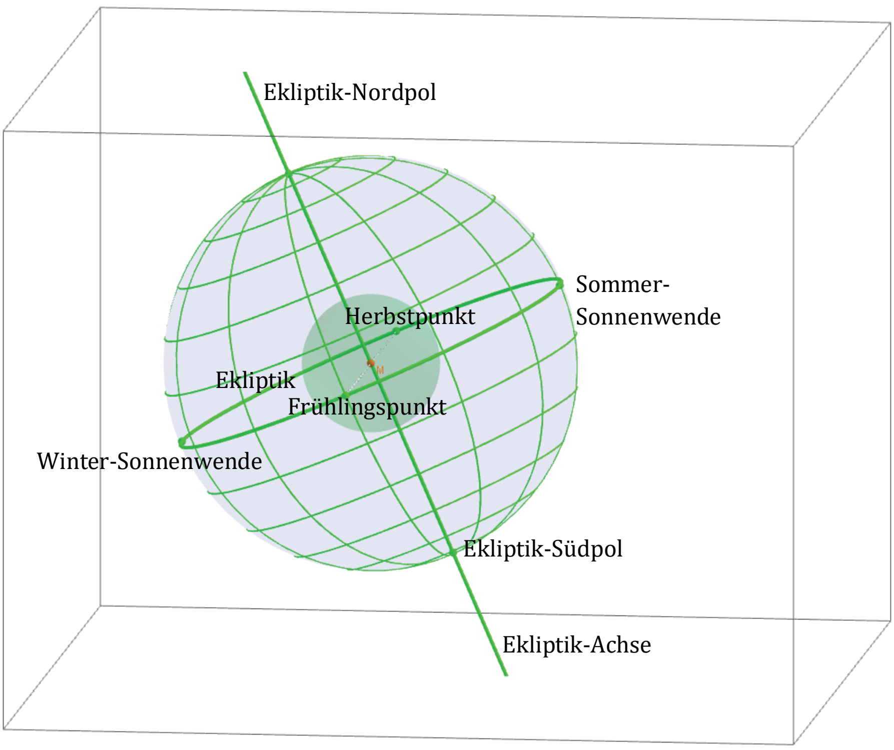
Der Lauf der Gestirne am Himmel wurde zu allen Zeiten aufmerksam verfolgt. Moderne astronomische Beobachtungsinstrumente von höchster Präzision beschreiben Orte astronomischer Objekte basierend auf den gleichen mathematischen Grundüberlegungen wie einfache Peilgeräte vor Hunderten von Jahren. Aus den dabei ermittelten Datenmengen über Objekt-Orte zu ausgewählten Beobachtungszeitpunkten werden heute wie damals Rückschlüsse auf Bahnbewegungen gezogen.

Aufgabe 1a: Informieren Sie sich über den mathematischen **Modellansatz der Himmelskugel** und der gebräuchlichen Koordinatensysteme, die am Himmelsäquator bzw. an der Ekliptik orientiert sind.

Aufgabe 1b: Nutzen Sie die für die Konstruktion im Raum ausgelegte Geometriesoftware Geogebra 3D, um die Himmelskugel mit Äquator- und Ekliptikkoordinatensystem zu konstruieren.



Tipp: Die fertige Konstruktion zeigt die nachstehende Graphik. Konstruieren Sie Schritt für Schritt: Beginnend mit Erd- und Himmelskugel mit Erdachse und Himmelsäquator, konstruieren Sie darauf folgend Ekliptik und Ekliptik-Achse und im letzten Schritt die Breitenkreise und Meridiane, bezogen auf die Ekliptik.



Bemerkung: Aus dem Einführungstext des Artikels kann der Abschnitt 1 „**Die Himmelskugel – das astronomische Modell**“ als Informationsquelle genutzt werden, der alle für die weitere

Auseinandersetzung wesentlichen Begriffe und Zusammenhänge zur Modellierung der Sphäre zusammenstellt.
Die Abbildungen 1-5 aus diesem Abschnitt des Informationsmaterials geben zudem einen Vorschlag, wie die 3D-Geogebra-Konstrutktion Schritt für Schritt entstehen kann.

Aufgabe 1c: Kartenentwürfe

Eine Orientierung auf der Himmelskugel mit Hilfe eines Gradnetzes, das für jeden Punkt der Sphäre eine Charakterisierung durch den zugehörigen Breitenkreis und den entsprechenden Meridian ermöglicht, stellt ein leistungsfähiges Denkmodell dar. Eine konkrete graphische Veranschaulichung ist dagegen anspruchsvoll. Auch mit Hilfe von 3D-Geometrie-Software erweist es sich als aufwendig, zu vorgegebenen Himmelkoordinaten auf der Sphäre einen Punkt oder auch Scharen von Punkten einzutragen. Der Wunsch, ebene Karten zur Sphäre zu konstruieren, die eine Veranschaulichung leicht ermöglichten, war dementsprechend naheliegend.

Sogenannte Zylinderkartenentwürfe gehen davon aus, dass die Punkte der Sphäre auf den Mantel eines Zylinders auf bestimmte Weise projiziert werden, der eng um die Sphäre gelegt ist.

Informieren Sie sich über die mathematischen Hintergründe der Plattkarten- und speziell der Archimedes-Projektion und setzen Sie sich mit den Vor- und Nachteilen dieser Karten auseinander.

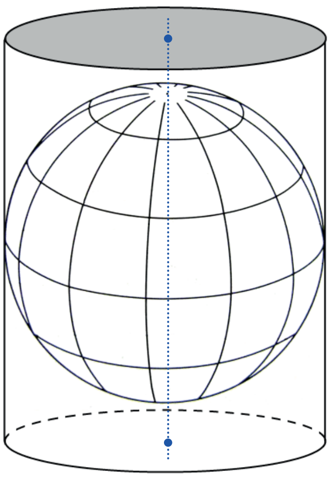


Abbildung: Sphäre mit umhüllendem Zylinder und blauer Projektionsachse

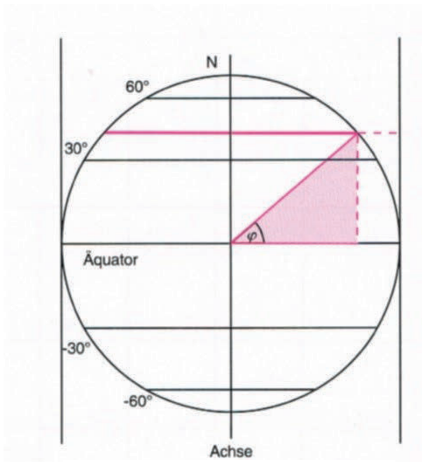


Abbildung: Archimedes-Projektion

Bemerkung: Aus dem Einführungstext des Artikels kann der Abschnitt 2 „**Mathematische Himmels-Geographie – Kartenentwürfe**“ als Informationsquelle genutzt werden, die alle für die weitere Auseinandersetzung wesentlichen Begriffe und Zusammenhänge zu Kartenentwürfen zusammenstellt.

Arbeitsblatt 2: Astronomische Beobachtungen als Datenquellen zur Beschreibung von Orten astronomischer Objekte: Der Große Komet von 1618.

Sorgfältig erhobene astronomische Beobachtungsdaten, wann und wie sie auch immer erhoben wurden, können Einblick in astronomische Zusammenhänge geben. Im Folgenden soll an historischen Daten zur scheinbaren Bewegung eines Kometen untersucht werden, wie aus den vorliegenden Daten (=Angaben von Himmelskoordinaten im ekliptikalen System für einen bestimmten Beobachtungszeitraum) Rückschlüsse auf die Kometenbahn gezogen werden können.

Aufgabe 2a: Setzen Sie sich dazu zunächst mit dem geschichtlichen Kontext und den erhaltenen historischen Beobachtungsdaten auseinander.

1618, am Vorabend des 30-jährigen Krieges, erschienen in recht kurzen Abständen gleich drei Kometen am europäischen Nachthimmel. Viele Mathematiker Europas verfassten Schriften über ihre Kometenbeobachtungen und ihre Beschreibungen der Kometenbahnen. So auch an der Universität Wittenberg, wo von dem dort zu dieser Zeit lehrenden Mathematikprofessor Erasmus Schmidt (1570–1637) eine Kometenschrift mit Beobachtungsdaten zum Stand des Kometen überliefert ist.[5] Er beobachtete den dritten und größten Kometen des Jahres 1618 (C/1618 W1) vom 21. November 1618 bis zum 5. Januar 1619 täglich, nur an den Tagen unterbrochen, an denen man den Kometen „*wegen des Gewölckes nicht* [hat] *sehen können*."[6]

Die Angabe der Beobachtungsdaten geschieht bei Erasmus Schmidt als fortlaufende Beschreibung stets in gleicher Weise; ein Beispiel vom 4. Dezember soll dies verdeutlichen.

Am 4. Decembris/ war er uber die beyden stellulas in dorso Hamaxophylacis komen/	Begonnen wird am jeweiligen Beobachtungstag mit der ungefähren Einordnung des Kometen an der Sphäre mithilfe der nahe stehenden Sternbilder, hier: der Rücken des Bärenhüters.
und stund auffs genaweste im 15 ½ gr. G*, Latit. Sept. 40.* […]	Es folgt die Angabe seiner Position nach Länge (Longitude) und Breite (Latitude). Die Länge wird auf den Tierkreis der Ekliptik bezogen, in dem jedes der zwölf Tierkreiszeichen einen Bereich von 30 Grad besitzt (hier: 15,5° im Zeichen Waage), bei der Breite erfolgt der Zusatz „septemtrionalis" für nördlich, „australis" für südlich (hier: 40° nördlich).

5 Vgl. Erasmus Schmidt, Prodromus Conjunctionis Magnae, anno 1623. futurae. Das ist: Kurtzes und Einfeltiges […] Bedencken, Wittenberg, 1619.

6 Die Datumsangaben sind im damals in den protestantischen Ländern noch gültigen julianischen Kalender erfolgt. Für eine Übertragung in den heute gültigen Kalender müssten jeweils 10 Tage hinzuaddiert werden.

Für den 6. Dezember findet sich dieser Eintrag:

Am 6. Decembris zu Abend nach Eilff Uhren/ war er etwas weiter fortgeruckt/ vnnd sub stella in humero sinistro Hamaxophylacis zusehen/ doch war er Occidentalior illâ stellâ, im 8. gr: ♎ Latit: 46 ½ gr: sept:
: vnd derwegen nunmehr perpetuæ apparitionis, also das er diesen vnnd folgende Tage/ biß er vntergangen/ stets vber vnserm Horizonte blieben/ vnnd nicht vntergangen.

Die folgende Tabelle zeigt die von Schmidt in seiner Schrift zusammengestellten Beobachtungsdaten in aufbereiteter Form.

	Länge	**absolute Länge**	**Breite**
21.11.	-		8°
23.11.	10,5° ♏		12,5°
24.11.	8° ♏		18°
27.11.	0° ♏		27°
03.12.	18° ♎		39°
04.12.	15,5° ♎		40°
05.12.	13° ♎		43°
06.12.			
09.12.	3° ♎		50°
10.12.	0° ♎		53°
12.12.	26° ♍		55°
14.12.	20° ♍		57,5°
15.12.	16° ♍		58°
17.12.	12° ♍		60°
24.12.	25° ♌		-
26.12.	15° ♌		-
28.12.	11° ♌		-
05.01.	5° ♌		65°

Es entspricht beispielsweise die Angabe 13° ♎ absolut einer Länge von (180° + 13° =)193°.

Bedeutung der verwendeten Symbole:

Widder ♈:	0° - 30°
Stier ♉:	30° - 60°
Zwilling ♊:	60° - 90°
Krebs ♋:	90° - 120°
Löwe ♌:	120° - 150°
Jungfrau ♍:	150° - 180°
Waage ♎:	180° - 210°
Skorpion ♏:	210° - 240°
Schütze ♐:	240° - 270°
Steinbock ♑:	270° - 300°
Wassermann ♒:	300° - 330°
Fische ♓:	330° - 360°

Aufgabe 2b: Verwenden Sie die Tabellenkalkulation, um die absolute Länge (=Länge als Gradzahl) sowie die dezimale Darstellung (=Länge als Bogenmaß) der von Schmidt angegebenen Längen-Daten zu bestimmen.

Arbeitsblatt 3: Der Große Komet von 1618 – ein astronomisches CAS-Projekt

Die von Schmidt vorgelegten Beobachtungsdaten weisen Lücken auf. Am 21.11. und vom 24. bis 28.12. fehlen entweder die Längen- oder die Breitenkoordinaten. Die naheliegende Frage: Lässt sich hier eine sinnvolle Vermutung anstellen? Die folgenden Überlegungen sollen einen Weg aufzeigen, auf mathematisch wohlbegründete Weise, die fehlenden Daten mit Hilfe geeigneter Näherungsansätze zu ergänzen.

	Länge	Breite
21.11.	-	8°
23.11.	10,5° ♏	12,5°
24.11.	8° ♏	18°
27.11.	0° ♏	27°
03.12.	18° ♎	39°
04.12.	15,5° ♎	40°
05.12.	13° ♎	43°
06.12.		
09.12.	3° ♎	50°
10.12.	0° ♎	53°
12.12.	26° ♍	55°
14.12.	20° ♍	57,5°
15.12.	16° ♍	58°
17.12.	12° ♍	60°
24.12.	25° ♌	-
26.12.	15° ♌	-
28.12.	11° ♌	-
05.01.	5° ♌	65°

Die Schmidt-Daten belegen deutlich, dass der beobachtete Komet eine Bahn durchläuft. Die Astronomen stellen sich diese Bahnen als scheinbare Großkreise auf der Sphäre vor.

Für ein Himmelsobjekt, das scheinbar auf einem Großkreis, der nicht parallel zur Grundebene des Koordinatensystems liegt, die Erde umläuft, bedeutet dies, dass ein Teil des Weges oberhalb der Grundebene verläuft, der anschließende unterhalb der Grundebene, dann wieder oberhalb der Grundebene, dann … . Es handelt sich also um einen periodischen Bewegungsvorgang, der durch die verwendete Projektion als solcher wiederzuerkennen ist.

Der Archimedes-Kartenentwurf hat die besondere Eigenschaft, dass aus einem gegen die Grundebene geneigten Großkreis auf der Sphäre in sehr guter Annäherung eine Projektions-Kurve in der Karte wird, die sehr an eine bekannte, periodische Funktion mit der Periode 2π erinnert: Eine Kurve von sinusförmiger Gestalt.

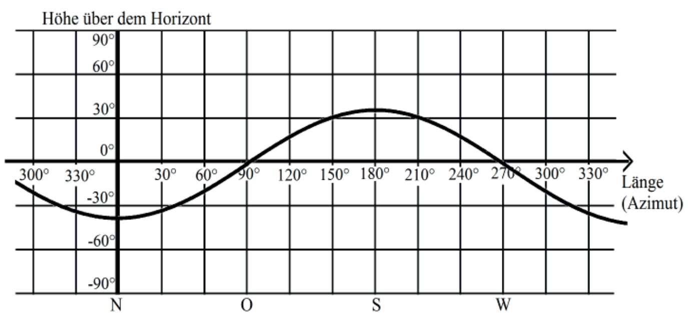


Abbildung: Beispiel für eine sinusförmige Bewegung eines Himmelskörpers auf einer Zylinderkarte, bei dem von einer annähernden Großkreisbewegung ausgegangen wird: Scheinbare Sonnenbahn zum Frühlingsanfang für einen Beobachter bei 50° N, wenn als Grundebene der Sphäre die Äquatorebene verwendet wird.

***Bemerkung**:* Die folgenden 3 Aufgabenvorschläge ermöglichen eine sukzessive Bearbeitung, aber auch arbeitsteiliges oder nur partielles Bearbeiten. (Für die zuletzt genannte Vorgehensweise ist Aufgabenvorschlag Ia oder IIa voranzustellen.)

Aufgabenvorschlag I (Verwendung der Tabellenkalkulation)

Aufgabe a: Nutzen Sie die Tabellenkalkulation, um aus den Beobachtungsdaten von Schmidt die Bildpunkte der Archimedes-Projektion zu berechnen.

Aufgabe b: Stellen Sie Bildpunkte der Archimedes-Projektion grafisch dar.

Aufgabe c: Diskutieren Sie die Möglichkeit, verschiedene Funktionen an die „Punktwolke“ der Schmidt-Daten anzupassen.

Aufgabe d: Nutzen Sie die Sinus-Regression, um eine sinnvolle Funktionsanpassung für die Schmidt-Daten zu erhalten.

Aufgabe e: Berechnen Sie Näherungswerte für die Lücken in den Ausgangsdaten, unter Heranziehung der von Ihnen unter **c** ermittelten Sinus-Funktion.

Aufgabe f: Ergänzen Sie die Schmidt-Daten durch weitere Näherungswerte für die Kometenbahn.

Aufgabenvorschlag II (Verwendung des Statistikmenüs)

Aufgabe a: Nutzen Sie das Statistik-Menü, um aus den Beobachtungsdaten von Schmidt die Bildpunkte der Archimedes-Projektion zu berechnen und grafisch darzustellen.

Aufgabe b: Stellen Sie Bildpunkte der Archimedes-Projektion grafisch dar.

Aufgabe c: Diskutieren Sie die Möglichkeit, verschiedene Funktionen an die „Punktwolke“ der Schmidt-Daten anzupassen. Variieren Sie die Parameter der Funktion und untersuchen Sie die Güte der Approximation der Kometenbahn durch die verschiedenen Funktionsterme.

Aufgabe d: Diskutieren Sie Fehlermöglichkeiten und Grenzen Ihrer Vorgehensweise.

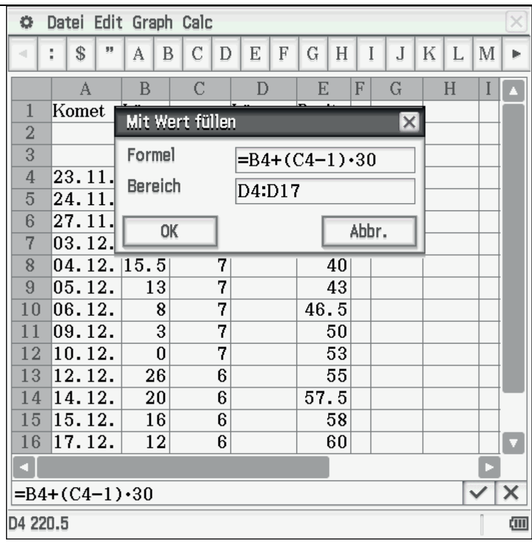
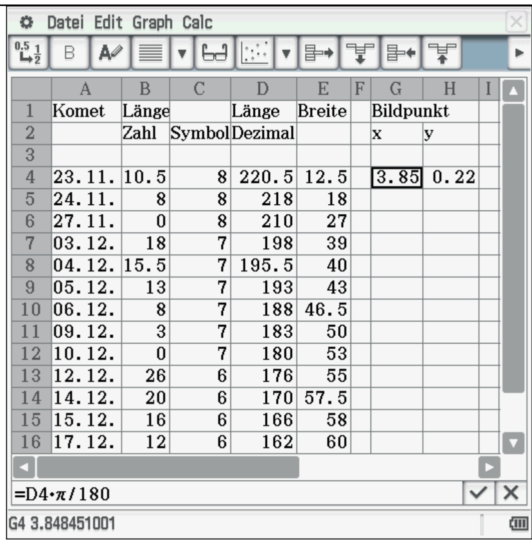
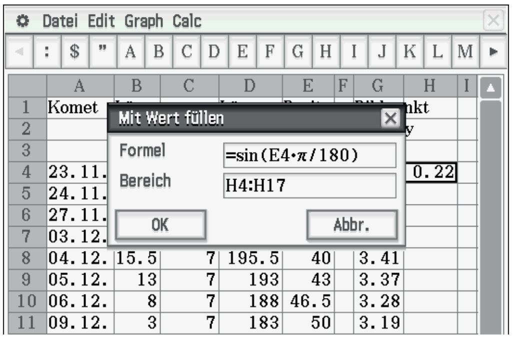
Aufgabenvorschlag III (Verwendung des Geometrie-Menüs)

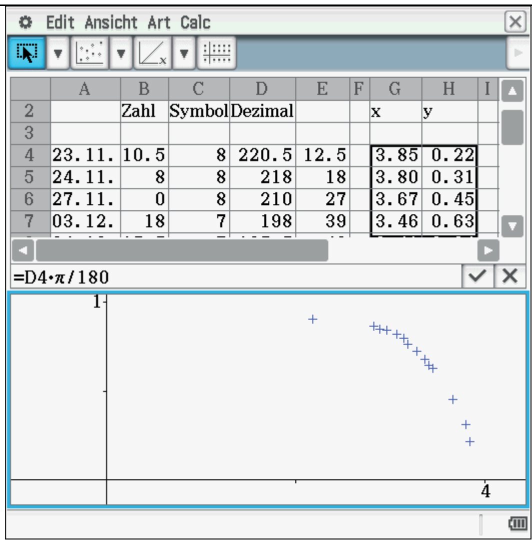
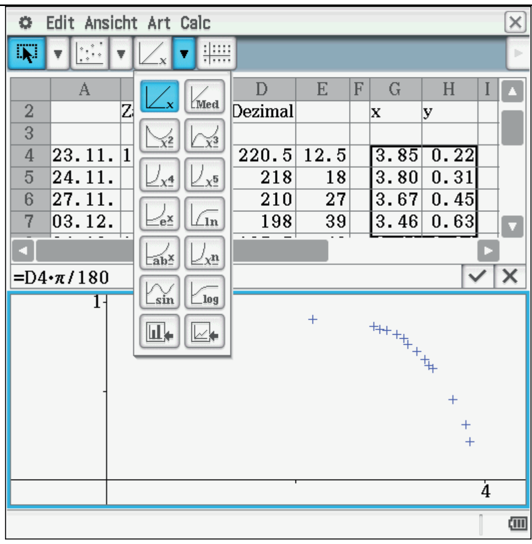
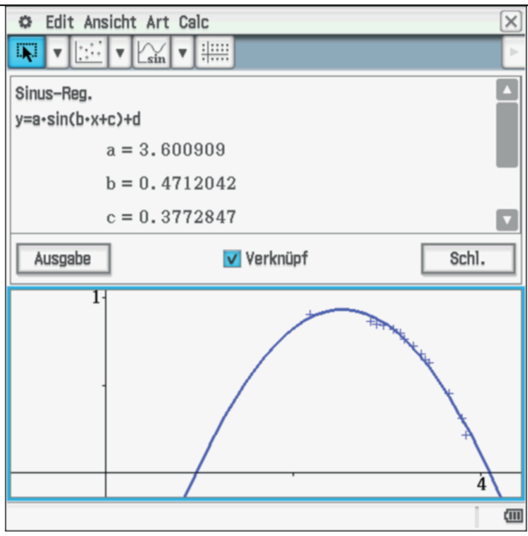
Aufgabe a: Nutzen Sie das Geometrie-Menü, um die Bildpunkte der Archimedes-Projektion der Schmidt-Daten auf dem Zeichenblatt einzutragen.

Aufgabe b: Untersuchen Sie verschiedene Funktionsterme, um die gegebenen Daten visuell möglichst gut durch eine Kurve zu approximieren. Diskutieren Sie Ihr Vorgehen.

Lösungshinweise

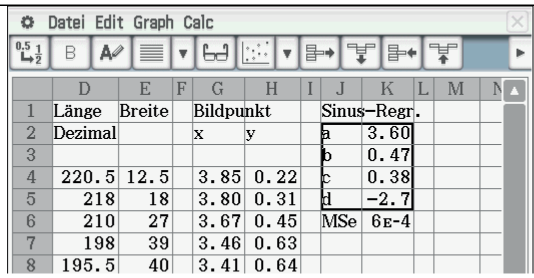
I: Verwendung der Tabellenkalkulation

	Anforderungen	Lösungsmöglichkeiten
	Die Schülerinnen und Schüler ...	**Ausgewählte Screenshots**
Ia	• benennen die Spalten; • tragen die vollständig vorhandenen Datensätze geeignet in ein Tabellenblatt ein, wobei für die Länge (Zahl und Symbol) zwei Spalten verwendet werden; • wandeln das Symbol in der Längenangabe in eine natürliche Zahl um; • nutzen eine Formel, mit der sie aus den zwei Angaben für die Länge eine Dezimalzahl berechnen und das Menü, um den entsprechenden Bereich damit zu füllen.	
Ia	• berechnen die Koordinaten der Bildpunkte der Archimedes-Projektion (vgl. Abschnitt 2), also die x-Koordinate ist das Bogenmaß der Länge und die y-Koordinate ist der Sinus der Breite; • geben die zugehörigen Formeln ein; • füllen den entsprechenden Bereich.	

<table>
<tr>
<td>Ib</td>
<td>• stellen die Bildpunkte der Archimedes-Projektion grafisch dar.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ic</td>
<td>• diskutieren die Möglichkeit, ganz verschiedene Funktionen an die „Punktwolke“ anpassen zu können.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Id</td>
<td>• nutzen die Sinus-Regression um per „Knopfdruck“ eine sinnvolle Funktionsanpassung zu erhalten;
• vergleichen die transformierten Daten (Kreuze) mit dem durchgezogenen Graphen der Sinusfunktion in dem dargestellten Bereich.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Ie

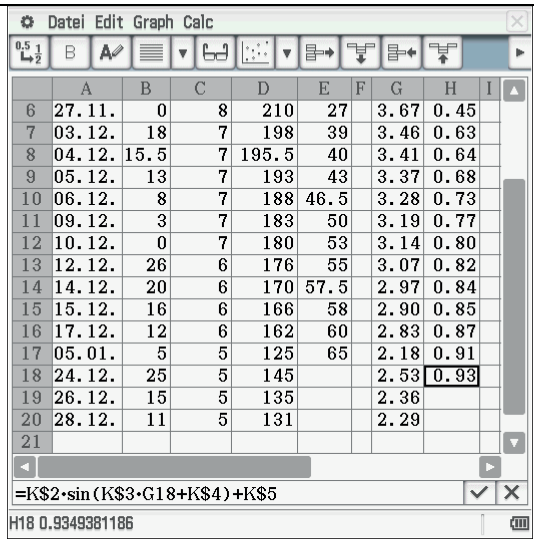
- übernehmen die Parameter der Sinusfunktion in das Tabellenblatt.



	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Länge	Breite		Bildpunkt			Sinus–Regr.			
2	Dezimal			x	y		a	3.60		
3							b	0.47		
4	220.5	12.5		3.85	0.22		c	0.38		
5	218	18		3.80	0.31		d	−2.7		
6	210	27		3.67	0.45		MSe	6E-4		
7	198	39		3.46	0.63					
8	195.5	40		3.41	0.64					

Ie

- ergänzen in der Tabelle die Ausgangsdaten, bei denen Längenangaben vorliegen, die Breitenangaben allerdings fehlen (24.12., 26.12., 28.12.);
- verwenden die Formeln aus **Ia** für die Berechnung der x-Werte der Bildpunkte;
- verwenden die ermittelte Sinusfunktion für die Berechnung der y-Werte der Bildpunkte.



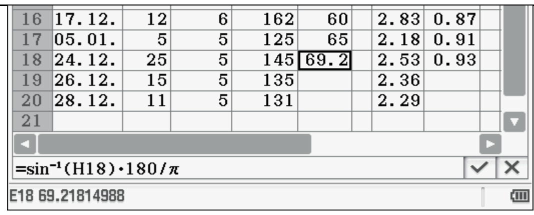
	A	B	C	D	E	F	G	H
6	27.11.	0	8	210	27		3.67	0.45
7	03.12.	18	7	198	39		3.46	0.63
8	04.12.	15.5	7	195.5	40		3.41	0.64
9	05.12.	13	7	193	43		3.37	0.68
10	06.12.	8	7	188	46.5		3.28	0.73
11	09.12.	3	7	183	50		3.19	0.77
12	10.12.	0	7	180	53		3.14	0.80
13	12.12.	26	6	176	55		3.07	0.82
14	14.12.	20	6	170	57.5		2.97	0.84
15	15.12.	16	6	166	58		2.90	0.85
16	17.12.	12	6	162	60		2.83	0.87
17	05.01.	5	5	125	65		2.18	0.91
18	24.12.	25	5	145			2.53	0.93
19	26.12.	15	5	135			2.36	
20	28.12.	11	5	131			2.29	
21								

=K\$2·sin(K\$3·G18+K\$4)+K\$5

H18 0.9349381186

Ie

- berechnen aus dem y-Wert der Archimedes-Projektion den zugehörigen x-Wert durch Umformen der Formel nach $E18$: $H18 = sin(E18\pi/180)$ (siehe Ia).



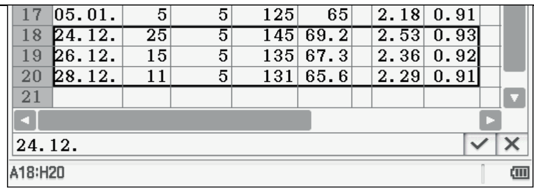
	A	B	C	D	E	F	G	H
16	17.12.	12	6	162	60		2.83	0.87
17	05.01.	5	5	125	65		2.18	0.91
18	24.12.	25	5	145	69.2		2.53	0.93
19	26.12.	15	5	135			2.36	
20	28.12.	11	5	131			2.29	
21								

=sin⁻¹(H18)·180/π

E18 69.21814988

Ie

- vervollständigen so die Datensätze mit bekannter Länge, aber unbekannter Breite.



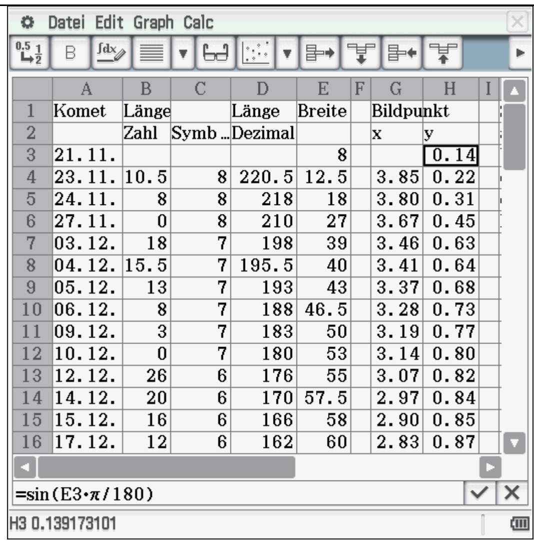
	A	B	C	D	E	F	G	H
17	05.01.	5	5	125	65		2.18	0.91
18	24.12.	25	5	145	69.2		2.53	0.93
19	26.12.	15	5	135	67.3		2.36	0.92
20	28.12.	11	5	131	65.6		2.29	0.91
21								

24.12.

A18:H20

Ie

- ergänzen in der Tabelle der Ausgangsdaten den Datensatz, bei dem die Breite bekannt ist, allerdings die Längenangabe fehlt (21.11.);
- berechnen aus dem Wert der Breite den y-Wert der Archimedes-Projektion.



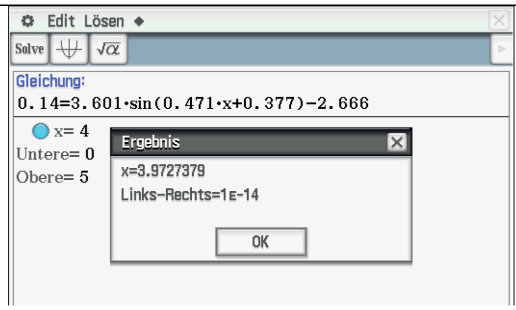
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Komet	Länge		Länge	Breite		Bildpunkt	
2		Zahl	Symb …	Dezimal			x	y
3	21.11.				8			0.14
4	23.11.	10.5	8	220.5	12.5		3.85	0.22
5	24.11.	8	8	218	18		3.80	0.31
6	27.11.	0	8	210	27		3.67	0.45
7	03.12.	18	7	198	39		3.46	0.63
8	04.12.	15.5	7	195.5	40		3.41	0.64
9	05.12.	13	7	193	43		3.37	0.68
10	06.12.	8	7	188	46.5		3.28	0.73
11	09.12.	3	7	183	50		3.19	0.77
12	10.12.	0	7	180	53		3.14	0.80
13	12.12.	26	6	176	55		3.07	0.82
14	14.12.	20	6	170	57.5		2.97	0.84
15	15.12.	16	6	166	58		2.90	0.85
16	17.12.	12	6	162	60		2.83	0.87

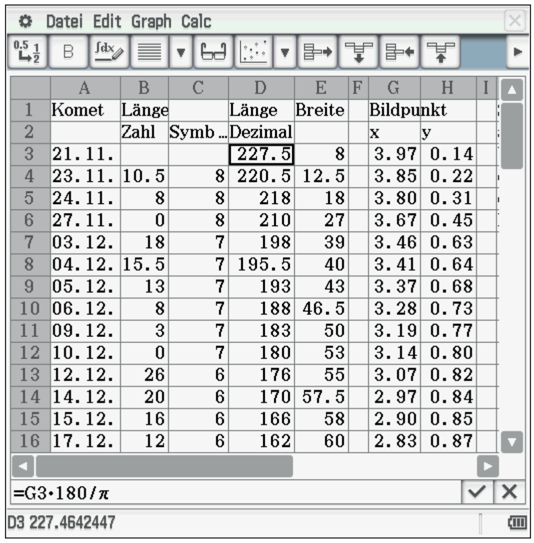
=sin(E3·π/180)

H3 0.139173101

Ie

- interpretieren diesen y-Wert als Funktionswert der Sinus-Regression;
- erkennen, dass hier zu einem Funktionswert einer Sinusfunktion das zugehörige Argument zu ermitteln ist;
- lösen das Problem in der Applikation zum numerischen Lösen von Gleichungen unter Verwendung eines geeigneten Anfangswertes, z. B. $x = 4$, im Vergleich zu den benachbarten x-Koordinaten;
- übernehmen das Ergebnis für den x-Wert in die Tabellenkalkulation;
- bestimmen aus dem x-Wert der Archimedes-Projektion die Längenangabe in Grad.

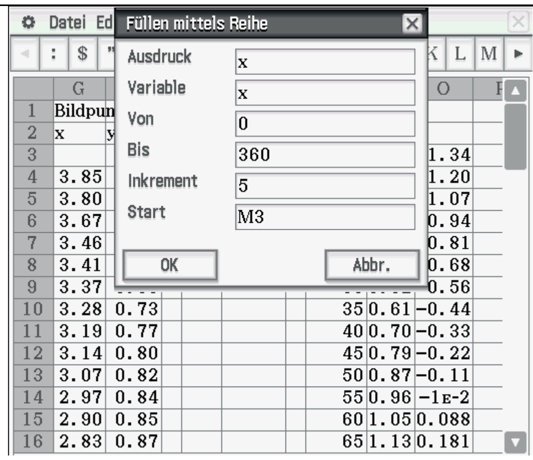




	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Komet	Länge		Länge	Breite		Bildpunkt	
2		Zahl	Symb…	Dezimal			x	y
3	21.11.			227.5	8		3.97	0.14
4	23.11.	10.5	8	220.5	12.5		3.85	0.22
5	24.11.	8	8	218	18		3.80	0.31
6	27.11.	0	8	210	27		3.67	0.45
7	03.12.	18	7	198	39		3.46	0.63
8	04.12.	15.5	7	195.5	40		3.41	0.64
9	05.12.	13	7	193	43		3.37	0.68
10	06.12.	8	7	188	46.5		3.28	0.73
11	09.12.	3	7	183	50		3.19	0.77
12	10.12.	0	7	180	53		3.14	0.80
13	12.12.	26	6	176	55		3.07	0.82
14	14.12.	20	6	170	57.5		2.97	0.84
15	15.12.	16	6	166	58		2.90	0.85
16	17.12.	12	6	162	60		2.83	0.87

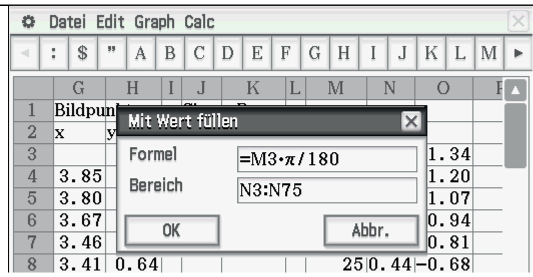
If

- erzeugen eine Wertetabelle für die Sinus-Funktion, um Näherungswerte für die Kometenbahn auch an nicht beobachteten Tagen zu erhalten und an beobachteten Tagen die Näherungswerte mit den beobachteten Werten vergleichen zu können;
- wählen für die Längenangaben in Grad den Bereich von 0 bis 360, der mittels einer Reihe gefüllt wird.



If

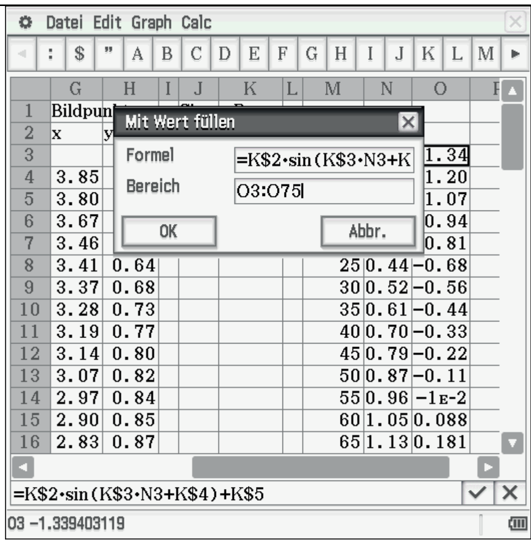
- bestimmen aus den Werten für die Länge die x-Werte der Archimedes-Projektion;
- bestimmen die y-Werte der Bildpunkte mit der Funktionsgleichung der Sinus-Regression;
- bestimmen aus den y-Werten der Sinus-Regression die zugehörige Breite in Grad;
- interpretieren und bewerten die Ergebnisse;
- lesen Näherungswerte für die Kometen-



bahn an nicht beobachteten Tagen ab durch eine geeignete Zuordnung zwischen Wertetabelle und Datum im Vergleich zu den Ausgangsdaten;

- erkennen, dass geringe Abweichungen zwischen den Ausgangsdaten und den Näherungswerten, die die Sinus-Regression bei Verwendung der Archimedes-Projektion liefert, bestehen.

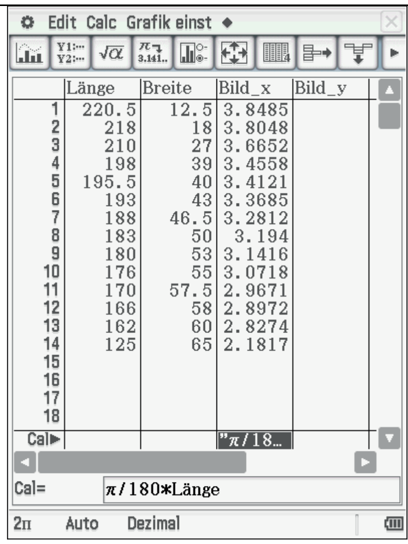
Hinweis: Die numerischen Abweichungen zwischen Ausgangsdaten und berechneten Näherungswerten können in der *Tabellenkalkulation* weiter untersucht werden, z. B. über die Summe der Abstandsquadrate oder durch den Maximum-Abstand, für diese Aufgabenstellung reicht es durchaus auf **Id** zu verweisen und die Güte der Näherung qualitativ zu bewerten.

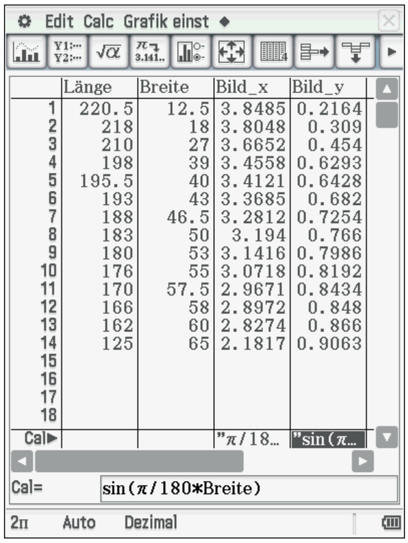


II: Verwendung des Statistik-Menüs

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsmöglichkeiten</th></tr>
<tr><td></td><td>Die Schülerinnen und Schüler …</td><td>Ausgewählte Screenshots</td></tr>
<tr><td>IIa</td><td>

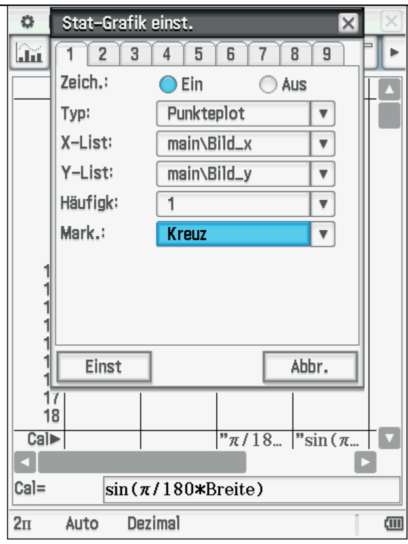
benennen die Spalten (Listenkopf);
tragen die vollständig vorhandenen Datensätze ein (Liste Länge und Liste Breite);
berechnen die x-Koordinaten der Archimedes-Projektion (Liste Bild_x) aus der Liste Länge durch die Eingabe des zugehörigen Terms in der Zeile Cal=;
berechnen die y-Koordinaten der Archimedes-Projektion (Liste Bild_y) aus der Liste Breite durch die Eingabe des zugehörigen Terms in der Zeile Cal=.

Hinweis: Anstelle der Liste Länge kann zunächst auch die Länge in zwei Listen (Zahl, Symbol) eingegeben werden und mit dem zugehörigen Term in der Zeile Cal= daraus die Liste Länge berechnet werden
</td><td>


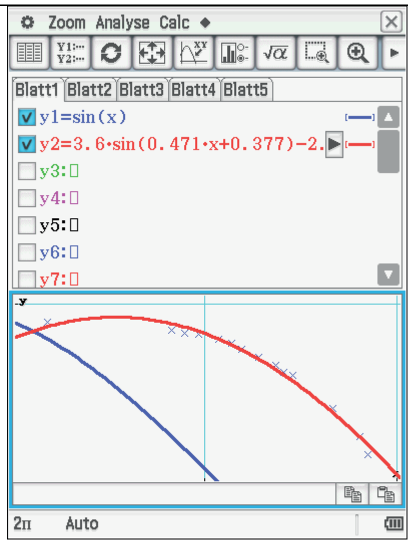


</td></tr>
<tr><td>IIb</td><td>

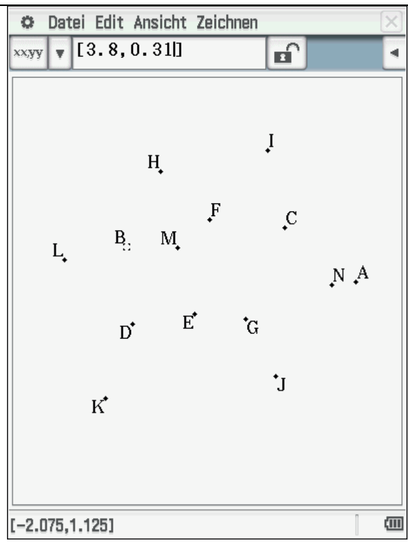
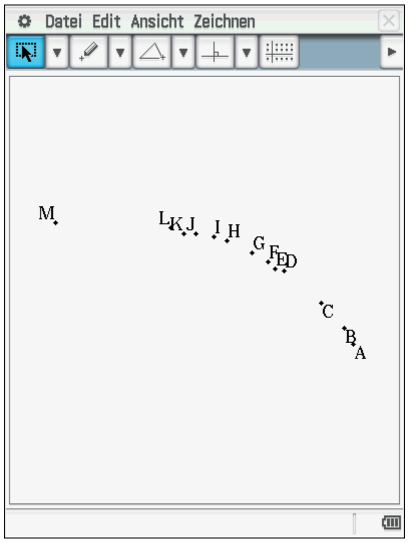
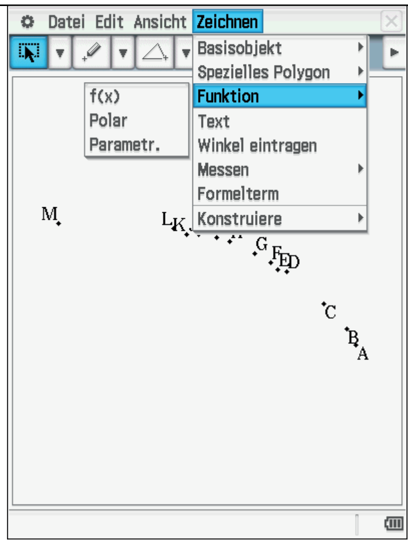
definieren eine Graphik für die grafische Darstellung der Koordinaten.

</td><td>


</td></tr>
</table>

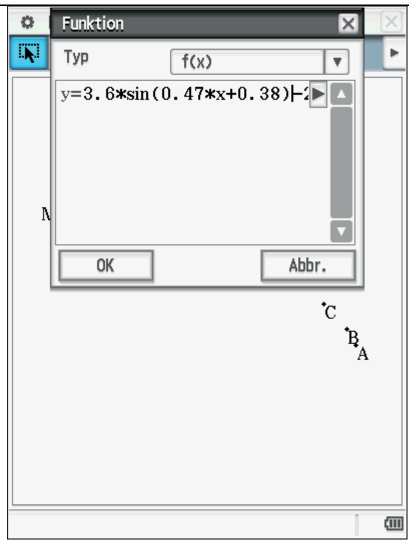
IIc **IId**	• können zusätzlich zur grafischen Darstellung der einzelnen Punkte im gleichen Graphikfenster selbst definierte Funktionen darstellen; • wählen den *Y-Editor* für die Eingabe verschiedener Funktionsterme; • variieren die Parameter der Funktionen; • vergleichen die Ergebnisse anhand der grafischen Darstellungen oder auch anhand der Wertetabellen; • erkennen Rechner-Grenzen und Fehler bei der grafischen Darstellung von Sinus-Funktionen; • diskutieren Ursachen; • entwickeln unterschiedliche Strategien; • nutzen die gefundene Näherungsfunktion, um weitere Informationen über die Kometenbahn zu ermitteln. Hinweis: Das *Statistik*-Menü bietet auch die Regression an, womit per Knopfdruck die gesuchte Funktion gefunden ist.	

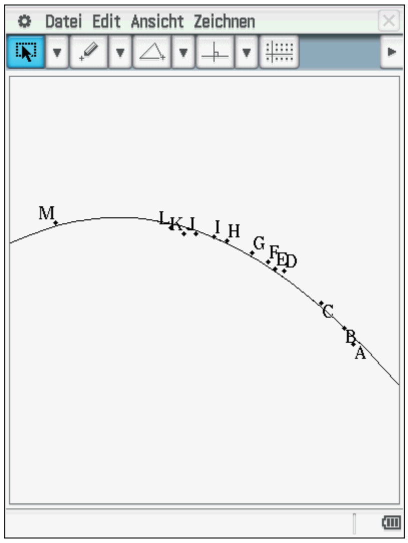
III: Verwendung des Geometrie-Menüs

	Anforderungen	**Lösungsmöglichkeiten**
	Die Schülerinnen und Schüler ...	**Ausgewählte Screenshots**
IIIa	• zeichnen so viele Punkte wie vollständige Datenpaare vorliegen ganz willkürlich auf das Zeichenblatt; • markieren jeden der willkürlich gesetzten Punkte einzeln nacheinander; • geben die Koordinaten der Archimedes-Projektion Punkt für Punkt ein und fixieren damit alle Punkte.	 
IIIb	• wählen im Menü Zeichnen die Möglichkeit zur Eingabe eines Funktionsterms.	

<table>
<tr>
<td>IIIb</td>
<td>

wählen verschiedene Funktionsterme;
versuchen einen Funktionsterm zu finden, der möglichst gut zu den Punkten passt;
diskutieren ihr Vorgehen.

</td>
<td>




</td>
</tr>
</table>