Optimale Verpackung

Sascha Reimers, Martin Scharschmidt

Kurzfassung des Inhalts:
In diesem Unterrichtsarrangement bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben zur Optimierung von Verpackungsmaterialien. Mathematisch handelt es sich um Extremwertaufgaben mit Nebenbedingung.

Klassenstufe(n):
Thematisch und zeitlich ist dieses Unterrichtarrangement der gymnasialen Oberstufe zuzuordnen.

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- modellieren optimale Verpackungen;
- erkunden Lösungsstrategien mithilfe des ClassPad;
- präsentieren ihre Arbeitsergebnisse mithilfe des ClassPad.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

- Differenzieren;
- Definieren;
- Gleichungen lösen;
- Umgang mit Tabellen und Funktionsgraphen.

Zeitbedarf:
3-4 Doppelstunden

Sonstige Materialien:
Verpackungen, OHP-Panel oder ClassPad-Manager mit Beamer

Begleittext

Überblick

Im nachfolgend beschriebenen Unterrichtsarrangement bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben zur Optimierung von Verpackungsmaterialien unter Nutzung des Computeralgebrasystems des ClassPad400.

Diese Unterrichtseinheit ist auf 3-4 Doppelstunden für die Oberstufe der allgemeinen und beruflichen Gymnasien ausgelegt.

Intention des Unterrichtsarrangements

Die Intention bei der Erstellung des Unterrichtsarrangements erfolgte im Sinne der Handlungsorientierung[8]. Die Schülerinnen und Schüler durchlaufen dabei die Phasen *Informieren, Planen, Entscheiden, Ausführen, Kontrollieren* sowie *Bewerten* und *Schlussfolgern*. Im besonderen Maße sollen die Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen[9] des mathematischen Kommunizierens und des mathematischen Modellierens durch den Einsatz des Casio ClassPad unterstützt werden. Gegenstand des Unterrichtsarrangements ist die Ermittlung optimaler Verpackungseinheiten. Der Einsatz von realen quaderförmigen und zylinderförmigen Verpackungen, wie sie im Handel erhältlich sind, ermöglicht einen guten Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler.

Ablauf des Unterrichtsarrangements

Im Sinne der **Binnendifferenzierung** ist das Unterrichtsarrangement „optimale Verpackung“ in zwei Szenarien aufgeteilt: Quaderförmige und zylinderförmige Verpackungen. Die quaderförmigen Verpackungen bieten oftmals einen geometrisch einfacheren Zugang zur Problemstellung. Die entsprechende differenzierte Einteilung der Schülerinnen und Schüler erfolgt demnach durch die Lehrkraft. Denkbar ist aber auch eine freiwillige Zuordnung der Schülerinnen und Schüler zu einem Szenario, das sie bearbeiten. Je nach Anzahl der Schülerinnen und Schüler in der Klasse beschäftigen sich auch mehrere Gruppen mit dem gleichen Szenario. Denkbar ist auch, dass alle Schülerinnen und Schüler zunächst die erste und anschließend die zweite Problemstellung bearbeiten.

Darüber hinaus ist ein drittes Szenario möglich: Hierzu bringen die Schülerinnen und Schüler eigene quaderförmige Verpackungen, wie beispielsweise Milchtüten, mit. Diese werden im Unterricht auseinander gefaltet. Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung davon, wie diese Verpackungen tatsächlich gefaltet werden (weitere Erläuterungen finden Sie hierzu im Anhang).

Zur Einführung in das vorliegende Unterrichtsarrangement kann die Problemstellung durch die Lehrkraft kurz erläutert werden. Sind keine optimierten Verpackungen beispielsweise von quaderförmigen 200 *ml* Verpackungen verfügbar und werden diese den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung gestellt, entfallen die Maßangaben des ersten Absatzes auf den Arbeitsblättern. Denkbar ist außerdem, dass bereits nach Aufgabe 1

[8] Vgl. Meyer et al. (1994): Didaktische Modelle, 3. Auflage, S.354ff, Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor
[9] Blum (2007): Bildungsstandards Mathematik: konkret, 3. Auflage, S. 40-43, Berlin: Cornelsen Scriptor

eine Kurzpräsentation ermöglicht wird, beispielsweise in Form eines „Marktplatzes". Hierzu werden die Ergebnisse im Klassenraum in Form von Plakaten ausgehängt und die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, sich die Ergebnisse ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler zu betrachten. Damit ein Austausch möglich ist, steht jeweils ein Mitglied der Gruppe für Fragen und Anregungen an dem Plakat zur Verfügung. Nach einer vorher bestimmten Zeit, erfolgt ein Wechsel, sodass ein anderes Gruppenmitglied am Plakat steht. Je nach Lerngruppe kann dieser Wechsel auch eigenverantwortlich erfolgen.

Um die Eigenverantwortung der Schülerinnen und Schüler zu fördern und diese aktiv in die Gestaltung des Unterrichtsarrangements einzubinden, bieten sich kooperative Lernformen[10] an. Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler, nach der Einführung durch die Lehrkraft sowie der Einteilung in Gruppen den Auftrag, sich zunächst selbstständig mit der Problemstellung auseinander zu setzen. Notwendig ist, dass die Schülerinnen und Schüler in dieser Phase ihre Überlegungen, Vermutungen und Lösungsansätze auch aufschreiben, um anschließend mit ihrer Gruppe darüber diskutieren zu können. Denkbar ist auch, dass nach dieser ersten Denkphase Zeit gegeben wird, um grundsätzliche Fragen im Klassenverband zu klären. Während der anschließenden Gruppenarbeit können weitere kooperative Methoden wie beispielsweise Talking Chips[11] zum Einsatz kommen, um die Schülerinnen und Schüler aktiv einzubinden.

Die Zwischenpräsentation gibt den Schülerinnen und Schülern Sicherheit, indem sie den Austausch im Plenum und einen Vergleich mit den übrigen Gruppen ermöglicht. Bei der abschließenden Präsentation erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, ihre fertigen Ergebnisse zu präsentieren. Zum einen besteht hier die Möglichkeit den Modellierungskreislauf auch den Schülerinnen und Schülern explizit zu erläutern. Zum anderen bietet es sich an, den Blick auf konkrete Verpackungen zu richten und zu diskutieren, warum reale Verpackungen nicht optimal, in dem in der Unterrichtssequenz erarbeiteten Sinne, gestaltet werden. Hier können Rahmenbedingungen, die durch die eingepackte Ware bedingt sind, besprochen, aber auch Aspekte des Marketings einbezogen werden.

Förderung der prozessbezogenen Kompetenzen

Zur Entwicklung der prozessbezogenen Kompetenz des **mathematischen Modellierens** erhalten die Schülerinnen und Schüler entsprechende Aufgabenstellungen, die es ermöglichen den Modellierungskreislauf[12] zu durchlaufen. In Abhängigkeit von den Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler ist es denkbar, diese Aufgabenstellung kleinschrittiger zu gestalten, um den Schülerinnen und Schülern eine Orientierung zu geben. Andererseits kann die Aufgabenstellung auch offener gestaltet werden, indem

[10] Brüning / Saum (2009): Erfolgreich unterrichten durch kooperatives Lernen 1, 5. Auflage, Essen: NDS
[11] Vgl. Green / Grenn (2010): Kooperatives Lernen im Klassenraum und im Kollegium, 5. Auflage, S. 134, Seelze: Klett/Kallmeyer. Auch Redechips: Die Schülerinnen und Schüler bekommen zwei Chips. Diese Chips werden in die Mitte gelegt, wenn jemand sprechen möchte. Die Gruppenmitglieder können nicht erneut sprechen, bevor nicht jeder seinen Chip in die Mitte des Tisches gelegt hat. Wenn alle Chips aufgebraucht sind, werden sie zurückgenommen und jeder hat wieder die Möglichkeit, das Wort zu ergreifen.
[12] Maaß (2008): Mathematisches Modellieren, 2. Auflage, S. 13, Berlin: Cornelsen Scriptor

lediglich nach den optimalen Maßen gefragt wird. Im Sinne der Binnendifferenzierung kann diese Modifizierung auch genutzt werden, um unterschiedliche Voraussetzungen innerhalb der Klasse zu berücksichtigen.

Notwendig bei der Gestaltung der Aufgabenstellung ist es, dass Kriterien[13] für eine „gute“ Aufgabe berücksichtigt werden, sodass diese

- auf unterschiedlichen Anspruchsniveaus herausfordernd ist;
- inhalts- und prozessbezogene sowie übergreifende Kompetenzen fordert und fördert;
- an Vorwissen anknüpft und das zu erwerbende Wissen kumulativ aufbaut;
- in sinnstiftende Kontexte eingebunden ist;
- in den Lösungsstrategien und Darstellungsformen vielfältig ist;
- individuelle Lösungen ermöglicht;
- das Bewusstsein für die eigenen Fähigkeiten durch erfolgreiches Bearbeiten und Lösen stärkt.

Die Entwicklung des **mathematischen Kommunizierens** wird durch die Arbeit in Gruppen angeregt. Hier tauschen die Schülerinnen und Schüler Ideen, Vorschläge und alternative Lösungswege aus, diskutieren verschiedene Lösungen und gestalten ihre Präsentationen. Darüber hinaus wird das Kommunizieren durch die Präsentation sowie durch den Austausch über die Ergebnisse gefördert.

Bedeutung des CAS-Einsatzes

Der **Einsatz des CAS** unterstützt dabei den Modellierungsprozess. Hierzu nutzen die Schülerinnen und Schüler das CAS als Werkzeug im Übergang vom mathematischen Modell zur mathematischen Lösung und bearbeiten die dann notwendigen innermathematischen Fragestellungen. Somit können sich die Schülerinnen und Schüler auf den Modellierungskreislauf, auf die Erstellung von mathematischen Ansätzen und das Interpretieren der Lösungen konzentrieren, ohne dass der Blick auf diesen Kreislauf durch Berechnungen überlagert wird. Mathematische Ansätze zur Bearbeitung der Problemstellung können somit schnell eingegeben und Auswirkungen auf die daraus resultierende Lösung sofort erkannt werden. Damit wird den Schülerinnen und Schülern auch die Angst genommen, Fehler zu machen. Diese Fehler können sonst einerseits zu langen, teilweise auch unberechenbaren mathematischen Problemen führen, andererseits aber auch einen hohen Zeitbedarf erfordern. Beide Aspekte stehen dem Ziel der Stunde, insbesondere der Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenz des Modellierens, entgegen.

Außerdem dient der Casio ClassPad als Präsentationsmedium. Werden die Lösungsvorschläge als eActivity erstellt, dann können sie beispielsweise auf einen Laptop mit Beamer übertragen werden. Diese Art der Präsentation zwingt die Schülerinnen und Schüler zu einer mathematisch klaren Schreibweise, da das CAS diese ansonsten nicht durchführen könnte. Exemplarisch sei erwähnt, dass beispielsweise vergessene Rechenzei-

[13] Hermes et al. (2012): Entwicklung kompetenzorientierter Aufgaben, S.10, Berlin: Cornelsen

chen und Gleichheitszeichen sowie eine nicht dokumentierte Umbenennung von Variablen sofort zu Fehlermeldungen führen. Darüber hinaus gibt das CAS noch eine klare Struktur vor, die nicht von Berechnungen überlagert wird, sondern vielmehr die Lösungsstrategie unterstreicht. Somit steht beispielsweise nicht mehr das Lösen von Gleichungen per Formel im Vordergrund, sondern die aktuellen mathematischen Inhalte, wie die nach der Haupt- und der Nebenbedingung.

Schülermaterialien

Klasse:	Situationsbeschreibung	Datum:
Mathematik	Optimale Verpackungen	

Neben bekannten Markenprodukten bieten große Supermarktketten eigene preisgünstigere Handelsmarken an. Die NoPack GmbH stellt Verpackungen für Lebensmittel von Herstellern solcher Handelsmarken her. Hierbei kommt es neben funktionalen Kriterien (hohe Haltbarkeit, Packmaße, Stabilität usw.) insbesondere auf eine kostengünstige Verwendung von Verpackungsmaterial an. Die Thoma AG beauftragt die NoPack GmbH mit der Fertigung ausgewählter Verpackungen.

Beispiel quaderförmige Verpackung:
Die Thoma AG beauftragt die NoPack GmbH mit der Fertigung quaderförmiger Verpackungen, in die das Produkt „KakaoDrink“ gefüllt werden soll. Die Thoma AG möchte ihr Produkt „Kakao“ in unterschiedlich großen quaderförmigen Verpackungen anbieten (Single-Haushalt, Familie, Vorratspack).

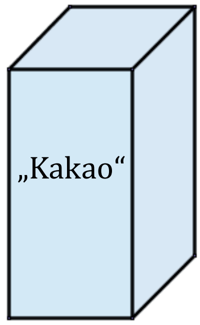
Sie erhalten von Ihrem Vorgesetzten als Mitarbeiter der NoPack GmbH zur Optimierung der Kostensituation den Auftrag, eine Verpackung zu entwickeln, die einen möglichst geringen Materialbedarf benötigt. Die Thoma AG möchte aus Gründen des Marketings eine quaderförmige Verpackung beibehalten, da sich für Getränke diese Form von Verpackungen beim Konsumenten durchgesetzt hat. Die Ergebnisse Ihrer Untersuchung sollen dem Vorgesetzten mathematisch plausibel und nachvollziehbar erläutert werden. Fertigen Sie dazu zum einen zur Visualisierung ein Plakat mit den Maßen und Bezeichnungen Ihrer quaderförmigen Verpackung an und zum anderen eine eActivity zur Veranschaulichung Ihrer mathematischen Lösung.

Beispiel zylinderförmige Verpackung:
Die Thoma AG beauftragt die NoPack GmbH mit der Fertigung zylinderförmiger Dosen, in die das Produkt „Stückige Tomaten“ gefüllt werden soll. Die Thoma AG möchte die „Stückigen Tomaten“ in unterschiedlich großen Dosen anbieten, um die verschiedenen Zielgruppen ansprechen zu können (Single-Haushalt, Familie, Vorratspack).

Sie erhalten von Ihrem Vorgesetzten als Mitarbeiter der NoPack GmbH zur Optimierung der Kostensituation den Auftrag eine Verpackung zu entwickeln, die einen möglichst geringen Materialbedarf benötigt. Die Thoma AG möchte aus Gründen des Marketings eine zylinderförmige Verpackung beibehalten, da sich für Tomatenstücke diese Form von Verpackungen beim Konsumenten durchgesetzt hat. Die Ergebnisse Ihrer Untersuchung sollen dem Vorgesetzten mathematisch plausibel und nachvollziehbar erläutert werden. Fertigen Sie dazu zum einen zur Visualisierung ein Plakat mit den Maßen und Bezeichnungen Ihrer Dosen an und zum anderen eine eActivity zur Veranschaulichung Ihrer mathematischen Lösung.

Klasse:	Arbeitsblatt	Datum:
Mathematik	Quaderförmige Verpackung 1/2	

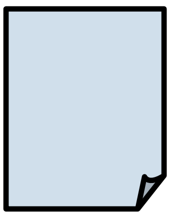
Als Mitarbeiter verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die zu optimierende Verpackung. Die Abmessungen werden mit Höhe 11,7 cm, Breite 4,3 cm und Tiefe 4 cm aufgenommen. Auf der Verpackung wird ein Inhalt von 0,2 $Litern$ angegeben.



1. Überprüfen Sie zunächst die Angabe des Volumens und berechnen Sie den Flächeninhalt des benötigten Materials der Getränkeverpackung. Diskutieren Sie anschließend mögliche Auswirkungen einer Veränderung einer Seitenlänge auf die Fläche, wenn das Volumen konstant bleiben soll. Notieren Sie Ihre Diskussionsergebnisse stichpunktartig auf einem Plakat.

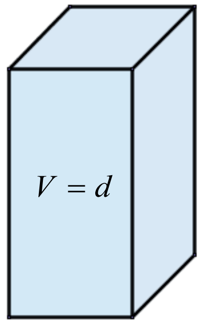
2. Ermitteln Sie anschließend die Maße mehrerer quaderförmiger Verpackungen für $200\, ccm = 0{,}2\, Liter$ Inhalt. Die Tiefe der Verpackung soll $4\, cm$ betragen. Zeichnen Sie einen Graphen in ein Koordinatensystem, der Ihre Ergebnisse darstellt. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch diejenigen Maße der optimierten Verpackung mit minimalem Materialbedarf.

3. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität. Vergleichen Sie dann die Maße der optimalen Verpackung mit denen Ihrer Verpackung und berechnen Sie den eingesparten Materialbedarf in Prozent.



(Zwischen-)Präsentation der Ergebnisse

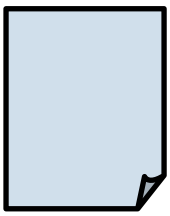
Fortsetzung der Arbeit



4. Ermitteln Sie für die abschließende Bearbeitung des Kundenauftrages den Materialbedarf der beiden übrigen Verpackungen:
   Single-Haushalt: 1000 $Kubikzentimeter$ (Tiefe 6 cm),
   Vorratspack: 2000 $Kubikzentimeter$ (Tiefe 8 cm).
   Vergleichen Sie die drei optimalen Verpackungen.

5. Leiten Sie nun eine allgemeine Formel her, die der Berechnung der Maße einer optimalen quaderförmigen Verpackung sowie der Berechnung des minimalen Materialbedarfs dient (d beschreibt das Volumen des Quaders). Berücksichtigen Sie dabei die unter Aufgabe 4 ermittelten geometrischen „Erkenntnisse“.

6. Berechnen Sie die Maße Ihrer Verpackung für eine quaderförmige Verpackung mit einem Inhalt von 200 ml mithilfe Ihrer in Aufgabe 5 ermittelten Formel. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 2.



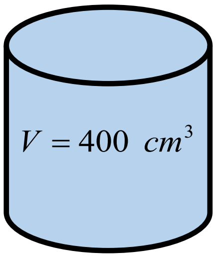
(Abschließende) Präsentation der Ergebnisse

Klasse:	Arbeitsblatt	Datum:
Mathematik	Zylinderförmige Verpackung 2/2	

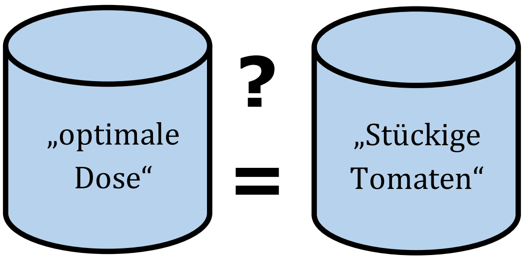
Als Mitarbeiter verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick über die zu optimierende Verpackung anhand der vorliegenden Konservendosen. Die Abmessungen werden mit Höhe 10,3 cm und Radius 3,5 cm aufgenommen. Auf der Dose wird ein Inhalt von 0,4 $Litern$ angegeben.

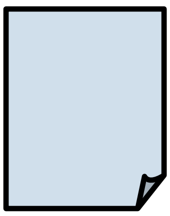
1. Bestimmen Sie die Materialgröße Ihrer Dose. Diskutieren Sie anschließend mögliche Auswirkungen einer Veränderung des Radius oder der Höhe der Dose auf die Fläche, wenn das Volumen konstant bleiben soll. Notieren Sie Ihre Diskussionsergebnisse stichpunktartig auf einem Plakat.

2. Ermitteln Sie anschließend mithilfe der Differentialrechnung die Maße einer zylindrischen Dose zur Optimierung der Verpackung von 400 cm^3 Inhalt sowie den minimalen Materialbedarf.



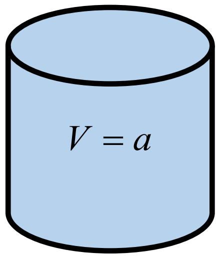
3. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis auf Plausibilität. Vergleichen Sie dann die Maße der optimalen Dose mit denen Ihrer Dose und berechnen Sie den eingesparten Materialbedarf in Prozent.





(Zwischen-)Präsentation der Ergebnisse

Fortsetzung der Arbeit



4. Leiten Sie dazu eine allgemeine Formel her, die der Berechnung der Maße einer optimalen Dose sowie der Berechnung des minimalen Materialbedarfs dienen (a beschreibt das Volumen der Dose).

   Ermitteln Sie für die abschließende Bearbeitung des Kundenauftrages den Materialbedarf für folgende weitere Verpackungen: Single-Haushalt: 500 $Kubikzentimeter$, Vorratspack: 1750 $Kubikzentimeter$.

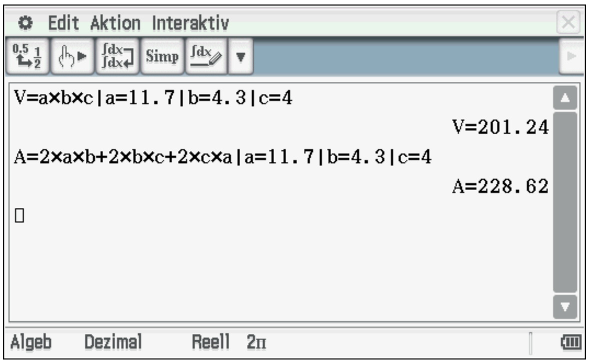
5. Ermitteln Sie die Maße Ihrer Dose aus Aufgabe 2 mithilfe Ihrer in Aufgabe 4 ermittelten Formel. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 2.

(Abschließende) Präsentation der Ergebnisse

Modelllösungen: quaderförmige Verpackung

Die Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler sind vor den jeweiligen Aufgaben aufgeführt.

1) Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Volumen und Fläche, diskutieren über Veränderungen und notieren Ergebnisse.

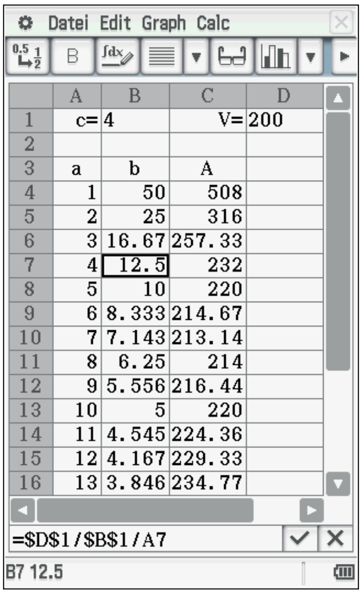


Hinweis: Der senkrechte Strich ermöglicht die Zuweisung des Wertes für diese eine Rechnung. Der Wert beispielsweise für $a = 11{,}7$ wird nicht im Speicher des CP400 abgelegt.

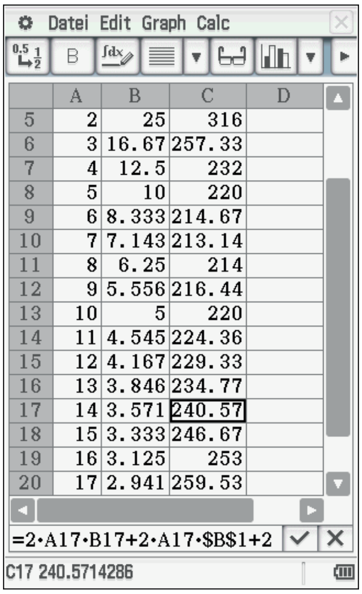
Mögliche Diskussionsergebnisse:

- Fläche bleibt dann auch gleich;
- Ist nicht möglich, da sich bei größerer Fläche auch das Volumen vergrößert;
- Beim geschickten Auswählen der Maße kann das Volumen konstant bleiben und die eingesetzte Materialmenge minimal sein.

2) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln Maße von möglichen Verpackungen, zeichnen den Graphen, bestimmen die Maße einer optimalen Verpackung.

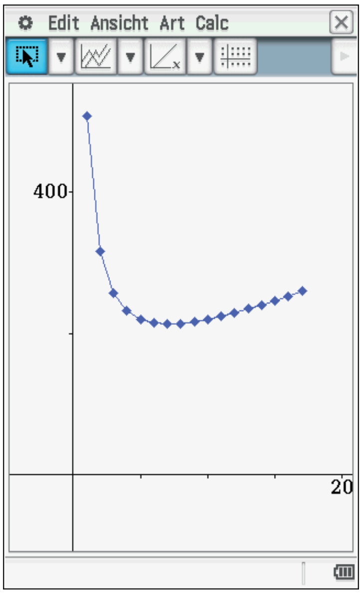


	A	B	C	D
1	c=	4	V=	200
2				
3	a	b	A	
4	1	50	508	
5	2	25	316	
6	3	16.67	257.33	
7	4	12.5	232	
8	5	10	220	
9	6	8.333	214.67	
10	7	7.143	213.14	
11	8	6.25	214	
12	9	5.556	216.44	
13	10	5	220	
14	11	4.545	224.36	
15	12	4.167	229.33	
16	13	3.846	234.77	

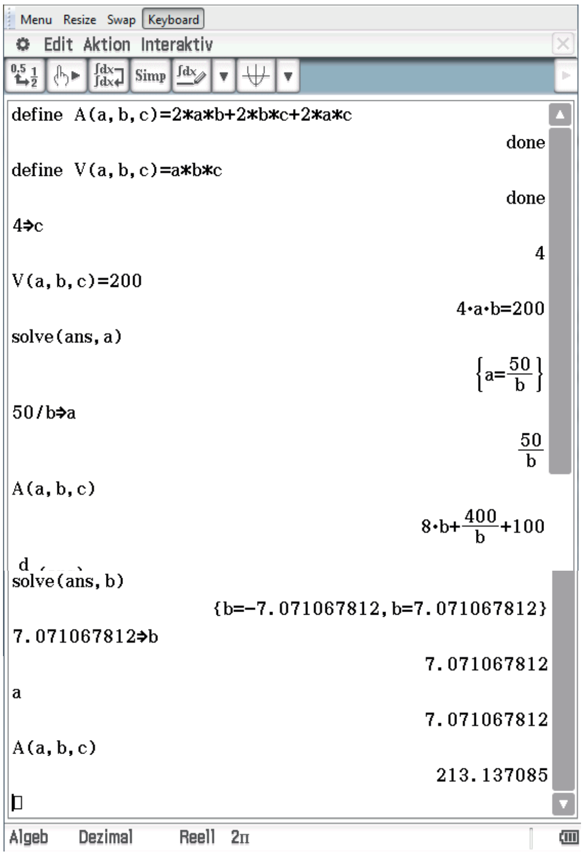


	A	B	C	D
5	2	25	316	
6	3	16.67	257.33	
7	4	12.5	232	
8	5	10	220	
9	6	8.333	214.67	
10	7	7.143	213.14	
11	8	6.25	214	
12	9	5.556	216.44	
13	10	5	220	
14	11	4.545	224.36	
15	12	4.167	229.33	
16	13	3.846	234.77	
17	14	3.571	240.57	
18	15	3.333	246.67	
19	16	3.125	253	
20	17	2.941	259.53	

Hinweis: Im *Tabellenkalkulationsmenü* können die ermittelten Werte eingetragen werden. Durch Markierung der Felder C4 bis C20 kann der zugehörige Graph gezeichnet werden. Sowohl mit der Wertetabelle als auch mit dem Graphen kann näherungsweise die optimale Fläche bestimmt werden.

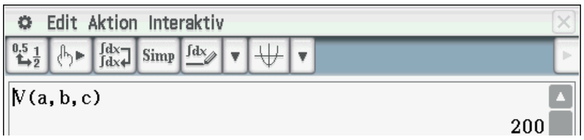


Rechnerisch ist die nachfolgende Lösung möglich.

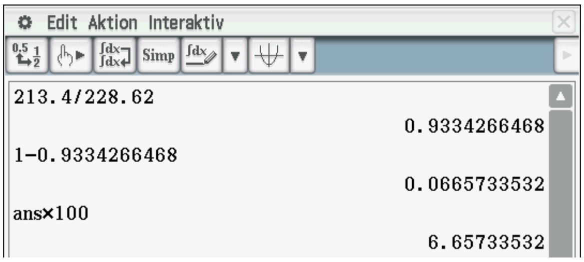


Hinweis: Mit dem Ausdruck *4⇒c* wird dem *c* dauerhaft im Speicher des CP400 der Wert 4 zugeordnet.

3) Die Schülerinnen und Schüler überprüfen und vergleichen die Ergebnisse.

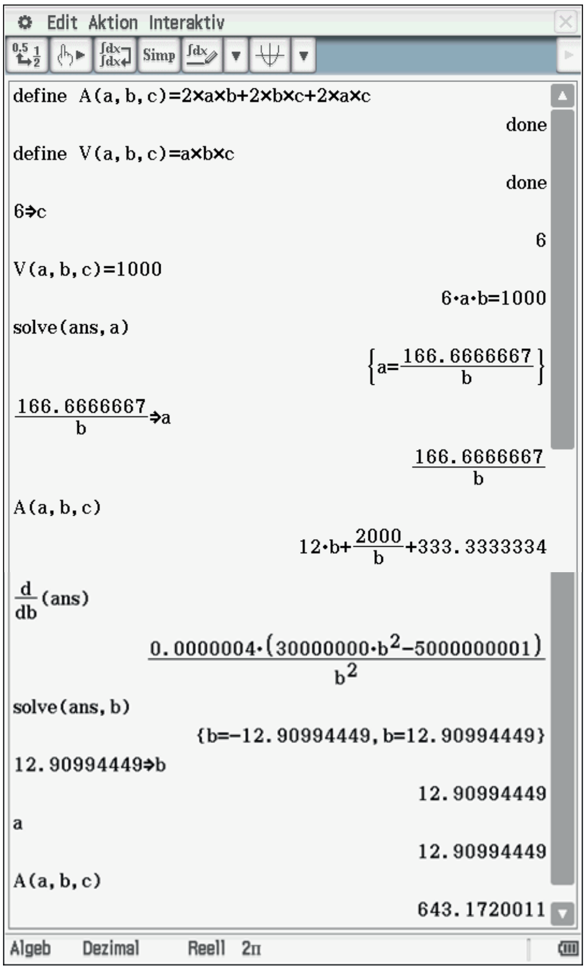


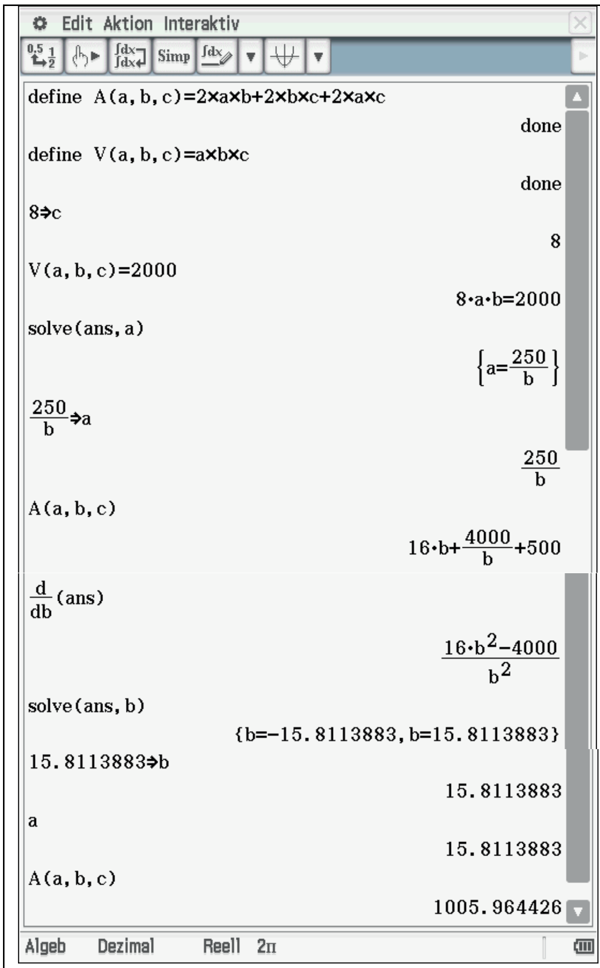
Die Verpackung hat eine quadratische „Frontfläche" bzw. „Rückseite" bei einer Tiefe von 4 *cm*. Die 200 *ccm* werden eingehalten.



Die optimale Schachtel spart bei gleichem Volumen 6,77 % Material ein.

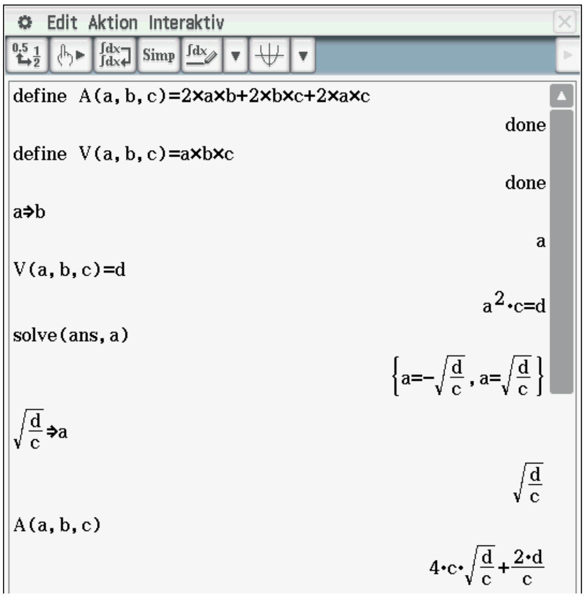
4) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln weitere optimale Verpackungen und leiten eine Formel her.





Der Vergleich der drei ermittelten optimalen Verpackungen zeigt, dass die Verpackung immer dann hinsichtlich des minimalen Verpackungsmaterials optimal ist, wenn eine Fläche des Quaders quadratisch ist.

5) Die Schülerinnen und Schüler leiten eine allgemeine Formel her.



$\frac{d}{dc}(ans)$

$$\frac{2\cdot c\cdot d-2\cdot d\cdot\sqrt{\frac{d}{c}}}{c^{2}\cdot\sqrt{\frac{d}{c}}}$$

solve(ans, c)

$$\left\{c=d^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$d^{\frac{1}{3}}\Rightarrow c$

$$d^{\frac{1}{3}}$$

a

$$(|d|)^{\frac{1}{3}}$$

A(a, b, c)

$$2\cdot(|d|)^{\frac{2}{3}}+4\cdot(d\cdot|d|)^{\frac{1}{3}}$$

define Flaeche(d)=$2\cdot(|d|)^{\frac{2}{3}}+4\cdot(d\cdot|d|)^{\frac{1}{3}}$

done

define Tiefe(d)=$(|d|)^{\frac{1}{3}}$

done

define Breite(d)=$(|d|)^{\frac{1}{3}}$

done

Algeb Standard Reell 2π

6) Die Schülerinnen und Schüler berechnen die Maße der optimalen Verpackung, vergleichen die Ergebnisse.

Flaeche(200)

205.1971136

Tiefe(200)

5.848035476

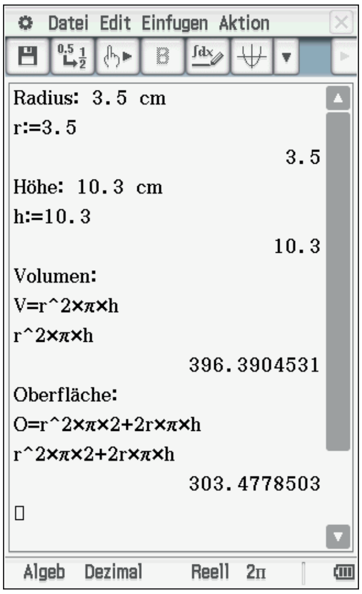
Breite(200)

5.848035476

Ausgehend von einem Volumen von 200 ml liegt bei einem Würfel (alle Seiten gleich lang) die optimale Verpackung vor. Jedoch unter der Bedingung: $Tiefe = 4\ cm$, sind die ermittelten Werte in der Lösung von Aufgabe 2 optimal.

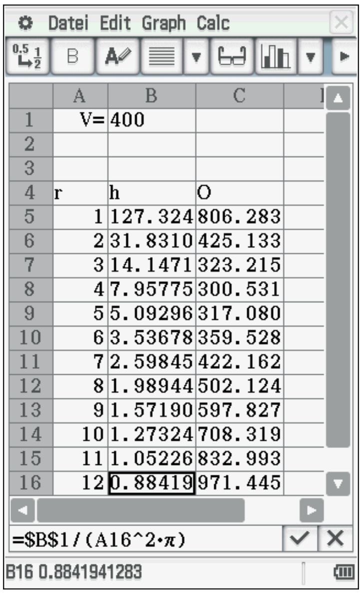
Modelllösungen: zylinderförmige Verpackung

1) Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Volumen und Fläche, diskutieren über Veränderungen und notieren Ergebnisse. (Die Ergebnisse können je nach vorliegender Dose voneinander abweichen.)

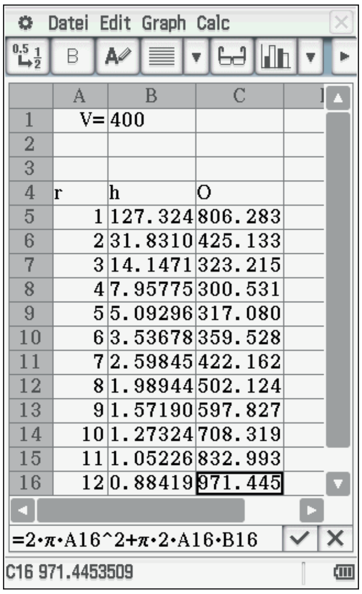


Hinweis: Im eActivity-Menü können Textzeilen ( ) und Berechungszeilen ( )eingefügt werden.

Mögliche Diskussionsgrundlagen können auch von Schülern erstellte Tabellen oder Funktionsgraphen sein:

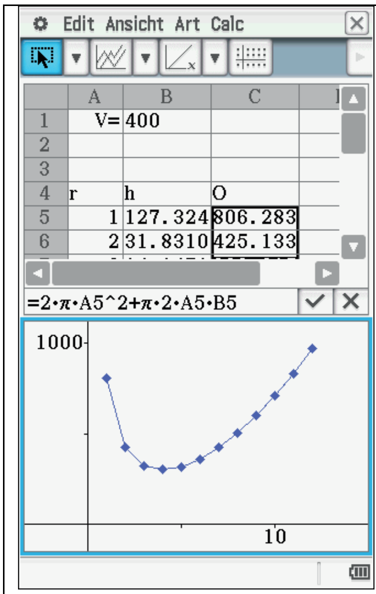


	A	B	C
1	V=	400	
2			
3			
4	r	h	O
5	1	127.324	806.283
6	2	31.8310	425.133
7	3	14.1471	323.215
8	4	7.95775	300.531
9	5	5.09296	317.080
10	6	3.53678	359.528
11	7	2.59845	422.162
12	8	1.98944	502.124
13	9	1.57190	597.827
14	10	1.27324	708.319
15	11	1.05226	832.993
16	12	0.88419	971.445



	A	B	C
1	V=	400	
2			
3			
4	r	h	O
5	1	127.324	806.283
6	2	31.8310	425.133
7	3	14.1471	323.215
8	4	7.95775	300.531
9	5	5.09296	317.080
10	6	3.53678	359.528
11	7	2.59845	422.162
12	8	1.98944	502.124
13	9	1.57190	597.827
14	10	1.27324	708.319
15	11	1.05226	832.993
16	12	0.88419	971.445

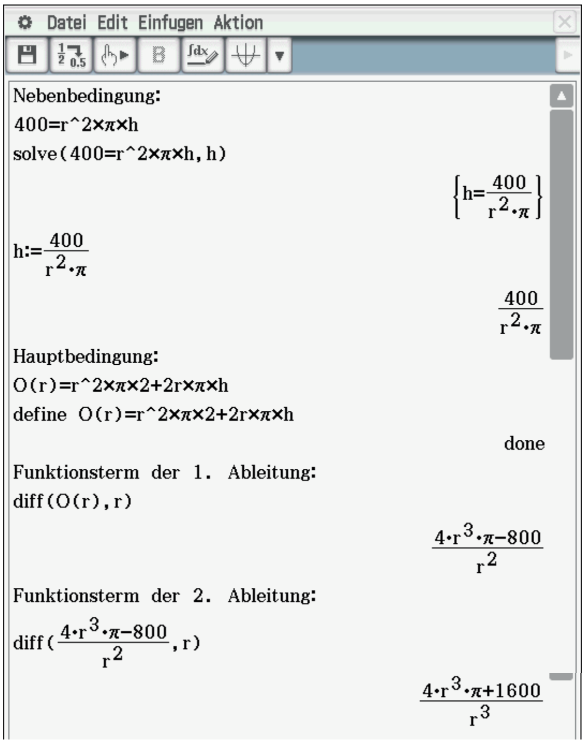
Hinweis: Im Tabellenkalkulationsmenü können die ermittelten Werte eingetragen werden. Durch Markierung der Felder D5 bis D16 kann der dazugehörige Graph gezeichnet werden.

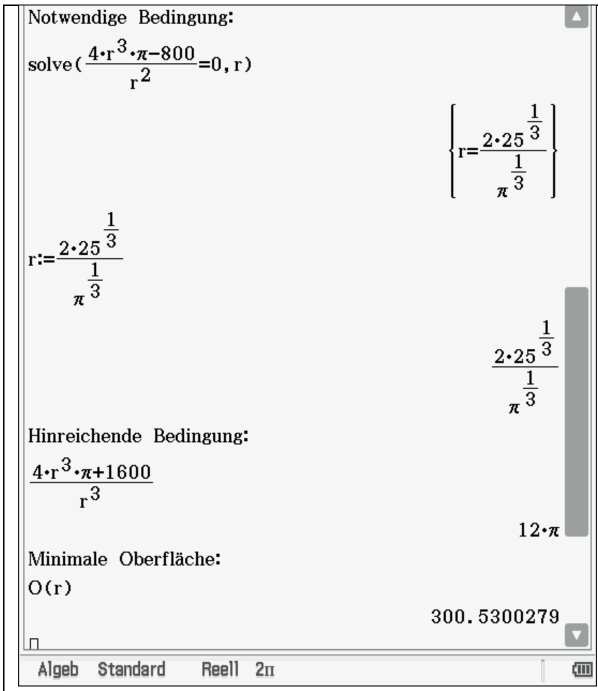


Mögliche Diskussionsergebnisse:

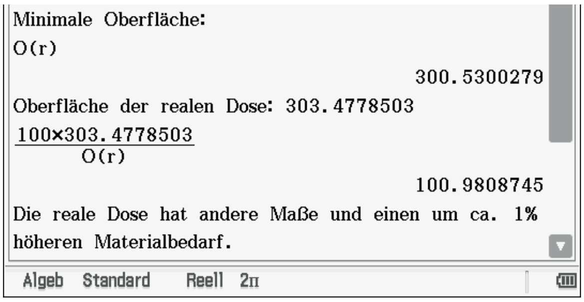
- Fläche bleibt dann auch gleich;
- Ist nicht möglich, da sich bei größerer Fläche auch das Volumen vergrößert;
- Beim geschickten Auswählen der Maße kann das Volumen konstant bleiben und die eingesetzte Materialmenge minimal sein.

2) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Maße der optimalen Dose.

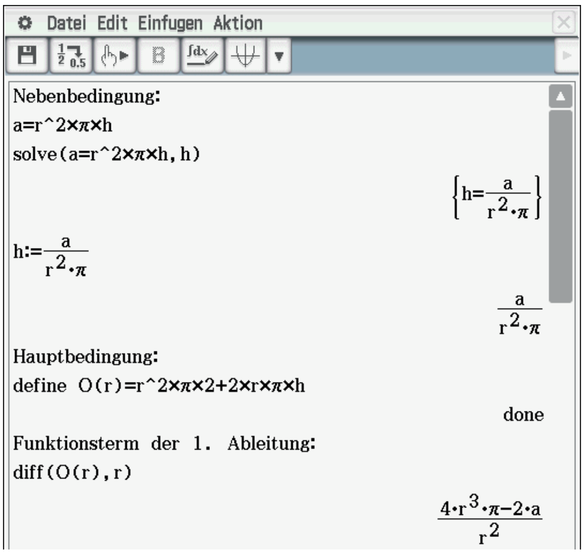




3) Die Schülerinnen und Schüler überprüfen und vergleichen die Ergebnisse.



4) Die Schülerinnen und Schüler ermitteln weitere optimale Verpackungen und leiten eine Formel her.



Funktionsterm der 2. Ableitung:

$\text{diff}\left(\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-2\cdot a}{r^2}, r\right)$

$$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi+4\cdot a}{r^3}$$

Notwendige Bedingung:

$\text{solve}\left(\frac{4\cdot r^3\cdot\pi-2\cdot a}{r^2}=0, r\right)$

$$\left\{r=\frac{\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right\}$$

$r:=\frac{\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$$

Hinreichende Bedingung:

$\frac{4\cdot r^3\cdot\pi+4\cdot a}{r^3}$

$$12\cdot\pi$$

Minimale Oberfläche:

O(r)

$$\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot a}{\left(\frac{2\cdot a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{2\cdot\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\pi}{4^{\frac{1}{3}}}$$

a:=500

500

O(r)

348.7342055

a:=1750

1750

O(r)

803.9084186

Algeb Standard Reell 2π

5) Die Schülerinnen und Schüler vergleichen die Ergebnisse.

Minimale Oberfläche:

O(r)

$$\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot a}{\left(\frac{2\cdot a}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{2\cdot\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\pi}{4^{\frac{1}{3}}}$$

a:=400

400

O(r)

300.5300279

r

3.992945425

h

7.985890849

Algeb Standard Reell 2π

Die mithilfe dieser allgemeinen Formel bestimmte minimale Oberfläche ist mit der in Aufgabe 2 berechneten minimalen Oberfläche identisch. Die 400 der Formel wurde durch a substituiert.

Modifizierung eines Szenarios

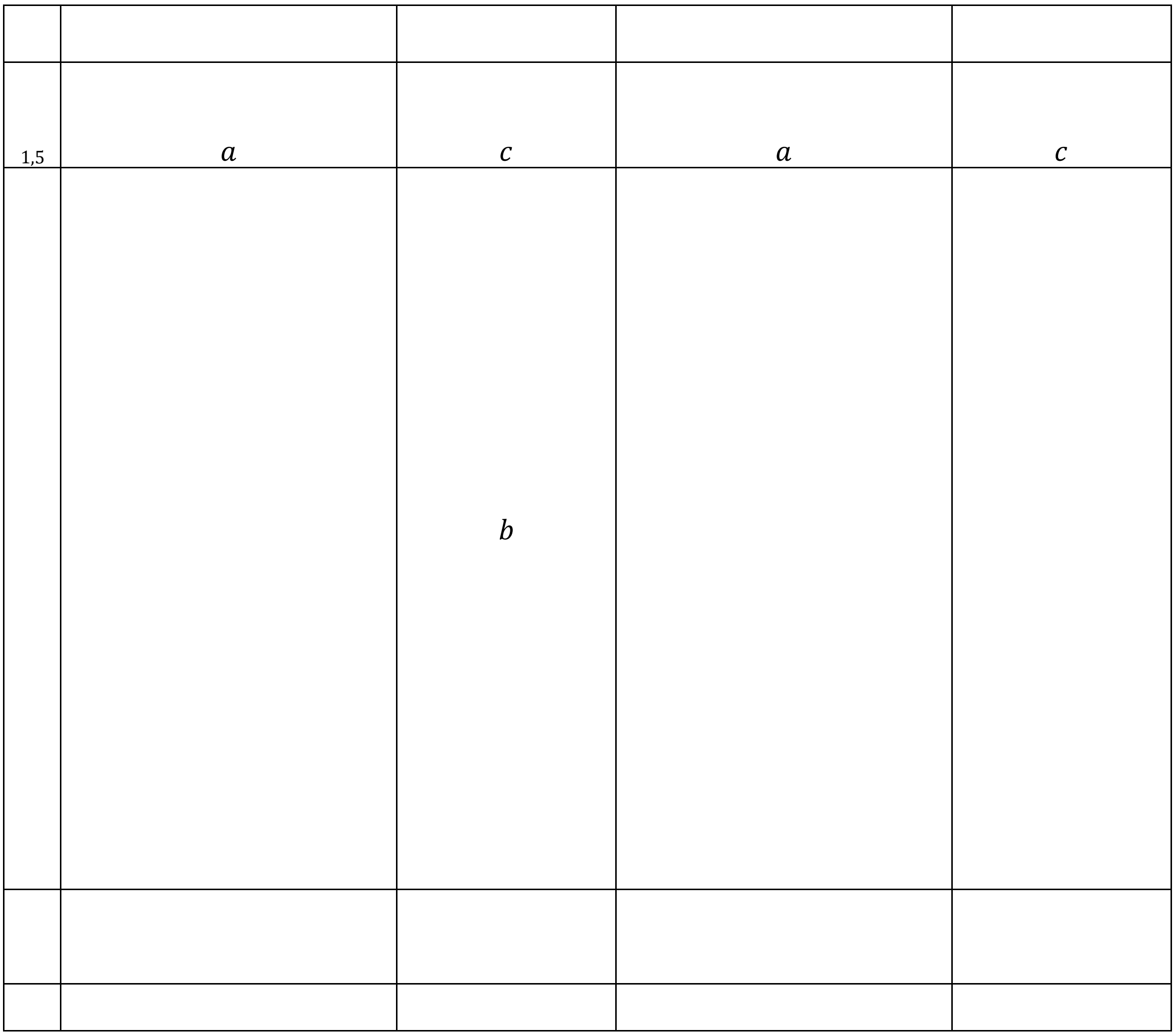
Beschreibung

Entsprechend der Leistungsfähigkeit sowie der Intention des Unterrichtsarrangements kann z. B. das erste Szenario modifiziert werden, indem die Schülerinnen und Schüler eigene quaderförmige Verpackungen beispielsweise von Milchtüten mitbringen. Diese werden im Unterricht zerlegt. Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler einen konkreten Überblick darüber, wie diese Verpackungen tatsächlich gefaltet werden. Es wird deutlich, dass quaderförmige Verpackungen aus einem rechteckigen Materialstück gefaltet und entsprechend verklebt werden, das eine Größe von etwa 30,9 $cm\ x$ 27,1 cm hat. Dieses entspricht einer Fläche von rund 837,39 $Quadratzentimetern$.

Die Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler besteht darin, zu überprüfen, ob die Verpackung bei gleichbleibendem Volumen sowie gleichbleibenden Klebelaschen auch mit weniger Material realisiert werden kann. Die gewonnen Erkenntnisse können dann wieder auf quaderförmige Verpackungen übertragen werden, die ein anderes Volumen fassen.

Zur Bearbeitung der Aufgabe ist es aus Gründen der didaktischen Reduktion notwendig, dass entweder entsprechend der ausführlich beschriebenen Szenarien die Tiefe als konstante Größe vorgegeben wird (z. B. 5,8 cm) oder dass von einer quadratischen Grundfläche ausgegangen wird. Beim zweitgenannten Vorgehen kann sich den Schülerinnen und Schülern allerdings nicht erschließen, warum gerade diese Vorgabe einen minimalen Materialbedarf realisiert. Dieses ließe sich realitätsbezogen mithilfe der Passgenauigkeit in entsprechende Umverpackungen begründen.

Mögliches Schnittmuster einer quaderförmigen Verpackung (Maßstab 1: 2):



Hinweis: Tatsächlich ausgemessene Milchtüten können beispielsweise auch folgende Werte haben: Höhe: 19,1 cm, Breite: 8,9 cm und Tiefe 5,8 cm. Hieraus errechnet sich ein Volumen von 985,42 ccm. Verursacht durch den Füllervorgang „beult“ sich das Material aus und ermöglicht somit die geforderte Füllmenge von einem Liter.

Mögliche Lösung des modifizierten Szenarios

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das modifizierte Szenario.